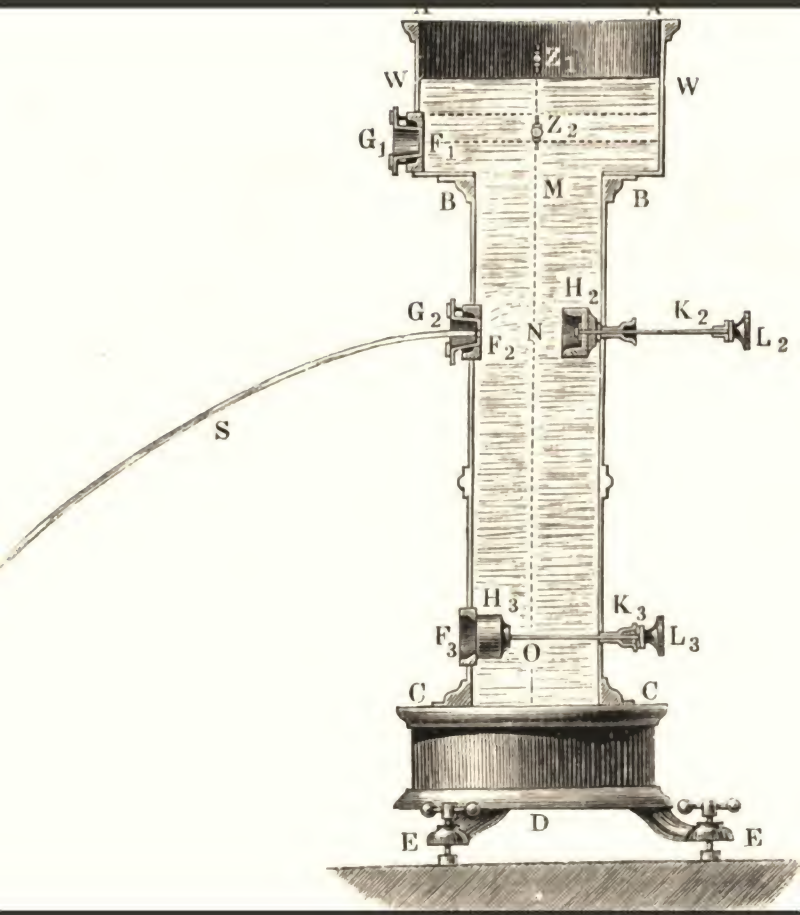
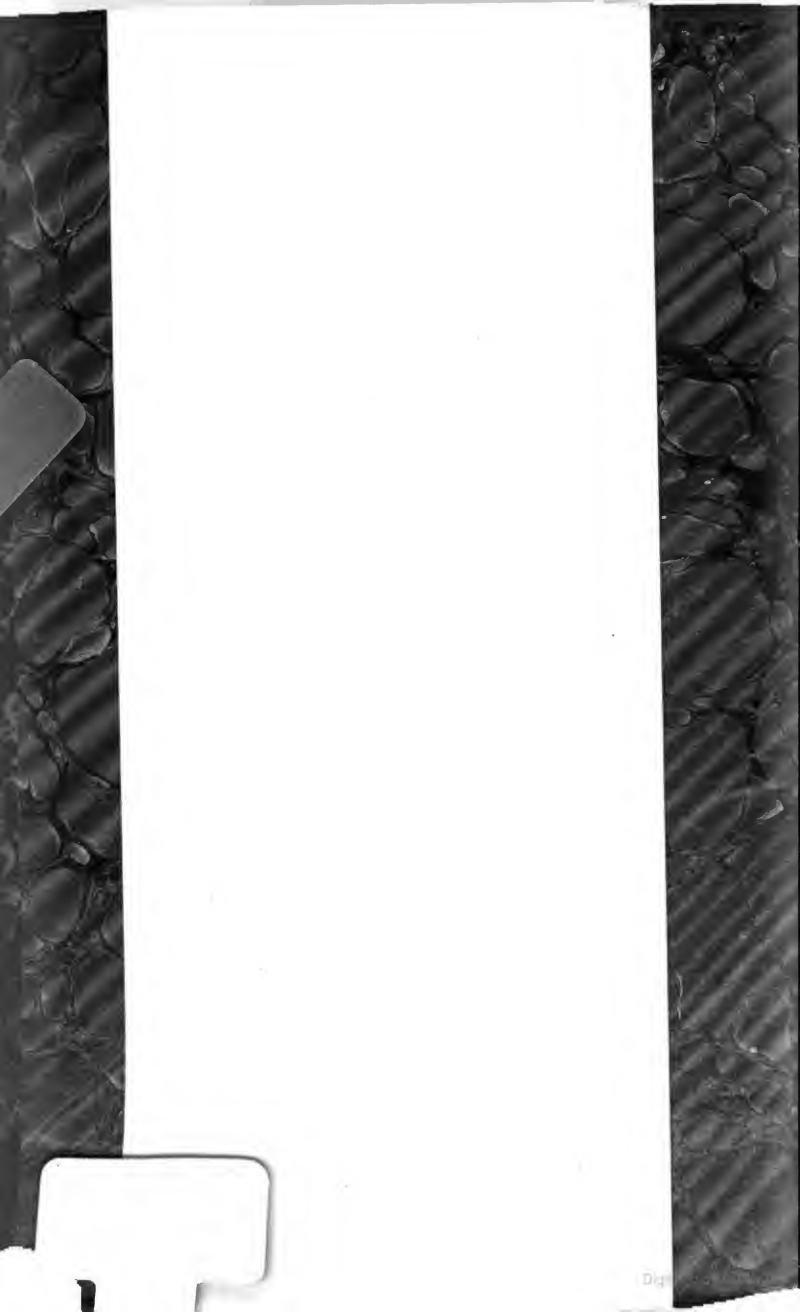



# *Lehrbuch der ingenieur-und maschinen-mechanik*

Julius Ludwig Weisbach

Digitized by Google



Digitized by Google

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Digitized by Google

# Lehrbuch

der

# Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

**Unterricht an technischen Lehranstalten**

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. **Julius Weisbach,**

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

In drei Theilen.

**Erster Theil: Theoretische Mechanik.**

Mit 902 in den Text eingedruckten Holzstichen.

**Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.**

**Zweite Hälfte.**

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1863.

Digitized by Google

# Lehrbuch

der

# theoretischen Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

**Unterricht an technischen Lehranstalten**

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. **Julius Weisbach,**

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

**Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.**

Mit 902 in den Text eingedruckten Holzstichen.

**Zweite Hälfte.**

**Braunschweig,**

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1863.

Digitized by Google

Eng 258.63

JUN 19 1917

Engineering Library

Gift of

Almon Danforth Hodges

H.C.1889

JUN 20 1917

TRANSFERRED TO

HARVARD COLLEGE LIBRARY

---

Die Herausgabe einer Ueberſetzung in franzöſiſcher und engliſcher Sprache, ſowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

---

Digitized by Google

## Fünfter Abschnitt.

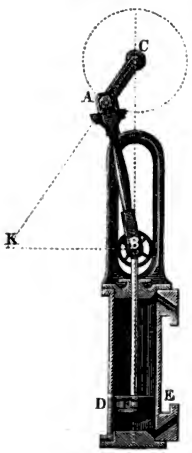
# Dynamik fester Körper.

### Erstes Capitel.

## Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

**Bewegungsarten.** Die Bewegung eines festen Körpers ist entweder fortschreitend, oder drehend, oder beides zugleich. Bei der fortschreitenden oder progressiven Bewegung (franz. mouvement de translation; engl. motion of translation) sind die gleichzeitig zurückgelegten Wege der Körpertheile unter sich parallel und gleich, bei der drehenden oder rotirenden Bewegung (franz. mouvement de rotation; engl. motion of rotation) hingegen beschreiben die Theile des Körpers um eine gewisse gerade Linie, die man die Umdrehungsaxe (franz. axe de rotation; engl. axis of revolution) nennt, concentrische Kreisbögen. Jede zusammengesetzte Bewegung läßt sich als eine drehende Bewegung um eine bewegliche Axe ansehen. Letztere ist wieder entweder veränderlich oder unveränderlich. §. 279

Fig. 465.




In progressiver Bewegung befindet sich der Kolben $DE$ und die Kolbenstange $BF$ einer Pumpe oder Dampfmaschine, Fig. 465, in drehender Bewegung, dagegen ist die Kurbel oder der Krummzapfen $AC$, in zusammengesetzter Bewegung endlich die Kurbelstange $AB$, denn das eine Ende $B$ derselben hat eine fortschreitende, und das andere Ende $A$ eine drehende Bewegung. Bei einem sich wälzenden Cylinder ist die Umdre-

Digitized by Google

hungsaxe unveränderlich, bei der Kurbelstange $AB$ hingegen ist dieselbe veränderlich, denn sie ist der Durchschnitt $M$ zwischen dem Perpendikel $BK$ zur Axenrichtung $CB$ der Kolbenstange und der Verlängerung des Kurbelarmes $CA$ (§. §. 101).

§. 280 **Geradlinige Bewegung.** Bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung eines Körpers finden die §. 82 und §. 98 gefundenen Bewegungsgesetze eines materiellen Punktes ihre unmittelbare Anwendung. Die Massentheile $M_1$, $M_2$, $M_3$ u. s. w. eines mit der Acceleration $p$ fortschreitenden Körpers widerstehen der Bewegung vermöge ihrer Trägheit mit den Kräften $M_1 p$, $M_2 p$, $M_3 p$ u. s. w. (§. 54), und da die Bewegungen aller dieser Theile in parallelen Linien erfolgen, so sind auch die Richtungen dieser Kräfte unter sich parallel; es ist daher die Mittelkraft von allen diesen aus der Trägheit entspringenden Kräften gleich der Summe

$$M_1 p + M_2 p + M_3 p + \cdots = (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots) p = Mp,$$

wo $M$ die Masse des ganzen Körpers bezeichnet, und es fällt auch der Angriffspunkt derselben mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen. Um also einen übrigens frei beweglichen Körper von der Masse $M$ oder dem Gewichte $G = Mg$ in eine geradlinig fortschreitende Bewegung mit der Acceleration $p$ zu versetzen, ist eine Kraft

$$P = Mp = \frac{Gp}{g}$$

nöthig, deren Richtung durch den Schwerpunkt $S$ des Körpers geht.

Aendert sich in Folge der Einwirkung der Kraft $P$ die Geschwindigkeit $c$ während der Zurücklegung des Weges $s$ in die Geschwindigkeit $v$ um, so ist die von der Masse in sich aufgenommene mechanische Arbeit (§. 72):

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - k)\, G.$$

Beispiel. Der Kolben sammt Stange von einer Pumpe, Dampfmaschine, Gebläsemaschine u. s. w. hat eine ungleichförmige Bewegung, bei seinem höchsten und tiefsten Stande ist er ohne Geschwindigkeit, und nahe bei seinem mittleren Stande ist die Geschwindigkeit desselben am größten. Ist das Gewicht des Kolbens und seiner Stange $= G$, und seine größte Geschwindigkeit in der Mitte seines Auf- oder Niederganges $= v$, so beträgt hiernach das Arbeitsvermögen, welches er vermöge seiner Trägheit in der ersten Hälfte seines Weges in sich aufnimmt und in der zweiten Hälfte desselben wieder ausgiebt:

$$L = \frac{v^2}{2g} G.$$

Für $G = 800$ Pfund und $v = 5$ Fuß ist diese Arbeit:

$$L = 0{,}016 \,.\, 5^2 \,.\, 800 = 320 \text{ Fußpfund};$$

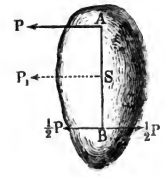
wäre nun noch der halbe Kolbenweg $s = 4$ Fuß, so hätte man die mittlere Kraft, welche nöthig ist, um den Kolben in der ersten Hälfte dieses Weges zu beschleunigen, und welche derselbe in der zweiten Hälfte durch seine Verzögerung ausübt:

Digitized by Google

$$P = \frac{L}{s} = \frac{v^2}{2gs} \cdot G = \frac{320}{4} = 80 \text{ Pfund.}$$

**Drehende Bewegung.** Geht die bewegende Kraft $P$ eines Körpers §. 281
$AB$, Fig. 466, nicht durch den Schwerpunkt $S$, so nimmt der Körper eine Drehung um diesen Punkt an, und es schreitet dieser fort, als wenn die Kraft unmittelbar in ihm angriffe, wie sich folgendergestalt beweisen läßt. Man fälle vom Schwerpunkte $S$ ein Perpendikel $SA = a$ gegen die Kraftrichtung, verlängere dasselbe rückwärts, mache die Verlängerung $SB$ dem Perpendikel gleich und lasse zwei sich das Gleichgewicht haltende und parallel mit $P$ wirkende Kräfte, die eine $+ \frac{1}{2}P$ und die andere $- \frac{1}{2}P$, in $B$ angreifen. Die Kraft $+ \frac{1}{2}P$ giebt in Vereinigung mit der einen Hälfte der in $A$ angreifenden Kraft $P$ die im Schwerpunkte $S$ angreifende Mittelkraft

Fig. 466.




$$P_1 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = P,$$

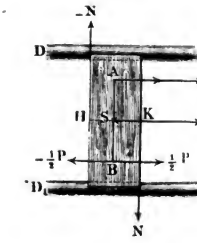
wogegen die Kraft $- \frac{1}{2}P$ mit der zweiten Hälfte ($\frac{1}{2}P$) von der in $A$ angreifenden Kraft $P$ ein Kräftepaar bildet; es resultirt also aus der excentrisch wirkenden Kraft $P$ eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft $P_1 = P$, welche diesen Punkt sammt dem ganzen Körper progressiv bewegt, und ein Kräftepaar ($\frac{1}{2}P$, $- \frac{1}{2}P$), welches den Körper um den Schwerpunkt dreht, ohne einen Druck in demselben zu erzeugen. Das statische Moment dieses Kräftepaares ist aber

$$= \frac{1}{2}P.\overline{SA} + \frac{1}{2}P.\overline{SB} = P.\overline{SA} = Pa$$

gleich dem statischen Momente der in $A$ angreifenden Kraft $P$ in Hinsicht auf den Schwerpunkt $S$; es ist folglich auch die resultirende Umdrehung dieselbe, als wenn der Schwerpunkt $S$ festgehalten würde und $P$ allein wirkte.

Wird ein Körper $AB$, Fig. 467, durch eine Führung oder Leitung $DE$, $D_1E_1$ gezwungen, eine progressive Bewegung anzunehmen, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$ dieselbe Wirkung auf die Bewegung des Körpers aus, wie eine gleiche im Schwerpunkte $S$ desselben angreifende Kraft $\overline{SP_1} = P_1$, weil das übrig bleibende Kräftepaar ($\frac{1}{2}P$, $- \frac{1}{2}P$) durch die Führung aufgenommen wird. Ist $a$ die Excentricität $SA$ der Kraft $P$, oder der Abstand ihrer Richtung von dem Schwerpunkte $S$ des Körpers und bezeichnet $b$ den Abstand $HK$ zwischen den

Fig. 467.




Digitized by Google

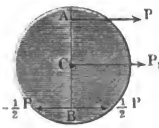
durch die einander diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte $F$ und $G$ gelegten Normalen der Führung, sowie $(N, -N)$ das Kräftepaar, mit welchem der Körper gegen die Führung wirkt, so hat man durch Gleichsetzen der Momente dieser Paare $(\frac{1}{2}P, -\frac{1}{2}P)$ und $(N, -N)$:

$$Nb = Pa, \text{ und daher:}$$

$$N = \frac{a}{b}P.$$

Wird endlich der Körper $AB$, Fig. 468, durch eine feste Axe $C$ verhindert, fortzuschreiten, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$, deren Richtung um $CA = a$ von der festen Axe $C$ absteht, dieselbe Wirkung auf die Umdrehung des Körpers um diese Axe $C$ aus als ein Kräftepaar $(\frac{1}{2}P, -\frac{1}{2}P)$ mit der Armlänge $AB = 2CA = 2CB = 2a$, oder dem Momente $\frac{1}{2}P.2a = Pa$, weil die übrig bleibende centrische Kraft $\overline{CP_1} = P_1 = P$ von den Axenlagern aufgenommen wird (vergl. §. 130).

Fig. 468.

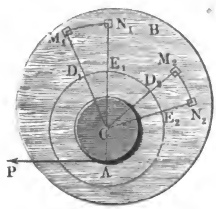



§. 282 **Trägheitsmoment.** Bei der Umdrehung eines Körpers $AB$, Fig. 469, um eine feste Axe $C$ legen alle Punkte $M_1$, $M_2$ u. s. w. desselben in gleichen Zeiten gleiche Centriwinkel $M_1CN_1 = M_2CN_2$ u. s. w. $= \varphi^0$ zurück, welchen also auch bei gleichem Radius, z. B. $CD_1 = CD_2$ u. s. w. = Eins (1) ein und derselbe Bogen

$$D_1E_1 = D_2E_2 \text{ u. s. w.} = \varphi = \frac{\varphi^0}{180^0}\pi$$

entspricht.

Fig. 469.




Da die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus einem Raumtheilchen $\varphi$ und dem entsprechenden Zeitelemente $\tau$ bestimmt wird, so ist folglich auch die Winkelgeschwindigkeit (franz. vitesse angulaire; engl. angular velocity), d. i. die Geschwindigkeit derjenigen Punkte des Körpers, welche um die Längeneinheit (z. B. einen Fuß) von der Umdrehungsaxe abstehen, für den ganzen Körper eine und dieselbe, nämlich

$$\omega = \frac{\varphi}{\tau},$$

und ebenso ist auch die Winkelacceleration, oder die Acceleration des umlaufenden Körpers im Abstande Eins (1) von der Drehungsaxe, für den ganzen Körper eine gemeinschaftliche Größe, und zwar

Digitized by Google

$$\varkappa = \frac{\omega}{\tau},$$

wenn hier $\omega$ den im Zeitelemente $\tau$ erfolgten Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

Um die Wege $s_1$, $s_2$ u. s. w., Geschwindigkeiten $v_1$, $v_2$ u. s. w. und Acceleration $p_1, p_2$ u. s. w. der Punkte $M_1, M_2$ u. s. w. des Körpers zu finden, welche um $CM_1 = r_1$, $CM_2 = r_2$ u. s. w. von der Drehungsaxe $C$ entfernt sind, hat man natürlich den Winkelweg $\varphi$, die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und die Winkelacceleration $\varkappa$ mit $r_1$, $r_2$ u. s. w. zu multipliciren; also

$$s_1 = \varphi r_1,\ s_2 = \varphi r_2 \text{ u. s. w.}$$
$$v_1 = \omega r_1,\ v_2 = \omega r_2 \text{ u. s. w. und}$$
$$p_1 = \varkappa r_1,\ p_2 = \varkappa r_2 \text{ u. s. w.}$$

zu setzen.

Besteht folglich die ganze Masse $M$ des Körpers aus den Theilen $M_1$, $M_2$ u. s. w., welche um die Halbmesser $r_1$, $r_2$ u. s. w. von der Drehungsaxe $C$ entfernt sind, so sind die Kräfte, mit welchen diese Massentheile der Umdrehung widerstehen:

$$P_1 = M_1 p_1 = \varkappa M_1 r_1,\ P_2 = M_2 p_2 = \varkappa M_2 r_2 \text{ u. s. w.,}$$

und ihre Momente:

$$P_1 r_1 = \varkappa M_1 r_1^2,\ P_2 r_2 = \varkappa M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und es ist das erforderliche Moment zur Umdrehung des Körpers mit der Winkelacceleration $\varkappa$:

$$Pa = \varkappa M_1 r_1^2 + \varkappa M_2 r_2^2 + \cdots$$
$$= \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Ebenso sind (nach §. 84) die mechanischen Arbeiten, welche die Massentheilchen $M_1$, $M_2$ u. s. w. erfordern, um die Geschwindigkeiten $v_1$ $v_2$ u. s. w. anzunehmen:

$$A_1 = {}^1/_2 M_1 v_1^2 = {}^1/_2 \omega^2 M_1 r_1^2,$$
$$A_2 = {}^1/_2 M_2 v_2^2 = {}^1/_2 \omega^2 M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und es ist daher die mechanische Arbeit, welche der ganze Körper in Anspruch nimmt, während er die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ erhält:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots$$
$$= {}^1/_2 \omega^2 (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Es hängt also die Kraft und Arbeit einer rotirenden Masse vorzüglich von der Summe $M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots$ aus den einzelnen Massentheilen $M_1, M_2$ u. s. w. und den Quadraten ihrer Entfernungen $r_1$, $r_2$ u. s. w. von der Umdrehungsaxe ab. Man nennt diese Summe das Trägheits-, Drehungs- oder Massenmoment (franz. moment d'inertie; engl. momentum of inertia), und wir werden es in der Folge durch $Mr^2$ oder $W$ bezeichnen. Es ist also hiernach das Moment der Kraft, wodurch der Masse $M = M_1 + M_2 + \cdots$, deren Trägheitsmoment

Digitized by Google

$$W = Mr^2 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots \text{ ist,}$$

die Winkelacceleration ertheilt wird:

$$1)\quad Pa = \varkappa Mr^2 = \varkappa W,$$

und dagegen die mechanische Arbeit, wodurch diese Masse $M$ in eine Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ versetzt wird:

$$2)\quad Ps = {}^1/_2\,\omega^2 Mr^2 = {}^1/_2\,\omega^2 W.$$

Hat die Masse schon anfangs eine Winkelgeschwindigkeit $\varepsilon$, so ist die mechanische Arbeit, wodurch dieselbe auf $\omega$ gesteigert wird:

$$Ps = {}^1/_2\,\omega^2 W - {}^1/_2\,\varepsilon^2 W = {}^1/_2\,(\omega^2 - \varepsilon^2)\,W.$$

Auch läßt sich hiernach umgekehrt, aus der aufgewendeten Arbeit und Anfangsgeschwindigkeit $\varepsilon$ die Endgeschwindigkeit $\omega$ bestimmen; es ist nämlich:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2Ps}{W}}.$$

Beispiel. Wenn der um eine feste Are $C$ drehbare und anfänglich ruhende Körper $AB$, Fig. 469, ein Trägheitsmoment von 50 Fußpfund besitzt und mittels eines um eine Rolle liegenden Seiles mit einer Kraft $P = 20$ Pfund und bei Zurücklegung des Weges $s = 5$ Fuß in Umdrehung gesetzt wird, so ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit dieses Körpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ps}{W}} = \sqrt{\frac{2.20.5}{50}} = \sqrt{4} = 2 \text{ Fuß,}$$

d. h. jeder Punkt in der Entfernung eines Fußes von der Umdrehungsare legt nach Aufnahme dieser Arbeit in jeder Secunde 2 Fuß zurück. Die Zeit einer Umdrehung ist:

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}1416 \text{ Secunden,}$$

und die Zahl der Umdrehungen in der Minute:

$$u = \frac{60}{t} = \frac{60}{3{,}1416} = 19{,}1.$$

Geht die gefundene Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2$ Fuß in die Geschwindigkeit $\varepsilon = {}^3/_4$ Fuß über, so verrichtet diese Masse die Arbeit:
$P_1 s_1 = [2^2 - ({}^3/_4)^2] \cdot {}^{50}/_2 = (4 - {}^9/_{16}) \cdot 25 = {}^{55}/_{16} \cdot 25 = 85{,}93$ Fußpfd.;
hebt also z. B. ein Gewicht $P_1$ von 10 Pfund 8,593 Fuß hoch.

§. 283 **Reduction träger Massen.** Sind die Winkelgeschwindigkeiten zweier Massen $M_1$ und $M_2$ unter sich gleich, gehören z. B. diese Massen einem und demselben rotirenden Körper an, so verhalten sich ihre lebendigen Kräfte wie ihre Trägheitsmomente $W_1 = M_1 r_1^2$ und $W_2 = M_2 r_2^2$, und sind nun auch diese unter sich gleich, so besitzen die Massen gleiche lebendige Kräfte. Zwei Massen haben also hiernach gleichen Einfluß auf den Bewegungszustand eines sich umdrehenden Körpers, und es kann eine durch die andere ersetzt werden, ohne daß dadurch eine Aenderung im Bewegungszustande vor sich geht, wenn sie gleiche Trägheitsmomente $M_1 r_1^2$ und $M_2 r_2^2$ besitzen, sich also zu einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdre-

Digitized by Google

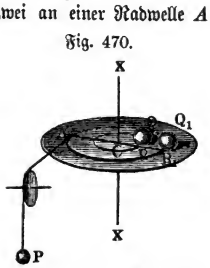
hungsaxe verhalten. Mit Hülfe der Formel $M_1 r_1^2 = M_2 r_2^2$ läßt sich eine Masse von einer Entfernung auf eine andere reduciren, d. h. es läßt sich eine Masse $M_2$ angeben, welche in der Entfernung $r_2$ eben den Antheil an dem Bewegungszustande des sich drehenden Körpers hat, als die gegebene Masse $M_1$ in der Entfernung $r_1$; es ist nämlich:

$$M_2 = \frac{M_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{W_1}{r_2^2},$$

d. i. die auf die Entfernung $r_2$ reducirte Masse ist der Quotient aus dem Trägheitsmomente der Masse und dem Quadrate jener Entfernung.

Zwei an einer Radwelle $A\,CB$, Fig. 470, festsitzende Gewichte $Q$ und $Q_1$ in den Abständen $CB = b$ und $CB_1 = a$ von der Umdrehungsaxe $XX$ haben also vermöge ihrer Massen auf die Bewegung der Radwelle gleichen Einfluß, wenn $Q_1 a^2 = Q b^2$, also $Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$ ist. Wirkt daher eine Kraft $P$ am Hebelarme $CA = CB_1 = a$, um eine Masse vom Gewichte $Q$ im Abstande $CB = b$ in Umdrehung zu setzen, so hat man die letztere auf den Hebelarm $a$ der Kraft $P$ zu reduciren, also statt $Q$,

Fig. 470.




$$Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$$

und die von $P$ bewegte Masse:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2}{a^2}\right) : g$$

zu setzen, weshalb nun die Acceleration des Gewichtes $P$:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P}{P + Q\,\frac{b^2}{a^2}} \cdot g = \frac{P a^2}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = \frac{P a}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

sich ergiebt.

Beispiel. Ist das Gewicht der rotirenden Masse $Q = 360$ Pfund, ihr Abstand von der Drehare, $b = 2{,}5$ Fuß, das die bewegende Kraft ausmachende Gewicht $P = 24$ Pfund und dessen Hebelarm $a = 1{,}5$ Fuß, so folgt die von $P$ beschleunigte träge Masse:

$$M = \left[P + \left(\frac{2{,}5}{1{,}5}\right)^2 Q\right] : g = 0{,}032 \left(24 + \frac{25}{9} \cdot 360\right) = 0{,}032 \,.\, 1024$$
$$= 32{,}77 \text{ Pfund},$$



Digitized by Google

und daher die Beschleunigung des Gewichtes:

$$p = \frac{24}{32{,}77} = 0{,}732 \text{ Fuß},$$

dagegen die Acceleration der Masse $Q$:

$$q = \frac{b}{a} \cdot p = \frac{5}{3} p = \frac{5 \,.\, 0{,}732}{3} = 1{,}22 \text{ Fuß},$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = 0{,}488 \text{ Fuß}.$$

Nach 4 Secunden ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = 0{,}488 \,.\, 4 = 1{,}952 \text{ Fuß},$$

und der entsprechende Weg:

$$\tfrac{1}{2} \omega t = \frac{1{,}952 \,.\, 4}{2} = 3{,}904 \text{ Fuß},$$

folglich der Umdrehungswinkel:

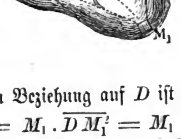
$$\varphi^0 = \frac{3{,}904}{\pi} \cdot 180^0 = 1{,}2426 \,.\, 180^0 = 223^0 45',$$

endlich der von dem Gewichte $P$ zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{p t^2}{2} = \frac{0{,}732 \,.\, 4^2}{2} = 5{,}856 \text{ Fuß}.$$

§. 284. **Reduction der Trägheitsmomente.** Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Systems von Körpern in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt $S$ des Körpers gehende Axe, so läßt sich daraus leicht das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine andere mit jener parallel laufende Axe finden. Es sei $S$, Fig. 471, die erste durch den Schwerpunkt gehende und $D$ die zweite Drehungsaxe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers bestimmt werden soll; ferner sei $SD = d$ die Entfernung beider Axen von einander, und es seien $SN_1 = x_1$ und $N_1 M_1 = y_1$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines Massentheiles $M_1$ des ganzen Körpers. Das Trägheitsmoment dieses Theiles

Fig. 471.




in Beziehung auf $D$ ist nun:

$$= M_1 \,.\, \overline{D M_1}^2 = M_1 \left(\overline{D N_1}^2 + \overline{N_1 M_1}^2\right) = M_1 \left[(d + x_1)^2 + y_1^2\right]$$

und in Beziehung auf $S$:

$$= M_1 \,.\, \overline{S M_1}^2 = M_1 \left(\overline{S N_1}^2 + \overline{N_1 M_1}^2\right) = M_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right),$$

daher die Differenz beider Momente:

$$= M_1 \left(d^2 + 2 d x_1 + x_1^2 + y_1^2\right) - M_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right) = M_1 d^2 + 2 M_1 d x_1.$$

Für einen anderen Massentheil $M_2$ ist sie:

$$= M_2 d^2 + 2 M_2 d x_2,$$

für einen dritten:

$$= M_3 d^2 + 2 M_3 d x_3 \text{ u. s. w.}$$

daher für alle Massentheile zusammen:

$$= (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots) d^2 + 2 d (M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + \cdots).$$

Digitized by Google

Nun ist aber $M_1 + M_2 + \cdots$ die Summe $M$ aller Massen und $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots$ die Summe $Mx$ ihrer statischen Momente, es folgt daher die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente $W_1$ des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe $D$ und dem Trägheitsmomente $W$ in Beziehung auf $S$:

$$W_1 - W = Md^2 + 2dMx.$$

Da aber endlich für jede Ebene durch den Schwerpunkt die Summe der statischen Momente der Theile auf der einen Seite so groß ist als die der Momente auf der anderen Seite, die algebraische Summe aller Momente also = Null ist, so hat man auch $Mx = 0$, und daher:

$$W_1 - W = Md^2,$$

d. i.

$$W_1 = W + Md^2.$$

Es ist also das Trägheitsmoment eines Körpers für eine excentrische Axe gleich dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe, vergrößert um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes beider Axen von einander.

Man ersieht auch hieraus, daß von allen Trägheitsmomenten in Beziehung auf lauter parallele Axen dasjenige am kleinsten ausfällt, dessen Axe die Schwerlinie des Körpers ist.

**Trägheitshalbmesser.** Es ist nöthig, die Trägheitsmomente von den §. 285
vorzüglichsten Körpern der Geometrie kennen zu lernen, weil dieselben bei den Untersuchungen der Mechanik sehr oft zur Anwendung kommen. Sind diese Körper homogen, wie wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, so sind die Massentheile $M_1$, $M_2$ u. s. w. den entsprechenden Volumentheilen $V_1$, $V_2$ u. s. w. proportional, und es läßt sich daher das Maß des Trägheitsmomentes, welches man auch wohl Trägheitsmoment schlechtweg nennt, durch die Summe aus den Volumtheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe ersetzen. Auch lassen sich in diesem Sinne die Trägheitsmomente von Linien und Flächen angeben.

Denkt man sich die ganze Masse eines Körpers in einen Punkt zusammengedrängt, so läßt sich die Entfernung desselben von der Axe unter der Voraussetzung bestimmen, daß die so concentrirte Masse mit der im Raume vertheilten Masse einerlei Trägheitsmoment besitze. Man nennt diese Entfernung den Drehungs- oder Trägheitshalbmesser (franz. rayon d'inertie; engl. radius of gyration). Ist $W$ das Trägheitsmoment, $M$ die Masse und $k$ der Trägheitshalbmesser, so hat man $Mk^2 = W$, und daher:

$$k = \sqrt{\frac{W}{M}}.$$



Digitized by Google

Uebrigens ist zu erinnern, daß dieser Halbmesser keineswegs einen bestimmten Punkt, sondern nur einen Kreis angiebt, in dessen Umfang die Masse beliebig vertheilt angenommen werden kann.

Führt man in der Formel

$$W_1 = W + Md^2,\ W = Mk^2 \text{ und } W_1 = Mk_1^2$$

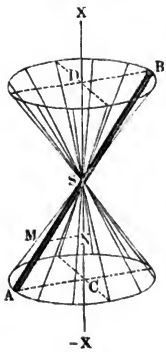
ein, so erhält man:

$$k_1^2 = k^2 + d^2,$$

d. h. es ist das Quadrat des Drehungshalbmessers in Beziehung auf eine Axe gleich dem Quadrate des Drehungshalbmessers in Beziehung auf die parallele Schwerlinie plus das Quadrat der Entfernung beider Axen von einander.

§. 286 **Trägheitsmoment einer Stange.** Von einer Stange $AB$, Fig. 472, welche sich um eine Axe $\overline{X}X$ durch ihre Mitte $S$ dreht, bestimmt sich das Trägheitsmoment auf folgende Weise. Es sei der Querschnitt der Stange, $= F$, die halbe Länge $SA$ derselben, $= l$, und der Winkel, welchen ihre Axe mit der Drehungsaxe einschließt, d. i. $ASX = \alpha$. Theilen wir die halbe Länge in $n$ Theile, so erhalten wir auch $n$ Stücke, jedes von dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$; die Entfernungen dieser Stücke von der Mitte $S$ sind $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w., daher die Abstände derselben von der Axe $\overline{X}X$, wie z. B. $MN$:

Fig 472.




$$= \frac{l}{n} sin.\ \alpha, \frac{2l}{n} sin.\ \alpha, \frac{3l}{n} sin.\ \alpha \text{ u. s. w.}$$

und ihre Quadrate:

$$= \left(\frac{l\ sin.\ \alpha}{n}\right)^2,\ 4\left(\frac{l\ sin.\ \alpha}{n}\right)^2,\ 9\left(\frac{l\ sin.\ \alpha}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Durch Multiplication dieser Quadrate mit dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$ eines Elementes und durch Addition der dadurch erhaltenen Producte ergiebt sich nun das Trägheitsmoment der halben Stange:

$$T = \frac{Fl}{n}\left[\left(\frac{l\ sin.\ \alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{l\ sin.\ \alpha}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{l\ sin.\ \alpha}{n}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{Fl^3\ sin.\ \alpha^2}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2),$$

Digitized by Google

oder, da $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist,

$$W = \frac{Fl^3 \sin.\alpha^2}{3}.$$

Da ferner $Fl$ das als Masse $M$ zu behandelnde Volumen der halben Stange ist, so folgt endlich:

$$W = {}^1/_3 Ml^2 \sin.\alpha^2.$$

Der Abstand eines Stangenendes von der Axe $\overline{X}X$ ist

$$AC = BD = a = l \sin.\alpha,$$

daher folgt einfacher

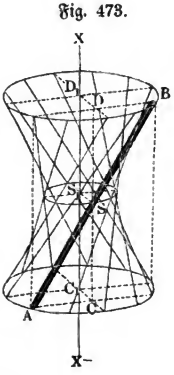
$$W = {}^1/_3 Ma^2,$$

welche Formel auch auf die ganze Stange $AB$ anzuwenden ist, wenn man unter $M$ die Masse der ganzen Stange versteht. Eine Masse $M_1$ am Endpunkte $A$ der Stange hat das Trägheitsmoment $M_1 a^2$, macht man daher $M_1 = {}^1/_3 M$, so hat $M_1$ mit der Stange einerlei Trägheitsmoment. Ob also die Masse auf die Stange gleichförmig vertheilt, oder ihr dritter Theil im Endpunkte $A$ concentrirt sei, dies kommt in Hinsicht auf die Trägheit auf eins hinaus.

Setzt man $W = Mk^2$, so bekommt man $k^2 = {}^1/_3 a^2$, und daher den **Trägheitshalbmesser** der Stange:

$$k = a\sqrt{{}^1/_3} = 0{,}5773\,.\,a.$$

Fig. 473.




Steht die Stange senkrecht auf der Drehungsaxe, so ist $a = l$, daher

$$W = {}^1/_3 Ml^2.$$

Befindet sich endlich die Stange $AB$, Fig. 473, mit der Drehungsaxe $C_1 D_1$ nicht in einerlei Ebene, und ist der kürzeste Abstand

$$SS_1 = CC_1 = DD_1$$

der Stangenaxe von der Drehungsaxe, $= d$, sowie der Normalabstand $AC = BD$ der Stangenenden $A$ und $B$ von der mit $C_1 D_1$ parallelen Axe $CD$ durch den Schwerpunkt $S$ der Stange, $= a$, so hat man (nach §. 284), das Trägheitsmoment der Stange:

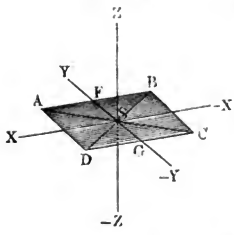
$$W_1 = W + {}^1/_3 Ma^2 = M(d^2 + {}^1/_3 a^2)$$

**Rechteck und Parallelepiped.** Die Trägheitsmomente von ebenen Flächen bestimmen sich genau so wie die Biegungsmomente $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ derselben. Deshalb lassen sich auch die im vorigen §. 287

Abschnitt für verschiedene Flächen gefundenen Werthe von $W$ als Trägheitsmomente $W$ hier benutzen.

Für das Rechteck $ABCD$, Fig. 474, ist das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$, welche parallel mit einer Seite läuft, und durch die Mitte $S$ dieser Figur geht, nach §. 226,

Fig. 474.




$$W = \frac{b\,h^3}{12},$$

wo $b$ die Breite $AB = CD$, parallel zur Umdrehungsaxe, und $h$ die Höhe $AD = BC$ der Fläche bezeichnet.

Nun ist aber der Inhalt $b\,h$ dieses Rechteckes als Masse $M$ desselben einzusetzen, daher folgt das Trägheitsmoment:

$$W = \frac{M h^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

d. i. so groß als das des dritten Theiles dieser Masse, im Abstande $\overline{SF} = \overline{SG} = \frac{h}{2}$ von der Drehungsaxe angebracht.

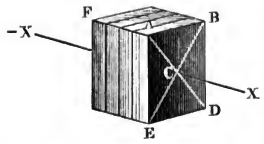
Dreht sich dieses Rechteck um eine Axe $Z\overline{Z}$, welche rechtwinkelig gegen die Ebene desselben steht und ebenfalls durch die Mitte $S$ der Figur geht, so hat man nach §. 225:

$$W = \frac{M h^2}{12} + \frac{M b^2}{12} = \frac{M(h^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{M}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

wenn $d$ die Diagonale $\overline{AC} = \overline{BD}$ des Rechteckes bezeichnet. Man kann sich also in diesem Falle den dritten Theil der Masse des Rechteckes in einem der Eckpunkte $A$, $B$ ... angebracht denken.

Da sich ferner ein gerades Parallelepiped $BEF$, Fig. 475, durch Parallelebenen in lauter gleiche rectanguläre Blätter zerlegen läßt, so gilt diese Formel auch für dieses, wenn die Umdrehungsaxe durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüber liegenden Flächen geht. Uebrigens folgt auch aus dieser Formel, daß das Trägheitsmoment des Parallelepipeds gleich ist dem Trägheitsmomente des in einem der Eckpunkte $A$ angebrachten dritten Theiles seiner Masse.

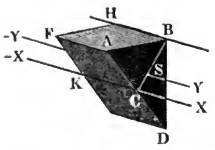
Fig. 475.




Digitized by Google

**Prisma und Cylinder.** Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes läßt sich auch das eines dreiseitigen Prismas berechnen. Die Diagonalebene $ADF$ theilt das Parallelepiped in zwei gleiche dreiseitige Prismen mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen $ABD$, Fig. 476, es ist daher für eine Drehung um die durch die Mittelpunkte $C$ und $K$ der Hypotenusen gehende Axe $\overline{XX}$ das Trägheitsmoment $= {}^1/_{12}\,Md^2$. Benutzt man nun den Lehrsatz in §. 284, so erhält man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch die Schwerpunkte $S$ und $S_1$ der Grundflächen gehende Axe $Y\overline{Y}$: §. 288

Fig. 476.




$$W = {}^1/_{12}\,Md^2 - M.\,\overline{CS}^2 = M\left(\frac{d^2}{12} - ({}^1/_3\,\overline{CB})^2\right)$$
$$= M\left[\frac{d^2}{12} - \left(\frac{d}{6}\right)^2\right],$$

d. i.:

$$W = {}^1/_{18}\,Md^2,$$

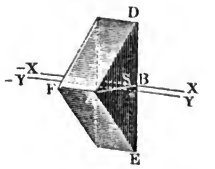
und es folgt auch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seitenkante $BH$:

$$W_1 = W + M.\,\overline{SB}^2 = {}^1/_{18}\,Md^2 + M({}^1/_3\,d)^2 = {}^3/_{18}\,Md^2$$
$$= {}^1/_6\,Md^2,$$

wobei $d$ allemal die Hypotenuse $AD$ der triangulären Grundfläche bezeichnet.

Für ein Prisma $ADFE$, Fig. 477, mit gleichschenkelig triangulären Grundflächen ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Axe $X\overline{X}$, welche die Mittelpunkte der Grundlinien verbindet, $W_1 = {}^1/_6\,Md^2$, wenn $d$ die Seite $AD = AE$ einer Grundfläche bezeichnet, weil sich diese Fläche durch die Höhenlinie $AB$ in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Ist nun diese Höhe $AB$ der gleichschenkelig triangulären Basis, $= h$, so hat man das Trägheitsmoment dieses Prismas in Beziehung auf die Axe $Y\overline{Y}$ durch die Schwerpunkte der Grundflächen:

Fig. 477.




$$W = {}^1/_6\,Md^2 - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = M({}^1/_6\,d^2 - {}^1/_9\,h^2)$$
$$= {}^1/_3\,M({}^1/_2\,d^2 - {}^1/_3\,h^2),$$

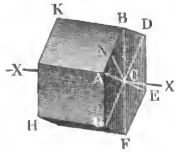
Digitized by Google

und endlich das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Kante $AF$ durch die Spitzen $A$ und $F$ der Grundflächen:

$$W_1 = W + M\,(^2/_3\,h)^2 = M\left(\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{9} + \frac{4\,h^2}{9}\right)$$
$$= {}^1/_3\,M\,(^1/_2\,d^2 + h^2).$$

Hiernach läßt sich auch das Trägheitsmoment eines geraden regelmäßigen, sich um seine geometrische Axe drehenden Prismas $ADFK$, Fig. 478, finden. Ist $CA = CB = r$ der Halbmesser der Grundfläche oder eines Ergänzungsdreieckes der Basis, $h$ die Höhe $CN$ von einem der Ergänzungsdreiecke $ACB$, und $M$ die Masse des ganzen Prismas, so hat man nach der letzten Formel, wenn man darin $r$ statt $d$ setzt:

Fig. 478.




$$W = {}^1/_3\,M\left(\frac{r^2}{2} + h^2\right).$$

Das reguläre Prisma wird zu einem geraden Cylinder, wenn $h = r$ ausfällt, daher ist das Trägheitsmoment dieses Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe:

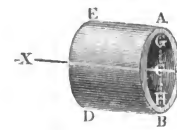
$$W = {}^1/_3\,M\left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = {}^1/_2\,M\,r^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Cylinders ist also gleich dem Trägheitsmomente der halben Cylindermasse concentrirt in dem Umfange desselben, oder gleich dem Trägheitsmomente der ganzen Masse befindlich im Abstande

$$k = r\sqrt{{}^1/_2} = 0{,}7071\,.\,r.$$

Hat man es mit einem hohlen Cylinder $ABDE$, Fig. 479, zu thun, so ist das Trägheitsmoment des leeren Raumes von dem des massiven Cylinders abzuziehen. Bezeichnet $l$ die Länge, $r_1$ den äußeren Halbmesser $CA$ und $r_2$ den inneren Halbmesser $CG$ dieses Körpers, so hat man, nach dem Vorigen, das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

Fig. 479.




$$W = {}^1/_2\,(M_1\,r_1^2 - M_2\,r_2^2) = {}^1/_2\,\pi\,(r_1^2\,.\,r_1^2 - r_2^2\,.\,r_2^2)\,l = {}^1/_2\,\pi\,(r_1^4 - r_2^4)\,l$$
$$= {}^1/_2\,\pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)\,l = {}^1/_2\,M\,(r_1^2 + r_2^2),$$

weil das als Masse zu behandelnde Volumen des Körpers $= \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,l$ ist.

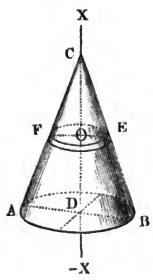
Bezeichnet ferner $r$ den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und $b$ die Breite $r_1 - r_2$ der Ringfläche, so hat man auch:

$$W = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Digitized by Google

**Kegel und Pyramide.** Mit Hülfe der Formel für das Trägheits- §. 289
moment eines Cylinders läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines geraden Kegels, sowie das einer Pyramide berechnen. Es sei $ACB$, Fig. 480, ein sich um seine geometrische Axe drehender Kegel, $r = DA = DB$, der Halbmesser seiner Basis, und $h = CD$, seine in die Axe fallende Höhe. Führen wir in gleichen Höhenabständen $n$ Schnitte parallel zur Basis, so erhalten wir lauter dünne Scheiben von den Halbmessern

Fig. 480.




$$\frac{r}{n},\ 2\,\frac{r}{n},\ 3\,\frac{r}{n}\cdots n\,\frac{r}{n}$$

und der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}$. Die Volumina dieser Scheiben sind:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}\ \text{u. s. w.},$$

und daher die Trägheitsmomente derselben:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n},\ \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n},\ \pi\left(\frac{3r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n}\ \text{u. s. w.}$$

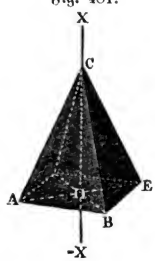
Die Summe dieser Werthe giebt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Kegels:

$$W = \frac{\pi r^4 h}{2n^5}\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4),$$

d. i., da $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5}$ und die Masse des Kegels $M = \frac{\pi r^2 h}{3}$ zu setzen ist,

$$W = \frac{\pi r^4 h}{10} = \frac{3}{10}\cdot\frac{\pi r^2 h}{3}\cdot r^2 = \frac{3}{10}\,Mr^2.$$

Fig. 481.




Ebenso ist für die gerade Pyramide $ACE$, Fig. 481, mit rectangulärer Basis, unter denselben Verhältnissen:

$$W = {}^1/_5\,Md^2,$$

wenn $d$ die halbe Diagonale $DA$ der Basis bezeichnet.

Auch ergiebt sich durch Subtraction von zwei Trägheitsmomenten, das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels ($ABEF$, Fig. 480), dessen Halbmesser $DA$ und $OF$, $r_1$ und $r_2$ und Höhen $CD$ und $CO$, $h_1$ und $h_2$ sind, in Beziehung auf seine geometrische Axe $X\overline{X}$:

Digitized by Google

$$W = \frac{\pi}{10}(r_1^4 h_1 - r_2^4 h_2) = \frac{\pi h_1}{10 r_1}(r_1^5 - r_2^5),$$

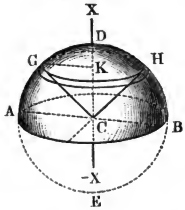
oder, da die Masse

$$M = \frac{\pi}{3}(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) = \frac{\pi h_1}{3 r_1}(r_1^3 - r_2^3) \text{ ist,}$$

$$W = {}^3/_{10}\, M \left(\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\right).$$

§. 290 **Kugel.** Auf gleiche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment einer Kugel, welche sich um einen ihrer Durchmesser $DE = 2r$ dreht. Theilen wir die Halbkugel $ADB$, Fig. 482, durch Schnitte parallel zur Basis $ACB$ in $n$ gleichdicke Scheiben wie $GKH$ u. s. w., und bestimmen wir die Momente derselben. Das Quadrat des Halbmessers $GK$ einer solchen Scheibe ist:

Fig. 482.




$$\overline{GK}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{CK}^2 = r^2 - \overline{CK}^2,$$

daher das Trägheitsmoment derselben:

$$= {}^1/_2 \pi \cdot \frac{r}{n}(r^2 - \overline{CK}^2)^2$$

$$= \frac{\pi r}{2n}(r^4 - 2r^2 . \overline{CK}^2 + \overline{CK}^4).$$

Setzen wir nun für $CK$ nach und nach $\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \frac{3r}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nr}{n}$ ein, und addiren wir die Ergebnisse, so folgt das Trägheitsmoment der Halbkugel:

$$W = \frac{\pi r}{2n}\left[n.r^4 - 2r^2\left(\frac{r}{n}\right)^2(1^2+2^2+\cdots+n^2) + \left(\frac{r}{n}\right)^4(1^4+2^4+\cdots+n^4)\right]$$

$$= \frac{\pi r}{2n}\left[nr^4 - \frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n^3}{3} + \left(\frac{r}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^5}{5}\right], \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{\pi r^5}{2}(1 - {}^2/_3 + {}^1/_5) = \frac{4\pi r^5}{15}.$$

Nun ist der Inhalt einer Halbkugel, $M = {}^2/_3 \pi r^3$, es läßt sich daher setzen:

$$W = {}^2/_5 . {}^2/_3 \pi r^3 . r^2 = {}^2/_5 M r^2,$$

und nimmt man $M$ für die ganze Kugel an, so gilt die Formel auch für diese.

Der Drehungshalbmesser ist:

$$k = r\sqrt{{}^2/_5} = 0{,}6324 . r;$$

zwei Fünftel der Kugelmasse um den Kugelhalbmesser von der Drehungsaxe abstehend, hat dasselbe Trägheitsmoment wie die ganze Kugel.

Die Formel

$$W = {}^2/_5 M r^2$$

gilt auch für ein Sphäroid, dessen Aequatorhalbmesser $= r$ ist (s. §. 123).

Digitized by Google

Dreht sich die Kugel um eine andere, von ihrem Mittelpunkte um $d$ abstehende Axe, so hat man das Trägheitsmoment derselben zu setzen:

$$W = M\,(d^2 + {}^2/_5\,r^2).$$

**Cylinder und Kegel.** Das Trägheitsmoment einer Kreislinie §. 291
$ABDE$, Fig. 483, in Hinsicht auf eine Axe durch den Mittelpunkt $C$ und rechtwinkelig zur Ebene des Kreises ist, da alle Punkte um $CA = r$ von der Axe abstehen,

$$W = Mr^2,$$

und folglich dasjenige in Hinsicht auf einen der Durchmesser $\overline{X}\,\overline{X}$ oder $\overline{Y}\,\overline{Y}$ (vergleiche §. 231):

$$W_1 = {}^1/_2\,W = {}^1/_2\,Mr^2.$$

Dagegen das Trägheitsmoment von einem kreisrunden Blatte $ABDE$, Fig. 483, welches sich um seinen Durchmesser $BE$ dreht, ergiebt sich wie das Biegungsmoment eines Cylinders:

$$= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4},$$

es ist folglich der Halbmesser der Trägheit dieser Fläche:

$$k = r\sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2\,r,$$

d. i. die Hälfte vom Halbmesser des Kreises.

Fig. 483.

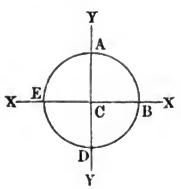
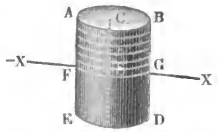



Fig. 484.




Hieraus läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines Cylinders $ABDE$, Fig. 484, finden, der sich um einen durch seinen Schwerpunkt $S$ gehenden Durchmesser $FG$ dreht. Ist $l$ die halbe Höhe $AF$ und $r$ der Halbmesser $CA = CB$ des Cylinders, so hat man das Volumen einer Hälfte desselben $= \pi r^2 l$, und führt man Schnitte parallel zur Basis und in gleichen Abständen, so zerlegt man diesen Körper in $n$ gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{\pi r^2 l}{n}$ ist, und der erste um $\frac{l}{n}$, der zweite um $\frac{2l}{n}$, der dritte um $\frac{3l}{n}$ u. s. w. vom Schwerpunkte $S$ absteht. Mittels der Formel in §. 284 folgen nun die Trägheitsmomente dieser Blätter oder Scheiben:

Digitized by Google

$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1/_4 r^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2\right],\quad \frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1/_4 r^2 + \left(\frac{2l}{n}\right)^2\right],$$
$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1/_4 r^2 + \left(\frac{3l}{n}\right)^2\right] \text{ u. s. w.,}$$

deren Summe das Trägheitsmoment des halben Cylinders:

$$W = \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{n r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right]$$
$$= \pi r^2 l\left(\frac{r^2}{4}\right) + \frac{l^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

liefert, und welches auch für den ganzen Cylinder gilt, wenn $M$ die Masse desselben bezeichnet.

Auf ähnliche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment eines geraden Prismas $ABD$, Fig. 485, in Hinsicht auf eine Queraxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt $S$. Ist $k$ der Trägheitshalbmesser der Grundfläche $AB$ des Prismas in Hinsicht auf eine Axe $\overline{N}N$, welche durch den Schwerpunkt $C$ der Basis geht und parallel $\overline{X}X$ läuft, und bezeichnet $l$ die halbe Länge oder Höhe $CS = DS$ des Prismas, so hat man das gesuchte Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$:

$$W = M\,(k^2 + {}^1/_3\, l^2).$$

Fig. 485.

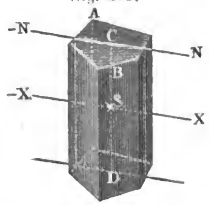
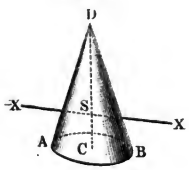



Fig. 486.




Ebenso findet man für den geraden Kegel $ABD$, Fig. 486, dessen Umdrehungsaxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt desselben geht und auf der geometrischen Axe $CD$ winkelrecht steht:

$$W = {}^3/_{20}\, M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

§. 292 **Segmente.** Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides $BAD$, Fig. 487, welches sich um seine Rotationsaxe $AC$ dreht, wird ähnlich wie das einer Kugel bestimmt. Ist der Halbmesser der Basis,

$$\overline{CB} = \overline{CD} = a,$$

die Höhe $CA = h$, und läßt man den Körper aus $n$ Scheiben, jede von der Höhe $\frac{h}{n}$ bestehen, so hat man die Inhalte derselben:

Digitized by Google

$$= \frac{h}{n}\pi\cdot\frac{1}{n}a^2, \frac{h}{n}\pi\cdot\frac{2}{n}a^2, \frac{h}{n}\pi\cdot\frac{3}{n}a^2 \text{ u. s. w.},$$

weil sich die Quadrate der Halbmesser wie die Höhen oder Abstände vom Scheitel $A$ verhalten. Hieraus ergeben sich die Trägheitsmomente der auf einander folgenden scheibenförmigen Elemente des Körpers:

$$= \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{n^2}, \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4a^4}{n^2}, \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{9a^4}{n^2} \text{ u. s. w.},$$

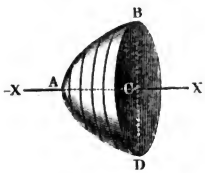
und daher folgt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Paraboloides:

$$W = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^4 h}{6}$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{2}\cdot\frac{a^2}{3} = {}^1/_3 M a^2,$$

weil das Volumen dieses Körpers, $M = \frac{\pi a^2 h}{2}$ ist.

Fig. 487.




Diese Formel läßt sich auch auf ein niedriges Kugelsegment anwenden.

Ist die Höhe $h$ eines solchen Segmentes gegen $a$ nicht sehr klein, so hat man für das Trägheitsmoment einer Scheibe desselben:

$$W_1 = \frac{\pi h}{2n}\cdot a^4 = \frac{\pi h}{2n}\cdot h^2(2r - h)^2$$

$$= \frac{\pi h}{2n}\cdot(4r^2h^2 - 4rh^3 + h^4)$$

zu setzen, wobei $r$ den Kugelhalbmesser bezeichnet.

Nimmt man nun successiv statt $h$ die Werthe $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w. an, so erhält man das Trägheitsmoment des Kugelabschnittes:

$$W = \frac{\pi h}{2n}\left[4r^2\left(\frac{h}{n}\right)^2\cdot\frac{n^3}{3} - 4r\left(\frac{h}{n}\right)^3\cdot\frac{n^4}{4} + \left(\frac{h}{n}\right)^4\cdot\frac{n^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi h^3}{30}(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Der Inhalt oder die Masse des Kugelsegmentes ist:

$$M = \pi h^2(r - {}^1/_3 h),$$

daher:

$$W = \pi h^2(r - {}^1/_3 h)\cdot\frac{2h}{3}\left(r - {}^5/_{12}h + {}^1/_{90}\cdot\frac{h^2}{r - {}^1/_3 h}\right)$$

$$= {}^2/_3 Mh\left(r - {}^5/_{12}h + {}^1/_{90}\cdot\frac{h^2}{r - {}^1/_3 h}\right).$$

Meist ist genügend genau

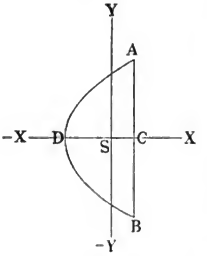
$$W = {}^2/_3 Mh(r - {}^5/_{12}h) = {}^1/_3 M(a^2 + {}^1/_6 h^2).$$

Diese Formel findet ihre Anwendung bei den Pendellinsen.

Digitized by Google

§. 293 **Parabel und Ellipse.** Für eine Parabelfläche $ABD$, Fig. 488, ist (nach §. 233), wenn man statt der Fläche $F$ die Masse $M$ einführt, also $F$ mit $M$ vertauscht, und die Sehne $AB$ wieder mit $s$, sowie die Bogenhöhe $CD$ mit $h$ bezeichnet, das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die geometrische Axe $\overline{X}X$ dieser Fläche:

Fig. 488.




$$W_1 = \frac{Ms^2}{20},$$

und das in Hinsicht auf die Axe $\overline{Y}Y$, welche durch den Schwerpunkt $S$ der Fläche geht und rechtwinkelig gegen $\overline{X}X$ steht:

$$W_2 = {}^{12}/_{175}\, Mh^2.$$

Hieraus folgt das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine durch $S$ rechtwinkelig zur Parabelfläche gehende Axe:

$$W = W_1 + W_2 = M\left(\frac{s^2}{20} + {}^{12}/_{175}\, h^2\right) = {}^{1}/_{5}\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{12}/_{35}\, h^2\right].$$

Für eine solche Axe durch den Parabelscheitel $D$ wäre hingegen, da $DS = {}^{3}/_{5}\, h$ ist (§. 115), dieses Moment:

$$W_3 = W + M\,({}^{3}/_{5}\, h)^2 = {}^{1}/_{5}\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{2}/_{7}\, h^2\right]$$

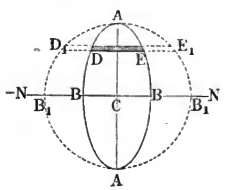
und dagegen für das Moment durch den Mittelpunkt $C$ der Sehne:

$$W_4 = W + M\,({}^{2}/_{5}\, h)^2 = {}^{1}/_{5}\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{8}/_{7}\, h^2\right].$$

Diese Formel gilt natürlich auch für ein Prisma mit parabolischen Grundflächen, namentlich auch für Balanciers, welche aus zwei solchen Prismen bestehen und um eine durch ihre Mitte $C$ gehende Axe schwingen.

Für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 489, mit den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ ist (nach §. 231) das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe $BB$:

Fig. 489.




$$W_1 = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

und das in Hinsicht auf die Axe $AA$:

$$W_2 = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{Mb^2}{4};$$

folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht

Digitized by Google

auf eine Axe durch die Mitte $C$ und rechtwinkelig zur Ebene der Figur: $W = W_1 + W_2 = {}^1/_4 M (a^2 + b^2)$.

**Rotationsflächen und Rotationskörper.** Mit Hülfe des höheren Calculs lassen sich die Trägheitsmomente von Rotationsflächen und Rotationskörpern (s. §. 125) durch die im Folgenden entwickelten Formeln ermitteln. (§. 294)

1) Dreht sich ein Gürtel oder eine Zone $PQQ_1P_1$, Fig. 490, vom Halbmesser $MP = y$ und der Breite $PQ = \partial s$ um seine geometrische Axe $AC$, so fällt, da der Inhalt desselben (nach §. 125)

$$\partial O = 2\pi y \partial s$$

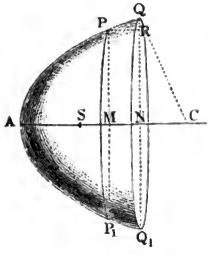
ist, das Trägheitsmoment desselben

$$y^2 \partial O = 2\pi y^3 \partial s$$

aus, und es ist folglich das Trägheitsmoment der ganzen Rotationsfläche $APP_1$ in Hinsicht auf ihre Axe $AC$:

$$W = 2\pi \int y^3 \partial s.$$

Fig. 490.




2) Eine Scheibe $PQQ_1P_1$, deren Volumen $\partial V = \pi y^2 \partial x$ zu setzen ist, hat nach §. 288 das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe $AC$:

$$\frac{\partial V . y^2}{2} = \frac{\pi y^4 \partial x}{2},$$

folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers $APP_1$:

$$W = \frac{\pi}{2} \int y^4 \partial x.$$

Wäre $AP$ ein Kreisbogen, und folglich die von ihm durch Umdrehung erzeugte Fläche eine Kugelcalotte, so hätte man:

$$y^2 = 2rx - x^2 \text{ und } y \partial s = r \partial x,$$

folglich das Trägheitsmoment dieser Calotte:

$$W = 2\pi \int (2rx - x^2)\, r \partial x = 2\pi r \left(2r \int x \partial x - \int x^2 \partial x\right)$$
$$= 2\pi r \left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right),$$

oder, wenn man die Höhe $AM = x$ durch $h$ ersetzt:

$$W = 2\pi r h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = Mh \left(r - \frac{h}{3}\right),$$

da der Inhalt oder die Masse der Calotte, $M = 2\pi r h$ ist.

Digitized by Google

Für die ganze Kugeloberfläche ist $h = 2r$ und daher

$$W = {}^2/_3 M r^2.$$

Wäre hingegen $AP$ ein Ellipsenbogen und folglich der mittels der ebenen Fläche $APM$ durch Umdrehung erzeugte Rotationskörper $APP_1$ die Calotte eines Rotationsellipsoides, so hätte man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und daher das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe $AC$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \int (2ax - x^2)^2 \, \partial x \\ &= \frac{\pi b^4}{2a^4} \int (4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4) \, \partial x \\ &= \frac{\pi b^4}{2a^4} \left( {}^4/_3 a^2 x^3 - ax^4 + \frac{x^5}{5} \right); \end{aligned}$$

z. B. für das ganze Ellipsoid, für welches $x = 2a$ ist:

$$W = {}^8/_{15} \pi b^4 a = {}^2/_5 \cdot {}^4/_3 \pi a b^2 \cdot b^2 = {}^2/_5 M b^2,$$

da sich der Inhalt dieses Körpers durch $\frac{b^2}{a^2} \cdot {}^2/_3 \pi a^3 = {}^4/_3 \pi a b^2$ ausdrücken läßt (vergl. §. 123).

3) Dreht sich ferner der Gürtel $PQQ_1P_1$ um eine Axe durch $A$, welche rechtwinkelig auf der geometrischen Axe $AC$ steht, so hat man (nach §. 284 und §. 291) das Trägheitsmoment desselben

$$= \partial O \, (x^2 + {}^1/_2 y^2) = 2\pi (x^2 + {}^1/_2 y^2) \, y \, \partial s,$$

und daher das Trägheitsmoment der ganzen Calotte $APP_1$:

$$W = \pi \int (2x^2 + y^2) \, y \, \partial s.$$

4) Dreht sich endlich die ganze Scheibe $PQQ_1P_1$ um eben diese Axe durch $A$, so ist deren Trägheitsmoment

$$\partial V (x^2 + {}^1/_4 y^2) = \pi y^2 (x^2 + {}^1/_4 y^2) \, \partial x,$$

und daher das des ganzen Körpers $APP_1$:

$$W = \pi \int (x^2 + {}^1/_4 y^2) \, y^2 \, \partial x.$$

Für ein Rotationsparaboloid (s. §. 292) ist, wenn man dessen Höhe $AM$ durch $h$ und den Halbmesser $MP$ seiner Basis durch $a$ bezeichnet:

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{h},$$

folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Ordinatenaxe durch $A$:

$$W = \frac{\pi a^2}{h} \int \left( x^2 + {}^1/_4 \frac{a^2 x}{h} \right) x \, \partial x = \frac{\pi a^2}{h} \left( {}^1/_4 x^4 + {}^1/_{12} \frac{a^2 x^3}{h} \right),$$

Digitized by Google

also, wenn man $x = h$ einführt:

$$W = {}^1/_4\,\pi\,a^2\,h\,(h^2 + {}^1/_3\,a^2) = {}^1/_2\,M\,(h^2 + {}^1/_3\,a^2),$$

da das Volumen dieses Körpers $= {}^1/_2\,\pi\,a^2\,h$ ist (vergl. §. 124).

Hieraus folgt endlich wieder das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf eine Axe durch den Schwerpunkt $S$ und rechtwinkelig zu $AC$:

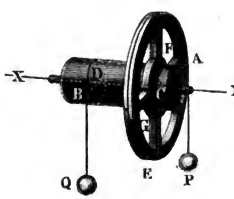
$$W_1 = {}^1/_2\,M\,(h^2 + {}^1/_3\,a^2) - ({}^2/_3)^2\,M h^2 = {}^1/_6\,M\,(a^2 + {}^1/_3\,h^2).$$

§. 295

**Beschleunigte Umdrehung einer Radwelle.** Die Theorie der Trägheitsmomente findet gerade bei Maschinen und Instrumenten die häufigsten Anwendungen, weil an diesen meist rotirende Bewegungen um eine feste Axe vorkommen. Es werden deshalb in der Folge noch vielfache Anwendungen dieser Lehre vorkommen, und möge daher genügen, zunächst nur einige einfache Fälle derselben abzuhandeln.

Wirken an einer Radwelle $ACDB$, Fig. 491, mit den Hebelarmen $CA = a$ und $DB = b$ zwei Gewichte $P$ und $Q$ mittelst vollkommen biegsamer Schnüre, und sind die Zapfen hinreichend dünn, um die Zapfenreibung vernachlässigen zu können, so bleibt diese Maschine im Gleichgewichte, wenn die statischen Momente $P.\overline{CA}$ und $Q.\overline{DB}$ einander gleich sind, also $Pa = Qb$ ist. Ist hingegen das Moment vom Gewichte $P$ größer als von $Q$, also $Pa > Qb$,

Fig. 491.




so sinkt $P$ und steigt $Q$, ist dagegen $Pa < Qb$, so steigt $P$ und sinkt $Q$. Untersuchen wir nun die Bewegungsverhältnisse in einem der letzteren Fälle, setzen wir z. B. voraus, daß $Pa > Qb$ sei. Die dem Gewichte $Q$ entsprechende und am Arme $b$ wirkende Kraft erzeugt am Hebelarme $a$ eine Kraft: $\frac{Qb}{a}$, welche der dem Gewichte $P$ entsprechenden Kraft entgegenwirkt, so daß die bewegende und in $A$ angreifende Kraft, $P - \frac{Qb}{a}$ übrig bleibt. Die Masse $\frac{Q}{g}$ reducirt sich beim Versetzen aus dem Abstande $b$ in den Abstand $a$ auf $\frac{Qb^2}{ga^2}$, es ist daher die von der Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ bewegte Masse:

$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g,$$

oder, wenn das Trägheitsmoment der Radwelle, $W = \frac{Gk^2}{g}$ und daher die



Digitized by Google

auf $A$ reducirte träge Masse derselben, $= \frac{Gk^2}{ga^2}$ ist, schärfer:

$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{Gk^2}{a^2}\right) : g = (Pa^2 + Qb^2 + Gk^2) : ga^2.$$

Hieraus folgt nun die Acceleration des Gewichtes $P$ oder Radumfanges:

$$p = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P - \frac{Qb}{a}}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot ga^2$$

$$= \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot ga;$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes $Q$ oder des Wellenumfanges:

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot gb.$$

Die Spannung des Seiles von $P$ ist:

$$S = P - \frac{Pp}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right) \text{ (s. §. 76)},$$

die des Seiles von $Q$:

$$S_1 = Q + \frac{Qq}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right),$$

daher der Zapfendruck:

$$S + S_1 = P + Q - \frac{Pp}{g} + \frac{Qq}{g} = P + Q - \frac{(Pa - Qb)^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Es ist folglich der Druck im Zapfen bei einer umlaufenden Radwelle kleiner als bei einer im Gleichgewichte stehenden Radwelle.

Aus den Accelerationen $p$ und $q$ lassen sich endlich die übrigen Bewegungsverhältnisse finden; es ist nach $t$ Secunden die Geschwindigkeit von $P$:

$$v = pt,$$

von $Q$:

$$v_1 = qt,$$

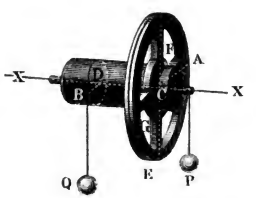
und der durchlaufene Weg von $P$:

$$s = \tfrac{1}{2} pt^2,$$

so wie der Weg von $Q$:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} qt^2.$$

Fig. 492.




Beispiel. Es sei das Gewicht am Rade Fig. 492, $P = 60$ Pfund, das an der Welle, $Q = 160$ Pfund, der Hebelarm von jenem, $CA = a = 20$ Zoll, und von diesem, $DB = b = 6$ Zoll; es bestehe ferner die Welle aus einem massiven Cylinder von 10 Pfund Gewicht, das Rad aber aus zwei eisernen Ringen und vier

Digitized by Google

Armen, jene zu 40 und 12 Pfund, diese zusammen von 15 Pfund Gewicht; endlich seien die Halbmesser des größeren Radringes $AE$, $= 20$ und 19 Zoll, und die des kleineren Ringes $FG$, $= 8$ und 6 Zoll. Man soll die Bewegungsverhältnisse dieser Maschine angeben. Die bewegende Kraft am Radumfange ist:

$$P - \frac{b}{a}\,Q = 60 - {}^6/_{20} \,.\, 160 = 60 - 48 = 12 \text{ Pfund},$$

und das Trägheitsmoment der Maschine, wenn man noch die Zapfen und Seilmassen unberücksichtigt läßt, gleich Trägheitsmoment der Welle:

$$= \frac{W b^2}{2} = \frac{10 \,.\, 6^2}{2} = 180,$$

plus Moment des kleineren Ringes:

$$= \frac{R_1 \,(r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{12 \,.\, (8^2 + 6^2)}{2} = 600,$$

plus Moment des größeren Ringes:

$$= \frac{R_2 \,(r_3^2 + r_4^2)}{2} = \frac{40 \,.\, (20^2 + 19^2)}{2} = 15220,$$

plus Moment der Arme, annähernd:

$$= \frac{A \,(r_4^3 - r_1^3)}{3\,(r_4 - r_1)} = \frac{A \,(r_1^2 + r_1\, r_4 + r_4^2)}{3} = \frac{15 \,.\, (19^2 + 19 \,.\, 8 + 8^2)}{3} = 2885,$$

daher zusammen:

$$G\,k^2 = 180 + 600 + 15220 + 2885 = 18885,$$

oder für Fußmaß:

$$= \frac{18885}{144} = 131{,}14.$$

Die gesammte, auf den Radumfang reducirte Masse ist nun:

$$M = \left(P + \frac{Q\,b^2 + G\,k^2}{a^2}\right) : g = \left[60 + 160\left(\frac{6}{20}\right)^2 + \frac{18885}{20^2}\right] : g$$

$$= \left(60 + 160 \,.\, 0{,}09 + \frac{18885}{400}\right) . \, 0{,}032$$

$$= (60 + 14{,}4 + 47{,}21) \,.\, 0{,}032 = 121{,}61 \,.\, 0{,}032 = 3{,}8915 \text{ Pfund}.$$

Hiernach folgt die Acceleration des Gewichtes $P$ sowie die des Radumfanges:

$$p = \frac{P - \frac{b}{a}\,Q}{\frac{P\,a^2 + Q\,b^2 + G\,k^2}{a^2}} \cdot g = \frac{12}{3{,}8915} = 3{,}084 \text{ Fuß},$$

dagegen die von $Q$:

$$q = \frac{b}{a}\,p = {}^6/_{20} \,.\, 3{,}084 = 0{,}925 \text{ Fuß};$$

ferner die Seilspannung von $P$:

$$S = \left(1 - \frac{p}{g}\right) . \, P = \left(1 - \frac{3{,}084}{31{,}25}\right) . \, 60 = (1 - 0{,}099) \,.\, 60 = 54{,}06 \text{ Pfd.},$$

dagegen die von $Q$:

$$S_1 = \left(1 + \frac{q}{g}\right) . \, Q = (1 + 0{,}925 \,.\, 0{,}032) \,.\, 160 = 1{,}030 \,.\, 160 = 164{,}8 \text{ Pfd.};$$

und folglich der Zapfendruck $S + S_1 = 54{,}06 + 164{,}80 = 218{,}86$ Pfund oder mit Einschluß des Gewichtes der Maschine, $= 218{,}86 + 77 = 295{,}86$ Pfund. Nach 10 Secunden hat $P$ die Geschwindigkeit $v = p\,t = 3{,}084 \,.\, 10 = 30{,}84$



Digitized by Google

Fuß erlangt, und den Weg $s = \frac{v\,t}{2} = 30{,}84 \,.\, 5 = 154{,}2$ Fuß zurückgelegt, und es ist $Q$ um $s_1 = \frac{b}{a}\, s = 0{,}3 \,.\, 154{,}2 = 46{,}26$ Fuß gestiegen.

§. 296 Das Gewicht $P$, welches dem Gewichte $Q$ die Acceleration

$$q = \frac{P\,a\,b - Q\,b^2}{P\,a^2 + Q\,b^2 + G\,k^2} \cdot g$$

ertheilt, kann auch durch ein anderes Gewicht $P_1$ ersetzt werden, ohne die Acceleration von $Q$ zu verändern, wenn dasselbe an einem Hebelarme $a_1$ wirkt, für welchen ist:

$$\frac{P_1\,a_1 - Q\,b}{P_1\,a_1^2 + Q\,b^2 + G\,k^2} = \frac{P\,a - Q\,b}{P\,a^2 + Q\,b^2 + G\,k^2}.$$

Die Größe $\frac{P\,a^2 + Q\,b^2 + G\,k^2}{P\,a - Q\,b}$ durch $c$ bezeichnet, erhält man:

$$a_1^2 - c\,a_1 = -\,\frac{Q\,b\,(b + c) + G\,k^2}{P_1},$$

und den in Frage stehenden Hebelarm:

$$a_1 = {}^1\!/_2\, c \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{Q\,b\,(b + c) + G\,k^2}{P_1}}.$$

Auch läßt sich mit Hülfe der Differenzialrechnung finden, daß $Q$ vom Gewichte $P$ dann am stärksten accelerirt wird, wenn der Hebelarm des letzten der Gleichung $P\,a^2 - 2\,Q\,a\,b = Q\,b^2 + G\,k^2$ entspricht, also

$$a = \frac{b\,Q}{P} + \sqrt{\left(\frac{b\,Q}{P}\right)^2 + \frac{Q\,b^2 + G\,k^2}{P}}$$

ist.

Die im Vorstehenden gefundenen Formeln nehmen eine complicirtere Gestalt an, wenn auf die Reibung der Zapfen und Steifigkeit der Seile Rücksicht genommen wird. Bezeichnen wir den Inbegriff beider Widerstände, reducirt auf den Umfang der Zapfen, deren Halbmesser $= r$ sein möge, durch $F$, so ist statt der bewegenden Kraft $P - \frac{b}{a}\,Q$, der Werth $P - \frac{Q\,b + F\,r}{a}$ zu substituiren, weshalb z. B. die Beschleunigung von $Q$:

$$q = \frac{(P\,a - F\,r)\,b - Q\,b^2}{P\,a^2 + Q\,b^2 + G\,k^2} \cdot g$$

und

$$a = \frac{Q\,b + F\,r}{P} + \sqrt{\left(\frac{Q\,b + F\,r}{P}\right)^2 + \frac{Q\,b^2 + G\,k^2}{P}}$$

ausfällt.

Digitized by Google

Beispiele. 1) Wenn die Gewichte $P = 30$ Pfund, $Q = 80$ Pfund an den Hebelarmen $a = 2$ Fuß und $b = \frac{1}{2}$ Fuß einer Radwelle wirken und das Trägheitsmoment dieser Maschine, $G k^2 = 60$ beträgt, so ist die Beschleunigung des steigenden Gewichtes $Q$:

$$q = \frac{30 . 2 . \frac{1}{2} - 80 . (\frac{1}{2})^2}{30 . 2^2 + 80 . (\frac{1}{2})^2 + 60} \cdot g = \frac{30 - 20}{120 + 20 + 60} \cdot 31{,}25 = \frac{312{,}5}{200}$$
$$= 1{,}5625 \text{ Fuß}.$$

Soll aber ein Gewicht $P_1 = 45$ Pfund dieselbe Beschleunigung von $Q$ hervorbringen, so ist der Hebelarm von $P_1$:

$$a_1 = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{80 . \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + c) + 60}{45}},$$

oder, da $c = \frac{200}{60 + 40} = 10$ ist,

$$a_1 = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{32}{3}} = 5 \pm \tfrac{1}{3} . 11{,}358 = 5 \pm 3{,}786$$
$$= 8{,}786 \text{ Fuß oder } 1{,}214 \text{ Fuß}.$$

2) Die Beschleunigung von $Q$ fällt am größten aus, wenn der Hebelarm der Kraft oder der Halbmesser des Rades,

$$a = \frac{\frac{1}{2} . 80}{30} + \sqrt{\left(\frac{40}{30}\right)^2 + \frac{20 + 60}{30}} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{24}{9}} = \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$$
$$= 3{,}4415 \text{ Fuß}$$

beträgt. Es ist diese Maximalbeschleunigung:

$$q = \left(\frac{30 . 1{,}7207 - 20}{30 . (3{,}4415)^2 + 80}\right) g = \frac{31{,}621}{435{,}32} \cdot g = 2{,}270 \text{ Fuß}.$$

3) Ist das Moment der Reibung sammt Seilsteifigkeit, $Fr = 8$, so hat man statt $Qb$, $Qb + Fr = 40 + 8 = 48$ zu setzen, weshalb folgt:

$$a = \frac{48}{30} + \sqrt{\left(\frac{48}{30}\right)^2 + \frac{8}{3}} = 1{,}6 + \sqrt{5{,}227} = 3{,}886 \text{ Fuß}$$

und die entsprechende Maximalbeschleunigung:

$$q = \frac{30 . 1{,}943 - 8 . \frac{1}{2} - 20}{30 . (3{,}886)^2 + 80} \cdot g = \frac{34{,}29}{533} \cdot 31{,}25 = 2{,}01 \text{ Fuß}.$$

**Fallmaschine.** Die §. 295 gefundenen Formeln für die Radwelle gelten auch für die einfache feste Rolle, denn setzt man $b = a$, so geht die Radwelle in eine Rolle oder Welle über. Behält man die übrige Bezeichnung des angeführten Paragraphen bei, so hat man für die Beschleunigung, mit welcher $P$ sinkt und $Q$ steigt: §. 297

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2}{(P + Q)\, a^2 + G k^2} \cdot g,$$

oder, mit Berücksichtigung der Reibung:

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - Far}{(P + Q)\, a^2 + G k^2} \cdot g.$$

Um die Zapfenreibung herabzuziehen, legt man die Zapfen $C$ der Rolle $AB$, Fig. 493 (a. f. S.), auf Frictionsräder $DEF$ und $D_1 E_1 F_1$. Sind nun die Trägheitsmomente dieser Räder $G_1 k_1^2$ und die Halbmesser derselben,

Digitized by Google

$DE = D_1E_1 = a_1$, so hat man, wenn $F$ wieder die auf den Umfang des Zapfens $C$ reducirten Reibungen bezeichnet, zu setzen:

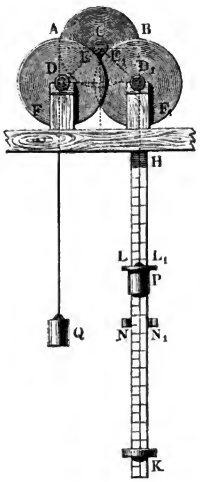
$$p = q = \frac{(P - Q)\,a^2 - Far}{(P + Q)\,a^2 + Gk^2 + G_1\frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}} \cdot g,$$

weil die auf den Umfang der Frictionsräder oder der Radzapfen reducirte träge Masse dieser Räder, $= \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2}$ beträgt. Durch Umkehrung erhält man die Beschleunigung der Schwere:

$$g = \frac{(P + Q)\,a^2 + Gk^2 + G_1\frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}}{(P - Q)\,a^2 - Far} \cdot p.$$

Bei einer kleinen Differenz $P - Q$ beider Gewichte fällt die Beschleunigung $p$ klein aus, es geht daher die Bewegung langsam vor sich und es ist der Widerstand, welchen die Luft den Gewichten entgegensetzt, unbedeutend, weshalb sich mit Hülfe von Versuchen über das Sinken von Gewichten an einer solchen Vorrichtung die Beschleunigung der Schwere mit ziemlicher Sicherheit ermitteln läßt, was bei einem frei fallenden Körper geradezu unmöglich ist. Versuche der Art hat zuerst der Engländer Atwood (s. Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotary Motion) angestellt, weshalb der Apparat unter dem Namen der Atwood'schen Fallmaschine bekannt ist. Zur Bestimmung der Fallräume dient eine Scala $HK$, an der das Gewicht $P$ niedersinkt. Aus dem Fallraume $s$ und der entsprechenden Zeit $t$ folgt allerdings schon

Fig. 493.




$$p = \frac{2 \cdot s}{t^2};$$

hebt man aber die bewegende Kraft während des Fallens auf, indem man ein ihr gleiches und einen hohlen Ring bildendes Gewicht $LL_1$ von einem festen engeren Ringe $NN_1$ auffangen läßt, so wird der übrige Theil $s_1$ des Fallraumes gleichförmig durchlaufen und es ergiebt sich nun mit Hülfe der an einer guten Uhr beobachteten Zeit $t_1$ die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s_1}{t_1},$$

Digitized by Google

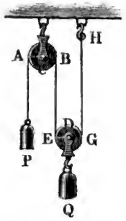
sowie die Acceleration:

$$p = \frac{v}{t} = \frac{s_1}{t t_1}.$$

Macht man endlich $t_1 = t = 1$, so giebt der Versuch unmittelbar $p = s_1$. Setzt man den so gefundenen Werth von $p$ in die obige Formel, so bestimmt sich dadurch die Beschleunigung $g$ der Schwere.

**Beschleunigte Bewegung der Rollenzüge.** Die Accelerationen der Gewichte $P$ und $Q$, welche an einer Verbindung aus einer festen Rolle $AB$ und einer losen Rolle $EG$, Fig. 494, hängen, ergeben sich auf folgende Weise. Es seien die Gewichte der Rollen $AB$ und $EG$, $= G$ und $G_1$, die Trägheitsmomente derselben $Gk^2$ und $G_1 k_1^2$ und die Halbmesser $CA = a$ und $DE = a_1$, also die auf die Umfänge reducirten Massen $M = \frac{G}{g} \cdot \frac{k^2}{a^2}$ und $M_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{k_1^2}{a_1^2}$. Sinkt das Gewicht $P$ um einen gewissen Weg $s$, so steigt $Q + G_1$ auf $\frac{1}{2} s$ (§. 164), es wird daher die Arbeit $Ps - (Q + G_1)\frac{s}{2}$ verrichtet; hat bei diesem Sinken das Gewicht $P$ die Geschwindigkeit $v$ angenommen, so ist $Q + G_1$ in die Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ versetzt worden, und es hat die Rolle $AB$ die Umfangsgeschwindigkeit $v$ und die Rolle $EG$, da bei der rollenden Bewegung progressive Bewegung und drehende einander gleich sind, die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{v}{2}$ erlangt. Die Summe der diesen Massen und Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte ist:

Fig. 494.




§. 298

$$\frac{P}{g} \cdot v^2 + \frac{Q + G_1}{g} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{Gk^2}{g a^2} \cdot v^2 + \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

und setzt man nun ihre Hälfte der aufgewendeten Arbeit gleich, so bekommt man die Gleichung:

$$\left(P - \frac{(Q + G_1)}{2}\right) s = \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach ist die dem von $P$ zurückgelegten Raume $s$ entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gs\left(P - \frac{Q + G_1}{2}\right)}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}}}.$$

Digitized by Google

Für die Acceleration $p$ ist $p\,s = \frac{v^2}{2}$, daher hier

$$p = \left( \frac{P - \frac{Q + G_1}{2}}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}} \right) g.$$

Die Acceleration von $Q + G_1$ ist $p_1 = \frac{p}{2}$, und ebenso groß ist auch die drehende Acceleration von $G_1$.

Die Spannung des beide Rollen verbindenden Seiles $B E$ ist

$$S = P - \left( P + \frac{G k^2}{a^2} \right) \frac{p}{g},$$

weil die Kraft $\left( P + \frac{G k^2}{a^2} \right) \frac{p}{g}$ auf die Beschleunigung von $P$ und $G$ verwendet wird; die Spannung des befestigten Seiles $G H$ hingegen:

$$S_1 = S - \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{p}{2 g},$$

weil die Rolle $E G$ durch die Differenz $S - S_1$ der Seilspannungen in Umdrehung gesetzt wird.

Beispiel. An der Rollenverbindung in Fig. 494 hängen die Gewichte $P = 40$ Pfund und $Q = 66$ Pfund, und es wiegt jede der massiven Rollen 6 Pfund; man sucht die Beschleunigungen dieser Gewichte.

Die bewegende Kraft ist:

$$P - \frac{Q + G_1}{2} = 40 - \frac{66 + 6}{2} = 4 \text{ Pfund},$$

die Masse einer Rolle auf ihren Umfang reducirt:

$$\frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} = \frac{G}{2 g} = \frac{6}{2 g} = \frac{3}{g} \text{ (§. 288)},$$

und die gesammte träge Masse

$$= \left( P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2} \right) : g = (40 + 7\tfrac{2}{4} + 3 + \tfrac{3}{4}) : g = \frac{247}{4 g},$$

daher die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes:

$$p = \frac{4}{247} \cdot 4 g = \frac{16 \,.\, g}{247} = \frac{16 \,.\, 31{,}25}{247} = {}^{500}/_{247} = 2{,}024 \text{ Fuß};$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes:

$$p_1 = \frac{p}{2} = 1{,}012 \text{ Fuß}.$$

Die Spannung des Seiles $B E$ ist:

$$S = P - \left( P + \frac{G}{2} \right) \frac{p}{g} = 40 - 43 \cdot \frac{2{,}024}{31{,}25} = 40 - 2{,}785 = 37{,}215 \text{ Pfund};$$

die des Seiles $G H$:

$$S_1 = S - \frac{G}{2} \cdot \frac{p}{2 g} = 37{,}215 - 3 \cdot \frac{1{,}012}{31{,}25} = 37{,}118 \text{ Pfund}.$$

Digitized by Google

Zusammengesetzter ist die Bewegung, wenn die Rolle $EG$, Fig. 495, §. 299 nur an einem umgeschlagenen Seile hängt. Nehmen wir an, daß $P$ mit der Acceleration $p$ sinkt, und $Q$ mit $q$ steigt, so erhalten wir die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfang der losen Rolle:

Fig. 495.

$$q_1 = p - q \text{ (§. 45).}$$

Setzen wir nun die Spannung des Seiles $AE$, $= S$, so erhalten wir:

$$P - S = \left(P + \frac{Gk^2}{a^2}\right)\frac{p}{g},$$

ferner:

$$S - (Q_2 + G_1) = (Q + G_1)\frac{q}{g},$$

da nach §. 281 angenommen werden kann, daß $S$ in dem Schwerpunkte $D$ von $EG$ angreift, und endlich:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{q_1}{g},$$

da auch anzunehmen ist, daß der Schwerpunkt $D$ festgehalten und die Rolle durch $S$ in Umdrehung gesetzt wird.

Die letzten drei Formeln geben die Accelerationen:

$$p = \frac{P - S}{P + \frac{Gk^2}{a^2}} g, \quad q = \left(\frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1}\right) g \text{ und } q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g;$$

und alle drei in die Gleichung $q_1 = p - q$ eingesetzt, erhält man:

$$\frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g = \frac{P - S}{P + \frac{Gk^2}{a^2}} g - \frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1} g,$$

woraus nun die Seilspannung

$$S = \frac{2 P a^2 + G k^2}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)(P a^2 + G k^2) + a^2}$$

folgt. Aus dem Werthe für $S$ ergeben sich nun auch durch Anwendung obiger Formeln die Beschleunigungen der Gewichte $P$ und $Q$.

Vernachlässigen wir die Masse $G$ der festen Rolle, und setzen wir auch $Q =$ Null, so erhalten wir einfach:

$$S = \frac{2 P a^2 . G_1 k_1^2}{P(a_1^2 + k_1^2) a^2 + G a^2 k_1^2} = \frac{2 P G_1 k_1^2}{G_1 k_1^2 + P(a_1^2 + k_1^2)}.$$

Ist das Seilende $AE$, statt daß es über die Rolle $AB$ weggeht, fest, so hat man die Beschleunigung $p = 0$, daher $q_1 = -q$ und folglich die Spannung:

Digitized by Google

$$S = \frac{(Q + G_1)\, G_1 k_1^2}{(Q + G_1)\, a_1^2 + G_1 k_1^2};$$

für $Q =$ Null:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2 + k_1^2}.$$

Ist der rollende Körper $G_1$ ein massiver Cylinder, so hat man:

$$\frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} = {}^1/_2\, G_1,$$

und es ergiebt sich die Spannung für den ersten Fall:

$$S = \frac{2\, P\, G_1}{3\, P + G_1},$$

und für den zweiten:

$$S = \frac{G_1}{3}.$$

Soll im ersten Falle das Gewicht $P$ steigen, so hat man $p$ negativ, also $S > P$, d. i.:

$$2\, P\, G_1 k_1^2 > P\, G_1 k_1^2 + P^2 (a_1^2 + k_1^2),$$

einfach:

$$\frac{G_1}{P} > 1 + \frac{a_1^2}{k_1^2};$$

damit ferner $G_1$ sinke, ist nöthig, daß $S < G_1$, also

$$\frac{G_1}{P} > 1 - \frac{a_1^2}{k_1^2} \text{ sei.}$$

Beispiel. Wenn bei der Rollenverbindung des Beispieles zu §. 298, Fig. 494, das Seil $GH$ plötzlich reißt, so wird wenigstens anfänglich das Seil $BE$ gespannt durch die Kraft:

$$S = \frac{2\, P + \frac{G k^2}{a^2}}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)\left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) + 1} = \frac{2 \,.\, 40 + 3}{(1/3 + 1/72)\,(40 + 3) + 1}$$

$$= \frac{83 \,.\, 72}{25 \,.\, 43 + 72} = \frac{5976}{1147} = 5{,}210 \text{ Pfund.}$$

Hierbei ist die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes $P$:

$$p = \left(\frac{P - S}{P + \frac{G k^2}{a^2}}\right) g = \left(\frac{40 - 5{,}210}{40 + 3}\right) . 31{,}25 = \frac{34{,}79}{43} . 31{,}25 = 25{,}283 \text{ Fuß,}$$

ferner die Beschleunigung der sinkenden Rolle:

$$q = \left(\frac{Q + G_1 - S}{Q + G_1}\right) g = \left(\frac{72 - 5{,}210}{72}\right) \cdot 31{,}25 = \frac{66{,}79}{72} \cdot 31{,}25 = 29{,}0 \text{ Fuß,}$$

und die Umdrehungsacceleration dieser Rolle:

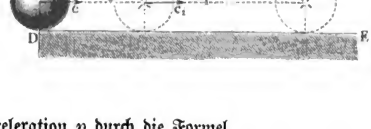
$$q_1 = \frac{S\, a_1^2}{G_1 k_1^2} \cdot g = \frac{5{,}210}{3} \cdot 31{,}25 = 54{,}27 \text{ Fuß.}$$

Digitized by Google

**Fortrollen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene.** §. 300

Wenn ein runder Körper $ABD$, Fig. 496, mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit $c$ auf der horizontalen Bahn $DE$ fortgeschoben wird, so nimmt derselbe in Folge der Reibung auf dieser Bahn eine Drehung mit allmälig wachsender Geschwindigkeit an, deren

Fig. 496.




Acceleration $p$ durch die Formel

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G a^2}{M k^2} = \frac{\varphi a^2}{k^2} g \text{ bestimmt ist,}$$

worin $\varphi$ den Reibungscoefficienten, $G = Mg$ das Gewicht, also $\varphi G$ die Reibung, ferner $Mk^2$ das Trägheitsmoment des Körpers und $a$ den Wälzungshalbmesser $CD$ desselben bezeichnen. Die durch diese Acceleration in der Zeit $t$ erzeugte Umdrehungsgeschwindigkeit im Abstande $CD = a$ von der Axe $C$ ist

$$v = pt = \varphi \frac{a^2}{k^2} g t.$$

Dagegen erleidet die fortschreitende Bewegung des Körpers eine Retardation $q$, welche die Formel

$$q = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G}{M} = \varphi g$$

angiebt, und wonach die Geschwindigkeit dieser Bewegung nach $t$ Secunden

$$v_1 = c - qt = c - \varphi g t \text{ ist.}$$

Setzt man nun $v_1 = v$, also

$$\varphi \frac{a^2}{k^2} g t = c - \varphi g t,$$

so erhält man die Zeit, nach welcher die Geschwindigkeit des Drehens gleich der des Fortschreitens wird, und daher das Wälzen des Körpers eintritt:

$$t = \frac{c}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) \varphi g} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g}.$$

Am Ende dieser Zeit ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$c_1 = \frac{a^2}{k^2} \varphi g t = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2},$$

und der progressive Weg des Körpers:

$$s = \left(\frac{c + c_1}{2}\right) t = \frac{2a^2 + k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g} = \frac{(2a^2 + k^2) k^2}{(a^2 + k^2)^2} \cdot \frac{c^2}{2 \varphi g}.$$

Digitized by Google

Wäre der Coefficient der rollenden Reibung = Null, ſo würde der Körper $AB$ mit der conſtanten Geſchwindigkeit $c_1 = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2}$ auf der horizontalen Ebene ohne Ende fortrollen; da aber dieſer Bewegung noch die wälzende Reibung $\frac{fG}{a}$ entgegenwirkt (ſ. §. 192), ſo wird der Körper nach Zurücklegung eines gewiſſen Weges $s_1$ zur Ruhe kommen. Am Ende dieſes Weges iſt durch die Arbeit $\frac{fGs_1}{a}$ dieſer Reibung das ganze Arbeitsvermögen

$$\frac{Gc_1^2}{2g} + \frac{Gk^2}{a^2} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{a^2 + k^2}{a^2}\right) \frac{Gc_1^2}{2g}$$

der trägen Maſſe des Körpers aufgezehrt, und daher

$$\frac{FGs_1}{a} = \left(\frac{a^2 + k^2}{a^2}\right) \frac{Gc_1^2}{2g}$$

zu ſetzen, wonach der Weg

$$s_1 = \frac{a^2 + k^2}{fa} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \frac{a^3}{f(a^2 + k^2)} \frac{c^2}{2g}$$

in der Zeit

$$t_1 = \frac{2s_1}{c_1} = \frac{a^2 + k^2}{fa} \cdot \frac{c_1}{g} = \frac{ac}{fg}$$

zurückgelegt wird, bis der Körper zur Ruhe kommt.

Für eine rollende Kugel iſt $\frac{k^2}{a^2} = {}^2/_5$, und für einen Cylinder $\frac{k^2}{a^2} = {}^1/_2$; ſ. §. 290.

Im letzteren Falle iſt z. B. $t = {}^1/_3 \frac{c}{\varphi g}$, $c_1 = {}^2/_3 c$, $s = {}^5/_9 \frac{c^2}{2\varphi g}$ und $s_1 = {}^2/_3 \frac{a}{f} \frac{c^2}{2g}$.

---

## Zweites Capitel.

## Die Centrifugalkraft ſtarrer Körper.

§. 301 **Normalkraft.** Die Kraft der Trägheit tritt nicht bloß bei Geſchwindigkeitsveränderungen, ſondern auch bei Richtungsveränderungen eines bewegten Körpers hervor, da ein Körper vermöge ſeiner Trägheit allein

Digitized by Google

nur gleichförmig und in der geraden Linie fortgeht (§. §. 55). Die Beurtheilung der Wirkungen der Trägheit bei stetigen Richtungsveränderungen, namentlich bei der Bewegung der Körper in krummen Linien, und insbesondere im Kreise, ist Gegenstand dieses Capitels.

Bewegt sich ein materieller Punkt in einer krummen Linie, so hat derselbe an jeder Stelle eine von der jedesmaligen Bewegungsrichtung ablenkende Acceleration, die wir in der Phoronomie unter dem Namen Normalacceleration kennen gelernt haben. Ist der Krümmungshalbmesser an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes, $= r$ und die Geschwindigkeit dieses Punktes, $= v$, so hat man für die Normalacceleration:

$$p = \frac{v^2}{r} \text{ (§. 42).}$$

Ist nun die Masse des Punktes $= M$, so entspricht dieser Normalacceleration eine Kraft:

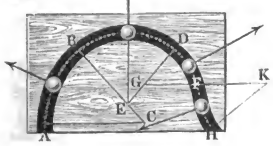
$$P = Mp = \frac{Mv^2}{r},$$

die wir als die erste Ursache, weshalb der Punkt an jeder Stelle seine Bewegungsrichtung ändert, ansehen müssen. Hat der Punkt außer der Normalkraft keine andere (Tangential-) Kraft, so ist die Geschwindigkeit $v$ desselben unveränderlich $= c$, und daher die Normalkraft

$$P = \frac{Mc^2}{r}$$

nur abhängig von der jedesmaligen Krümmung oder von dem Krümmungshalbmesser, und zwar kleiner bei schwacher Krümmung oder großem Krümmungshalbmesser, und größer bei starker Krümmung oder kleinerem Krümmungshalbmesser. Bei doppeltem Krümmungshalbmesser ist z. B. die Normalkraft nur halb so groß als bei einfachem Krümmungshalbmesser. Wird ein materieller Punkt $M$ durch eine horizontale Bahn, Fig. 497, gezwungen, eine krumme Linie $ABDFH$ zu durchlaufen, so behält derselbe, wenn wir die Reibung außer Acht lassen, an allen Stellen einerlei Geschwindigkeit $c$, und übt an jeder Stelle einen der Normalkraft gleichen Druck gegen die concave Seitenwand aus. Während der Durchlaufung des Bogens $AB$ ist dieser Druck $= \frac{Mc^2}{CA}$, während der Durchlaufung von $BD$ ist er $= \frac{Mc^2}{EB}$, für den Bogen $DF$ ist er

Fig. 497.




Digitized by Google

$= \frac{Mc^2}{GD}$ und für den Bogen $FH$ fällt er $= \frac{Mc^2}{KF}$ aus, wenn $CA$, $EB$, $GD$ und $KF$ die Krümmungshalbmesser der Wegtheile $AB$, $BD$, $DF$ und $FH$ sind.

§. 302 **Centripetal- und Centrifugalkraft.** Bewegt sich ein materieller Punkt oder Körper im Kreise, so wirkt die Normalkraft radial einwärts, weshalb sie dann Centripetal- oder Annäherungskraft (franz. force centripède; engl. centripetal force) genannt wird, während die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seiner Trägheit entgegengesetzt, d. i. radial auswärts wirkt, den Namen Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft (franz. force centrifuge; engl. centrifugal force) erhalten hat. Centripetalkraft ist die auf den Körper einwirkende und Centrifugalkraft ist die vom Körper zurückwirkende Gegenkraft. Beide sind an Größe einander gleich und in der Richtung entgegengesetzt (§. 65).

Bei der Umdrehung der Planeten um die Sonne besteht die Centripetalkraft in einer Anziehungskraft der Sonne; wird der bewegte Körper durch eine Führung oder Leitung, ähnlich wie Fig. 497 angiebt, gezwungen, eine Kreisbahn zu durchlaufen, so wirkt die Führung durch ihre Starrheit als Centripetalkraft und der Centrifugalkraft des Körpers entgegen, ist endlich der umlaufende Körper durch einen Faden oder durch eine Stange mit dem Drehungspunkte verbunden, so ist es die Elasticität der Stange, welche sich mit der Centrifugalkraft des Körpers ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch als Centripetalkraft wirkt.

Ist $G$ das Gewicht des in Umdrehung befindlichen Körpers, also dessen Masse $M = \frac{G}{g}$, ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die Umdrehung vor sich geht, $= r$ und die Umdrehungsgeschwindigkeit $= v$, so hat man nach dem letzten Paragraphen, die Centrifugalkraft:

$$P = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Gv^2}{gr} = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{r},$$

also auch:

$$P : G = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} : r,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Umdrehungshalbmesser.

Ist die Bewegung gleichförmig, welches allemal eintritt, wenn außer der Centripetalkraft keine andere Kraft (Tangentialkraft) auf den Körper wirkt, so läßt sich die Geschwindigkeit $v = c$ durch die Umdrehungszeit $t$ ausdrücken, indem man setzt:

Digitized by Google

$$c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi r}{t},$$

und man erhält hiernach für die Centrifugalkraft:

$$P = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{t^2} \cdot Mr = \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot Gr.$$

Da $4\pi^2 = 39{,}4784$ und für Fußmaß $\frac{1}{g} = 0{,}032$ ist, so hat man für die Rechnungen bequemer:

$$P = \frac{39{,}4784}{t^2} \cdot Mr = 1{,}2633 \cdot \frac{Gr}{t^2} \text{ Pfund.}$$

Oft giebt man die Zahl $u$ der Umdrehungen in der Minute, und ersetzt deshalb $t$ durch $\frac{60''}{u}$, weshalb folgt:

$$P = \frac{39{,}4784}{3600} u^2 Mr = 0{,}010966\ u^2 Mr = 0{,}0003509\ u^2 Gr \text{ Pfund.}$$

Auch ist $P = 4{,}0243 \frac{Gr}{t^2} = 0{,}001118\, u^2 Gr$ Kilogramm.

Da $\frac{2\pi}{t}$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ ist, so läßt sich auch setzen:

$$P = \omega^2 . Mr.$$

Hiernach folgt, daß bei gleichen Umdrehungszeiten oder bei gleich viel Umdrehungen in einer gewissen Zeit, und also auch bei gleichen Winkelgeschwindigkeiten, die Centrifugalkraft wie das Product aus Masse und Drehungshalbmesser wächst, und daß sie unter übrigens gleichen Umständen den Quadraten der Umdrehungszeiten umgekehrt, oder den Quadraten der Umlaufszahlen und also auch den Quadraten der Winkelgeschwindigkeiten direct proportional ist.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper von 50 Pfund Gewicht einen Kreis von 3 Fuß Halbmesser in der Minute 400 mal durchläuft, so ist seine Centrifugalkraft: $P = 0{,}0003509 . 400^2 . 50 . 3 = 3{,}509 . 16 . 50 . 3 = 350{,}9 . 24 = 8422$ Pfd.

Ist dieser Körper durch ein Hanfseil mit der Are verbunden, und der Festigkeitsmodul für Hanfseile (§. 212) 7000 Pfund, so folgt:

$$8422 = 7000 . F,$$

daher der Querschnitt dieses Seiles:

$$F = \frac{8422}{7000} = 1{,}203 \text{ Quadratzoll,}$$

und der Durchmesser desselben:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 0{,}5642 . \sqrt{4{,}812} = 0{,}5642 . 2{,}193 = 1{,}24 \text{ oder } 1\tfrac{1}{4} \text{ Zoll.}$$

Bei dreifacher Sicherheit ist aber

$$d = 1{,}24 . \sqrt{3} = 1{,}24 . 1{,}732 = 2{,}15 \text{ Zoll}$$

zu nehmen.

Digitized by Google

2) Aus dem Erdhalbmesser $r = 20^1/_4$ Million Fuß und der Umdrehungszeit oder Tageslänge $t = 24$ St. $= 24 \,.\, 60 \,.\, 60 = 86400$ Sec. folgt die Centrifugalkraft eines Körpers unter dem Aequator der Erde:

$$P = 1{,}2633 \,.\, \frac{20'250000\, G}{86400^2} = \frac{2558}{864^2} \cdot G = \frac{1}{290} \cdot G,$$

wäre aber die Tageslänge 17 mal so klein, also $\frac{24}{17} = 1$ St. 24′ 42″, so würde diese Kraft $17^2 = 289$ mal so groß, also ungefähr dem Gewichte $G$ des Körpers gleich sein. Unter dem Aequator wäre dann die Centrifugalkraft der Schwerkraft gleich und Körper daselbst würden ebenso wenig niederfallen als in die Höhe steigen.

3) Bei der Umdrehung des Mondes um die Erde wird die Centrifugalkraft desselben von der Anziehungskraft der Erde aufgehoben. Ist $G$ das Gewicht des Mondes, $r$ seine Entfernung von der Erde und $t$ seine Umdrehungszeit um dieselbe, so folgt die Centrifugalkraft dieses Weltkörpers

$$= 1{,}2633 \,.\, \frac{Gr}{t^2}.$$

Ist $a$ der Erdhalbmesser und nimmt man an, daß die Schwerkraft in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt wie die $n$te Potenz dieser Entfernungen wachse, so hat man die Schwere des Mondes oder die Anziehungskraft der Erde

$$= G\left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

und setzen wir beide Kräfte einander gleich, so erhalten wir:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1{,}2633 \cdot \frac{r}{t^2}.$$

Nun ist $\frac{a}{r} = \frac{1}{60}$, $r = 1215$ Millionen Fuß und $t = 27$ Tage 7 St. 42 Min. $= 39342$ Min. $= 39342 \,.\, 60$ Sec., es folgt daher:

$$\left(\frac{1}{60}\right)^n = \frac{1{,}2633 \,.\, 1215}{393{,}4^2 \,.\, 36} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2,$$

und es ist hiernach $n = 2$, d. h. die Schwerkraft der Erde steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde.

§. 303 **Arbeit der Centrifugalkraft.** Ist die Bahn $CAB$, Fig. 498, in welcher sich ein Körper $M$ bewegt, selbst nicht in Ruhe, sondern dreht sich dieselbe um eine Axe $C$, so theilt sie dem Körper eine Centrifugalkraft $P$ mit, vermöge welcher er entweder eine gewisse mechanische Arbeit verrichtet, oder eine solche in Anspruch nimmt, je nachdem er sich bei seiner Bewegung in der Bahn von der Drehungsaxe $C$ entfernt, oder sich derselben nähert. Ist $M$ die Masse des Körpers, $\omega$ die constante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Bahn, z. B. ein Kreisel (franz. sabot; engl. top), um ihre

Fig. 498.

Digitized by Google

Axe $C$ dreht, und bezeichnet $z$ die veränderliche Entfernung $CM$ des in der Bahn $CAB$ laufenden Körpers, so hat man die veränderliche Centrifugalkraft desselben:

$$P = \omega^2 M z,$$

und es ist folglich die Arbeit dieser Kraft, während der Körper ein Wegtheilchen $MO$ durchläuft, und der Halbmesser $CM$ um $NO = \xi$ wächst:

$$P\xi = \omega^2 M z . \xi.$$

Denken wir uns nun den Halbmesser $z$ aus $n$ Theilchen, jeden $= \xi$, bestehend, setzen wir also $z = n\xi$, und nehmen wir an, daß der Körper seinen Weg im Drehungspunkte $C$ beginnt, so erhalten wir die Arbeit der Centrifugalkraft des Körpers beim Durchlaufen des Weges $CAM$, wobei die Entfernung des Körpers allmälig von 0 bis $z$ wächst, indem wir in dem letzten Ausdrucke statt $z$ nach und nach die Werthe $\xi$, $2\xi$, $3\xi$, $\ldots n\xi$ einsetzen und die so erhaltenen Werthe addiren:

$A = \omega^2 M\xi(\xi + 2\xi + 3\xi + \cdots + n\xi) = \omega^2 M\xi^2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$,

oder da $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ bei einer großen Anzahl von Gliedern $\frac{n^2}{2}$ zu setzen ist:

$$A = \omega^2 M\xi^2 \frac{n^2}{2} = {}^1/_2\,\omega^2 M z^2.$$

Da die Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels im Abstande $CM = z$ von der Umdrehungsaxe:

$$v = \omega z$$

ist, so läßt sich folglich einfacher

$$A = {}^1/_2\,M v^2 = \frac{v^2}{2g} G$$

setzen, wenn man noch statt der Masse $M$ das Gewicht $G = Mg$ des Körpers einführt.

Wenn der Körper seine Bewegung nicht in $C$, sondern in irgend einem anderen Punkte $A$ außerhalb der Umdrehungsaxe beginnt, dessen Entfernung von $C$, $CA = z_1$, und Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v_1 = \omega z_1$$

ist, so fällt natürlich die Arbeit ${}^1/_2\,\omega^2 M z_1^2$ beim Durchlaufen des Weges $CA$ ganz aus, und es ist daher die entsprechende Arbeit der Centrifugalkraft, während der Körper von $A$ nach $M$ läuft:

$$A = {}^1/_2\,\omega^2 M z^2 - {}^1/_2\,\omega^2 M z_1^2 = {}^1/_2\,\omega^2 M(z^2 - z_1^2)$$
$$= {}^1/_2\,M(v^2 - v_1^2) = \frac{(v^2 - v_1^2)}{2g} G.$$

Wenn sich also ein Körper in einer starren Bahn oder Rinne bewegt, welche sich um eine feste Axe dreht, so nimmt das Arbeitsvermögen dieses Körpers um das Product aus der Masse ($M$) desselben und aus der Diffe-

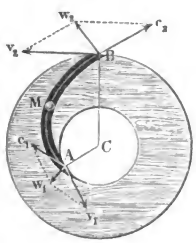


Digitized by Google

renz der Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g}\right.$ und $\left.\frac{v_1^2}{2g}\right)$, welche den Umdrehungsgeschwindigkeiten der Endpunkte $A$ und $M$ des Weges zukommen, zu oder ab, und zwar ersteres bei einer Bewegung von innen nach außen, und letzteres bei einer Bewegung von außen nach innen.

§. 304. Wenn der Körper $M$ seinen Weg $AMB$ auf einem Kreisel $ABC$, Fig. 499, in $A$ mit der relativen Geschwindigkeit $c_1$ beginnt, und den Kreisel in $B$ mit der relativen Geschwindigkeit $c_2$ verläßt, und wenn die Umdrehungsgeschwindigkeiten des Kreisels in $A$ und $B$, $v_1$ und $v_2$ sind, so ist unter der Voraussetzung, daß außer der Centrifugalkraft keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, der Gewinn des Arbeitsvermögens desselben beim Durchlaufen des Weges $AMB$:

Fig. 499.




$$A = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} G = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} G,$$

daher:

$$c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2, \text{ oder}$$

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2,$$

folglich die relative Austrittsgeschwindigkeit selbst:

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{c_1^2 + \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)},$$

wobei $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels, sowie $r_1$ und $r_2$ die Entfernungen $CA$ und $CB$ des Eintritts- und des Austrittspunktes ($A$ und $B$) von der Drehungsaxe $C$ bezeichnen.

Ebenso bestimmt sich die relative Austrittsgeschwindigkeit $c_1$, wenn der Körper bei $B$ mit der relativen Geschwindigkeit $c_2$ den Kreisel erreicht und sich auf demselben von außen nach innen bewegt; es ist nämlich:

$$c_1 = \sqrt{c_2^2 - (v_2^2 - v_1^2)} = \sqrt{c_2^2 - \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Da der Körper beim Durchlaufen des Weges $AMB$ außer seiner relativen Geschwindigkeit ($c$) in der Bahn auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit ($v$) der letzteren hat, so ist er bei $A$ mit einer absoluten Geschwindigkeit $\overline{A w_1} = w_1$ einzuführen, welche sowohl der Größe als auch der Richtung nach durch die Diagonale des aus $c_1$ und $v_1$ construirten Parallelogramms bestimmt wird, und es ergiebt sich ebenso die absolute Austrittsgeschwindigkeit $\overline{B w_2} = w_2$ des Körpers bei $B$ durch die Diagonale des aus den relativen Geschwindigkeiten $c_2$ und $v_2$ construirten Parallelogramms $B c_2 w_2 v_2$.

Das Arbeitsquantum, welches der Körper bei Durchlaufung des Krei-

Digitized by Google

fels in der Bahn $AMB$ gewonnen oder verloren und folglich der Kreisel verloren oder gewonnen hat, ist

$$A = \pm \left(\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right) G.$$

Soll der Körper beim Durchlaufen des Kreisels in der Richtung $AMB$ sein ganzes Arbeitsvermögen $\frac{w_1^2}{2g} G$ dem Kreisel mittheilen, so muß die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w_2 =$ Null, und deshalb nicht allein $c_2 = v_2$, sondern auch die Richtung von $c_2$ der von $v_2$ genau entgegengesetzt sein, und deshalb die Bahn bei $B$ tangential am Umfange des Kreisels auslaufen.

Beispiel. Wenn der in Fig. 499 abgebildete Kreisel den inneren Halbmesser $CA = r_1 = 1$ Fuß und den äußeren Halbmesser $CB = r_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß hat, und sich pr. Minute 100 mal umdreht, so ist seine Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\pi u}{30} = 3{,}1416 \cdot \frac{10}{3} = 10{,}472 \text{ Fuß},$$

und folglich auch seine innere Umfangsgeschwindigkeit:

$$v_1 = \omega r_1 = 10{,}472 \text{ Fuß, dagegen aber seine äußere:}$$
$$v_2 = \omega r_2 = 10{,}472 \,.\, 1{,}5 = 15{,}708 \text{ Fuß.}$$

Läßt man nun in denselben bei $A$ einen Körper mit $w_1 = 25$ Fuß so eintreten, daß der Winkel $w_1 A v_1$, welchen seine absolute Bewegung mit der Umdrehungsrichtung einschließt, $\alpha = 30$ Grad ist, so hat man für die relative Geschwindigkeit $c_1$, mit welcher der Körper die Bewegung im Kreisel beginnt:

$$c_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2 v_1 w_1 \cos. \alpha = 109{,}66 - 453{,}45 + 625{,}00 = 281{,}21,$$

und daher:

$$c_1 = 16{,}77 \text{ Fuß.}$$

Ferner ist für den Winkel $v_1 A c_1 = \beta$, unter welchem sich die Bahn bei $A$ an den inneren Kreiselumfang anschließen muß, damit der Körper ohne Stöße in dieselbe einlaufe:

$$\frac{\sin. \beta}{\sin. \alpha} = \frac{w_1}{c_1}, \text{ also:}$$
$$\sin. \beta = \frac{25 \sin. 30^0}{16{,}77},$$

wonach $\beta = 48^0, 12' \frac{1}{2}$ folgt.

Für die relative Austrittsgeschwindigkeit $c_2$ ist

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2 = 281{,}21 + 109{,}66\ [(3/2)^2 - 1^2] = 418{,}28,$$

folglich:

$$c_2 = 20{,}45 \text{ Fuß;}$$

dagegen für die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w_2$, wenn der Canal oder die Rinne $AMB$ den äußeren Umfang unter einem Winkel $\delta$ von 20 Grad schneidet, also $v_2 B c_2 = 160^0$ ist:

$$w_2^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2 c_2 v_2 \cos. \delta = 418{,}28 + 246{,}74 - 603{,}72 = 61{,}30,$$

folglich:

$$w_2 = 7{,}80 \text{ Fuß.}$$

Endlich ergiebt sich aus den Geschwindigkeitshöhen:

$$\frac{w_1^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 625 = 10 \text{ und } \frac{w_2^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 61{,}31 = 0{,}981 \text{ Fuß,}$$



Digitized by Google

das Arbeitsquantum, welches der Körper vom Gewichte $G$ beim Durchlaufen des Kreisels diesem mittheilt:

$$A = \left(\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}\right) G = (10 - 0{,}981)\, G = 9{,}019\, G,$$

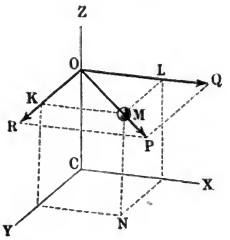
z. B. wenn dieser Körper das Gewicht $G = 10$ Pfund hat:

$$A = 9{,}019 \,.\, 10 = 90{,}19 \text{ Fußpfund.}$$

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der Bewegung eines Körpers in einem Kreisel findet ihre Anwendung bei den Turbinen oder Kreiselrädern.

§. 305 **Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.** Auf einen Inbegriff von Massen oder auf eine Masse von endlicher Ausdehnung ist die oben gefundene Formel für die Centrifugalkraft nicht unmittelbar anwendbar, weil man im Voraus nicht weiß, welcher Drehungshalbmesser $r$ in die Rechnung einzuführen ist. Um diesen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Es sei in Fig. 500, $CZ$ die Umdrehungsaxe, und $CX$ und $CY$ seien zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen; es sei ferner $M$ ein Massentheil, und $MK = x$, $ML = y$ und $MN = z$ seien dessen Abstände von den Coordinatenebenen $YZ$, $XZ$ und $XY$. Da die Centrifugalkraft $P$ radial wirkt, so läßt sich ihr Angriffspunkt nach dem Durchschnittspunkte $O$ mit der Drehungsaxe verlegen. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Axenrichtungen $CX$ und $CY$, so erhalten wir die Seitenkräfte $\overline{OQ} = Q$ und $\overline{OR} = R$, für welche gilt:

Fig. 500.




$$OQ : OP = OL : OM \text{ und } OR : OP = OK : OM,$$

weshalb nun

$$Q = \frac{x}{r} P \text{ und } R = \frac{y}{r} P$$

folgt, wobei $r$ die Entfernung $OM$ des Massentheilchens von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Gehen wir auf gleiche Weise mit allen Massentheilchen zu Werke, so erhalten wir zwei Systeme von Parallelkräften, eines in der Ebene $XZ$ und das andere in der Ebene $YZ$, jedes aber auf die Axe $CZ$ winkelrecht wirkend. Bedienen wir uns zur Unterscheidung der Indexzahlen 1, 2, 3 u. s. w., setzen wir also die Massentheile $M_1$, $M_2$, $M_3$, und ihre Abstände $x_1$, $x_2$, $x_3$ u. s. w., so bekommen wir hiernach die Mittelkraft des einen Systemes Fig. 501:

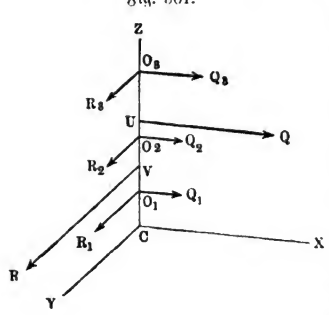
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = \frac{P_1 x_1}{r_1} + \frac{P_2 x_2}{r_2} + \frac{P_3 x_3}{r_3} + \cdots$$
$$= \omega^2 . (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$

Digitized by Google

und die des anderen:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 . (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots).$$

Fig. 501.




Setzen wir endlich die Abstände $CO_1$, $CO_2$ u. s. w. der Massentheile von der Ebene $XY$, $= z_1, z_2$ u. s. w., so erhalten wir für die Angriffspunkte $U$ und $V$ dieser Mittelkräfte die Abstände $CU = u$ und $CV = v$ durch die Gleichungen

$$(Q_1 + Q_2 + \cdots)\, u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots$$

und $(R + R_2 + \cdots)\, v = R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots$, weshalb folgt:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots}.$$

Es werden also hiernach im Allgemeinen die Centrifugalkräfte eines Massensystemes oder eines ausgedehnten Körpers auf zwei Kräfte zurückgeführt, die sich, so lange $u$ und $v$ ungleich sind, nicht zu einer einzigen vereinigen lassen.

Beispiel. Sind die Massen eines Systemes:

$M_1 = 10$ Pfd., $M_2 = 15$ Pfd., $M_3 = 18$ Pfd., $M_4 = 12$ Pfd.

und ihre Abstände:

$x_1 = 0$ Zoll, $x_2 = 4$ Zoll, $x_3 = 2$ Zoll, $x_4 = 6$ Zoll,
$y_1 = 3$ „ $y_2 = 1$ „ $y_3 = 5$ „ $y_4 = 3$ „
$z_1 = 2$ „ $z_2 = 3$ „ $z_3 = 3$ „ $z_4 = 0$ „

so hat man folgende mittleren Centrifugalkräfte:

$$Q = \omega^2 . (10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6) = 168 . \omega^2 \text{ und}$$
$$R = \omega^2 . (10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3) = 171 . \omega^2,$$

und hiernach die Abstände ihrer Angriffspunkte von dem Anfangspunkte $C$:

$$u = \frac{10.0.2 + 15.4.3 + 18.2.3 + 12.6.0}{10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6} = \frac{288}{168} = \frac{12}{7} = 1{,}714 \text{ Zoll},$$

und

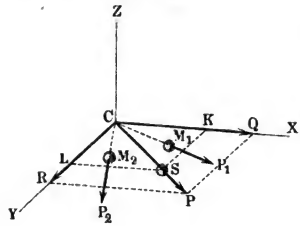
$$v = \frac{10.3.2 + 15.1.3 + 18.5.3 + 12.3.0}{10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3} = \frac{375}{171} = \frac{125}{57} = 2{,}193 \text{ Zoll}.$$

Die Verschiedenheit dieser Werthe von $u$ und $v$ zeigt an, daß die Centrifugalkräfte durch eine einzige Kraft nicht ersetzt werden können.

Digitized by Google

§. 306 Befinden sich die Massentheile in einer Umdrehungsebene, d. i. in einer Ebene $XCY$, Fig. 502, welche winkelrecht auf der Umdrehungsaxe steht, wie $M_1, M_2 \ldots$, so lassen sich ihre Centrifugalkräfte in eine einzige vereinigen, weil sich ihre Richtungen in einem einzigen Punkte $C$ der Axe $CZ$ schneiden. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, so erhalten wir die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle:

Fig. 502.




$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{[(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)^2]}.$$

Sind nun $CK = x$ und $CL = y$ die Coordinaten des Schwerpunktes vom Massensysteme $M = M_1 + M_2 + \cdots$, so hat man:

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = Mx \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = My,$$

und es folgt daher die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 Mr,$$

wofern noch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, den Abstand $CS$ des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe $CZ$ bezeichnet.

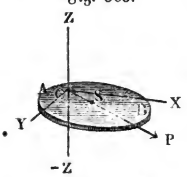
Für den Winkel $PCX = \alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe $CX$ einschließt, ist

$$tang.\, \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x};$$

es geht daher die Richtung der Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt des Systemes und es ist dieselbe genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massentheile im Schwerpunkte vereinigt wären.

Für eine auf der Umdrehungsaxe $Z\overline{Z}$ rechtwinkelig stehende Scheibe $AB$, Fig. 503, ist hiernach die Centrifugalkraft ebenfalls $= \omega^2 Mr$, wenn $M$ ihre Masse und $r$ die Entfernung $CS$ ihres Schwerpunktes $S$ von der Axe bezeichnet.

Fig. 503.




Liegen ebenso die Schwerpunkte der Massentheile eines Körpers in der Umdrehungsebene, oder ist diese Ebene Symmetrieebene des Körpers $ADFF_1$, Fig. 504, so lassen sich die Centrifugalkräfte der Massentheile des Körpers zu einer einzigen, im Schwerpunkte desselben an-

Digitized by Google

greifenden Mittelkraft vereinigen, welche dem Abstande $S$ dieses Punktes von der Umdrehungsaxe entspricht und sich daher durch die Formel $P = \omega^2 P r$ bestimmen läßt.

Fig. 504.

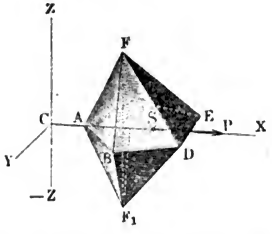
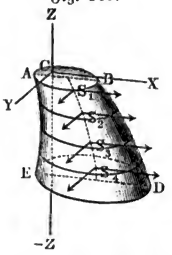



Fig. 505.




Um die Centrifugalkraft eines anderen Körpers $ABDE$, Fig. 505, zu finden, zerlegen wir denselben durch Ebenen winkelrecht zur Axe $ZZ$ in scheibenförmige Elemente, ermitteln die Schwerpunkte $S_1$, $S_2$ u. s. w. derselben, bestimmen mit Hülfe der letzteren die Centrifugalkräfte, zerlegen jede derselben nach den Axenrichtungen $CX$ und $CY$ in Seitenkräfte, und vereinigen die Seitenkräfte in der Ebene $ZCX$ zu einer Mittelkraft $Q$, sowie die in der Ebene $ZCY$ zu einer Mittelkraft $R$.

Befinden sich die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben in einer Parallellinie zur Umdrehungsaxe, so ist $x = x_1 = x_2$ u. s. w., sowie $y = y_1 = y_2$ u. s. w., und daher auch $r = r_1 = r_2$ u. s. w.; es folgt daher die Centrifugalkraft des ganzen Körpers:

$$P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \cdots) = \omega^2 M r,$$

und der Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene $XY$:

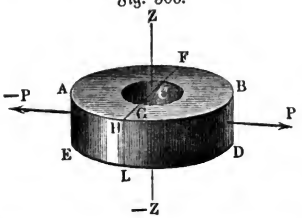
$$z = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots) r}{(M_1 + M_2 + \cdots) r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots} = z.$$

Diesen Gleichungen zufolge ist die Centrifugalkraft eines Körpers, welcher sich in Elemente zerlegen läßt, deren Schwerpunkte in einer mit der Umdrehungsaxe parallel laufenden Linie liegen, gleich der Centrifugalkraft der in dem Schwerpunkte dieses Körpers vereinigten Masse desselben, und es fällt auch der Angriffspunkt dieser Kraft mit diesem Schwerpunkte zusammen. Hiernach lassen sich die Centrifugalkräfte aller *symmetrischen Körper* (§. 106), deren Symmetrieaxe der Umdrehungsaxe parallel läuft, und also auch die aller *Rotationskörper*, deren geometrische Axen mit der Umdrehungsaxe parallel sind, finden. Fällt die geometrische Axe eines solchen Körpers mit der Umdrehungsaxe zusammen, so ist die resultirende Centrifugalkraft sogar Null.

Digitized by Google

**Beispiel.** Es sind die Dimensionen, die Dichtigkeit und Festigkeit eines Mühlsteines $ABDE$, Fig. 506, gegeben, man soll die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ finden, bei welcher das Zerreißen desselben in Folge der Centrifugalkraft eintritt. Setzen wir den Halbmesser $CF$ des Mühlsteines $= r_1$, den Halbmesser $CG$ seines Auges $= r_2$, die Höhe $AE = HL = l$, die Dichtigkeit $= \gamma$ und den Festigkeitsmodul $= K$, so erhalten wir die Kraft zum Zerreißen desselben in einer diametralen Ebene,

Fig. 506.




$$P = 2\,(r_1 - r_2)\,lK,$$

das Gewicht des Steines:

$$G = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,l\gamma,$$

und den Umdrehungshalbmesser für jede Hälfte des Steines, d. i. die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe (§. 114):

$$r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Im Augenblicke des Zerreißens ist die Centrifugalkraft von einer Hälfte des Steines der Festigkeit gleich, wir bekommen daher die Bestimmungsgleichung:

$$\omega^2 \cdot {}^1/_2 \frac{Gr}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\,lK,$$

d. i.:

$$\omega^2 \cdot {}^2/_3\,(r_1^3 - r_2^3)\,\frac{l\gamma}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\,lK,$$

und $2l$ zu beiden Seiten aufgehoben, folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\,(r_1 - r_2)\,K}{(r_1^3 - r_2^3)\,\gamma}} = \sqrt{\frac{3gK}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\,\gamma}}.$$

Ist $r_1 = 2$ Fuß $= 24$ Zoll, $r_2 = 4$ Zoll, $K = 750$ Pfund und das specifische Gewicht der Mühlsteinmasse, $= 2{,}5$, also das Gewicht eines Cubikzolles Masse desselben, $\gamma = \frac{61{,}74 \,.\, 2{,}5}{1728} = 0{,}08934$ Pfd., so folgt die Winkelgeschwindigkeit beim Eintreten des Zerreißens:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \,.\, 12 \,.\, 31{,}25 \,.\, 750}{688 \,.\, 0{,}08934}} = \sqrt{\frac{210937}{15{,}367}} = 117{,}2 \text{ Zoll}.$$

Ist die Zahl der Umdrehungen in einer Minute $= u$, so hat man $\omega = \frac{2\pi u}{60}$, daher umgekehrt $u = \frac{30\,\omega}{\pi}$, hier aber $= \frac{30 \,.\, 117{,}2}{\pi} = 1119$. Die gewöhnliche Umdrehungszahl eines solchen Mühlsteines ist nur 120, also 9mal so klein.

Für ein Schwungrad läßt sich $r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = 3r^2$ setzen, wenn $r$ den mittleren Halbmesser seines Ringes bezeichnet. Daher ist hier

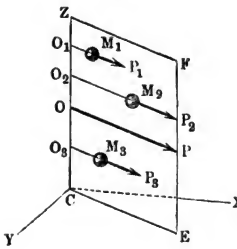
$$\omega = \sqrt{\frac{gK}{r^2\gamma}} \quad \text{oder} \quad v = \omega r = \sqrt{\frac{gK}{\gamma}}.$$

**§. 307** Befinden sich die sämmtlichen Theile $M_1$, $M_2$ eines Massensystemes, Fig. 507, oder die Schwerpunkte der Elemente eines Körpers in

Digitized by Google

einer durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften und es lassen sich daher dieselben in der Regel auf eine einzige Kraft zurückführen. Sind die Entfernungen der Massentheile oder Elemente von der Umdrehungsaxe $Z\overline{Z}$:

Fig. 507.




$O_1 M_1 = r_1$, $O_2 M_2 = r_2$ u. s. w.,

so erhält man für ihre Centrifugalkräfte:

$$P_1 = \omega^2 M_1 r_1, \quad P_2 = \omega^2 M_2 r_2$$

u. s. w., und daher die mittlere Centrifugalkraft:

$$P_1 = \omega^2 (M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots) = \omega^2 M r,$$

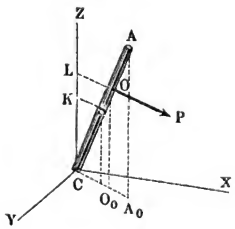
wofern $r$ den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse $M$ von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Es ist also auch hier der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe als Drehungshalbmesser anzusehen. Um aber den Angriffspunkt $O$ der resultirenden Centrifugalkraft $P$ zu finden, setzen wir die Abstände der Massentheile von der Normalebene: $C O_1 = z_1$, $C O_2 = z_2$ u. s. w. in die Formel:

$$C O = z = \frac{M_1 r_1 z_1 + M_2 r_2 z_2 + \cdots}{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots}.$$

Mit Hülfe der Formel $P = \omega^2 M r$ lassen sich die Centrifugalkräfte von Rotationskörpern und von anderen Körpern der Geometrie finden, wenn die Axen dieser Körper mit der Umdrehungsaxe in eine Ebene fallen.

Für eine Stange $A B$, Fig. 508, deren Länge $A C = l$ und Neigungswinkel $A C Z$ gegen die Umdrehungsaxe $C Z$, $= \alpha$ ist, hat man:

Fig. 508.




$$r = \overline{K S} = {}^1/_2 l \sin. \alpha,$$

und folglich die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 . {}^1/_2 M l \sin. \alpha;$$

um aber den Angriffspunkt $O$ dieser Kraft zu finden, setzen wir in dem Ausdrucke

$$\omega^2 . \frac{M}{n} x \sin. \alpha . x \cos. \alpha$$

$$= \omega^2 . \frac{M}{n} x^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$$

für das Moment vom Elemente $\frac{M}{n}$ der

Digitized by Google

Stange, statt $x$ nach und nach $\frac{l}{n}$, $\frac{2l}{n}$, $\frac{3l}{n}$ u. s. w. und vereinigen die Ergebnisse durch Addition. Auf diese Weise ergiebt sich das Moment der ganzen Stange:

$$Pu = \omega^2 \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha \frac{l^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= {}^1/_3\, \omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha,$$

daher der Hebelarm $CL = O_0 O$, oder:

$$u = {}^1/_3\, \omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha : {}^1/_2\, \omega^2 M l \sin.\alpha = {}^2/_3\, l \cos.\alpha,$$

und die Entfernung des Angriffspunktes $O$ von dem in der Axe liegenden Stangenende $C$:

$$CO = {}^2/_3\, l.$$

Reicht die Stange $AB$, Fig. 509, nicht bis zur Axe, so hat man:

$$P = {}^1/_2\, \omega^2 F l_1^2 \sin.\alpha - {}^1/_2\, \omega^2 F l_2^2 \sin.\alpha$$
$$= {}^1/_2\, \omega^2 F \sin.\alpha\, (l_1^2 - l_2^2),$$

und das Moment:

$$Pu = {}^1/_3\, \omega^2 F \sin.\alpha \cos.\alpha\, (l_1^3 - l_2^3),$$

weil die Masse von $CA$ (= Querschnitt mal Länge) $= Fl_1$ und die Masse von $CB$, $= Fl_2$ ist. Es folgt daher die Entfernung des Angriffspunktes $O$ vom Durchschnitte $C$ mit der Axe:

$$CO = {}^2/_3 \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}, \text{ oder } CO = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12\, l},$$

wenn $l$ die Entfernung $CS$ des Schwerpunktes und $l_1 - l_2$ die Länge der Stange $AB$ ausdrückt.

Z Fig. 509.

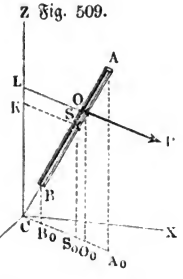
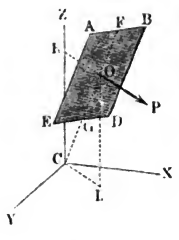



Fig. 510.




Diese Formel gilt auch für ein rectanguläres Blatt $ABDE$, Fig. 510, welches sich durch die Axenebene $COZ$ in zwei congruente Rechtecke theilen läßt und dessen Ebene rechtwinkelig gegen diese Axenebene steht, weil die Centrifugalkraft von jedem der Elemente, welche sich durch Schnitte normal

Digitized by Google

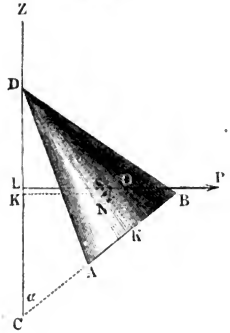
zu $CZ$ ergeben, in der Mittellinie $FG$ angreift. Sind also die Entfernungen $CF$ und $CG$ der beiden Grundlinien $AB$ und $DE$ von dem Axenpunkte $C$, $l_1$ und $l_2$, so hat man auch hier

$$CO = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12\,l}.$$

Ebenso ergiebt sich die Centrifugalkraft eines geraden Kreiskegels $ABD$, Fig. 511, welcher sich um eine durch die Spitze $D$ desselben gehende Axe $CZ$ dreht, wenn man in der Formel $P = \omega^2 Mr$, statt $r$ den Abstand $KS$ des Schwerpunktes $S$ dieses Körpers von $CZ$ einsetzt. Bezeichnet $h$ die Höhe $KD$ des Kegels und $\alpha$ den Winkel $BCZ$, um welchen die Basis $AB$ desselben von der Umdrehungsaxe abweicht, so hat man $KS = \overline{DS}\cos. DSK = {}^3/_4\, h \cos. \alpha$, und daher die gesuchte Centrifugalkraft

$$P = \omega^2 M. {}^3/_4\, h \cos. \alpha.$$

Fig. 511.




Der Angriffspunkt $O$ dieser Kraft ist durch die Coordinaten $DL = u$ und $LO = v$ bestimmt, für welche die höhere Analysis unter der Voraussetzung, daß die Umdrehungsaxe $CZ$ nicht durch die Kegelmasse hindurchgeht, folgende Ausdrücke findet:

$$u = {}^4/_5\, h \sin. \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{2\,h}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$v = {}^4/_5\, h \cos. \alpha \left[1 + \left(\frac{r\, tang.\, \alpha}{2\,h}\right)^2\right]$$

findet, worin $r$ den Halbmesser $KA = KB$ der Basis bezeichnet.

In dem Falle, wenn die Körpertheile weder in einer Normalebene zur Umdrehungsaxe, noch in einer Ebene durch die Umdrehungsaxe enthalten sind, lassen sich die resultirenden Centrifugalkräfte §. 308

$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$ und $R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$

nicht in eine einzige Kraft verwandeln, wohl aber ist es möglich, diese Kräfte durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 Mr$$

und durch ein aus $Q$ und $R$ zusammengesetztes Kräftepaar zu ersetzen. Bringen wir nämlich im Schwerpunkte $S$ vier sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $+ Q$ und $- Q$, sowie $+ R$ und $- R$ an, so geben die positiven Theile die Mittelkraft

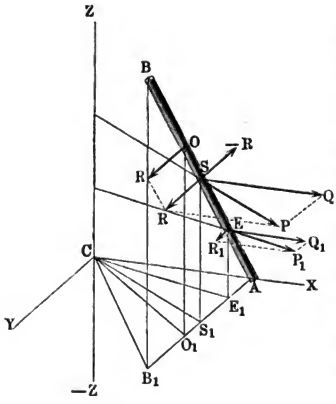
Digitized by Google

$$P = \omega^2 \sqrt{Q^2 + R^2},$$

wogegen die negativen Theile $-Q$ und $-R$ mit den in $U$ und $V$ (s. Fig. 501) angreifenden Centrifugalkräften die Kräftepaare $(Q, -Q)$ und $(R, -R)$ bilden, die sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammensetzen lassen.

Um mit dieser Zurückführung der Centrifugalkräfte eines umlaufenden Körpers auf eine Kraft und ein Kräftepaar bekannt zu werden, ziehen wir folgenden einfachen Fall in Betracht. Die Stange $AB$, Fig. 512, welche sich um die Axe $Z\overline{Z}$ dreht, liege parallel zur Ebene $YZ$ und ruhe mit dem Ende $A$ in der Axe $CX$. Setzen wir die Länge $AB$ dieser Stange $= l$, das Gewicht derselben $= G$, den Winkel $ABB_1$, um welchen diese Stange von der Drehaxenrichtung abweicht, $= \alpha$, und ihren Abstand $CA$ von der Ebene $YZ$, welches auch ihr kürzester Abstand von der Axe $Z\overline{Z}$ ist, $= a$. Ist nun $E$ ein Element $\frac{M}{n}$ der Stange,

Fig. 512.




und $y = AE_1$ die Horizontalprojection seines Abstandes $AE$ vom Ende $A$, so hat man für die Componenten der Centrifugalkraft $P_1$ dieses Elementes:

$$Q_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{CA} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \text{ und } R_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{AE_1} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} y,$$

dagegen ihre Momente in Beziehung auf die Grundebene $XCY$, da der Abstand dieses Elementes von der Ebene $XY$:

$$E_1 E = \overline{AE_1} \cot g.\, \alpha = y \cot g.\, \alpha \text{ ist,}$$

$$Q_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{E_1 E} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a y \cot g.\, \alpha \text{ und}$$

$$R_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} y^2 \cdot \cot g.\, \alpha.$$

Die sämmtlichen Seitenkräfte parallel zur Ebene $XZ$ geben die Resultirende:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = n \cdot \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a = \omega^2 . Ma,$$

Digitized by Google

und das Moment derſelben:

$$Qu = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \, cotg. \, \alpha \, (y_1 + y_2 + \cdots),$$

oder, da $y_1 = \frac{l \sin. \alpha}{n}$, $y_2 = 2 \frac{l \sin. \alpha}{n}$, $y_3 = \frac{3 l \sin. \alpha}{n}$ u. ſ. w. zu nehmen, und $cotg. \, \alpha \sin. \alpha = cos. \, \alpha$ iſt,

$$Qu = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \cos. \alpha \cdot \frac{l}{n} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \cos. \alpha \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{n^2}{2}$$
$$= {}^1/_2 \, \omega^2 . M a l \cos. \alpha.$$

Es iſt alſo der Abſtand des Angriffspunktes dieſer Seitenkraft von der Grundebene $X Y$:

$$S_1 S = u = \frac{{}^1/_2 \, \omega^2 M a l \cos. \alpha}{\omega^2 M a} = {}^1/_2 \, l \cos. \alpha,$$

d. h. es fällt dieſer Punkt mit dem Schwerpunkte der Stange zuſammen. Die Seitenkräfte, welche parallel zu $YZ$ wirken, geben die Reſultirende:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} (y_1 + y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \frac{l \sin. \alpha}{n} \cdot \frac{n^2}{2} = {}^1/_2 \, \omega^2 M l \sin. \alpha \text{ mit dem Momente}$$

$$Rv = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot cotg. \, \alpha \, (y_1^2 + y_2^2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \, cotg. \, \alpha \cdot \left( \frac{(l \sin. \alpha)^2}{n^2} + \frac{(2 l \sin. \alpha)^2}{n^2} + \cdots \right)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \frac{l^2}{n^2} (sin. \, \alpha)^2 \, cotg. \, \alpha \, (1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2} \sin. \alpha \cos. \alpha \cdot \frac{n^3}{3}$$
$$= {}^1/_3 \, \omega^2 M l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha.$$

Es iſt hiernach der Abſtand des Angriffspunktes $O$ dieſer Kraft von der Grundebene $X Y$:

$$O_1 O = v = \frac{{}^1/_3 \, \omega^2 M l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha}{{}^1/_2 \, \omega^2 M l \sin. \alpha} = {}^2/_3 \, l \cos. \alpha,$$

d. i. dieſer Angriffspunkt liegt um $({}^2/_3 - {}^1/_2) \, l \cos. \alpha = {}^1/_6 \, l \cos. \alpha$ ſenkrecht, oder überhaupt um $S O =$ ein Sechstel der Stangenlänge $A B$ über dem Schwerpunkte $S$ der Stange.

Aus den Kräften $Q = \omega^2 M a$ und $R = {}^1/_2 \, \omega^2 M l \sin. \alpha$ folgt die im Schwerpunkte der Stange angreifende Endreſultirende:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 M \sqrt{a^2 + {}^1/_4 \, l^2 \sin. \alpha^2},$$

und das Kräftepaar $(R, -R)$ mit dem Momente

Digitized by Google

$$R \cdot \overline{SO} = {}^1/_2\,\omega^2\, M l \sin.\alpha \cdot {}^1/_6\, l \cos.\alpha$$
$$= {}^1/_{12}\,\omega^2\, M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha = {}^1/_{24}\,\omega^2\, M l^2 \sin. 2\alpha.$$

§. 309 **Freie Axen.** Im Allgemeinen üben zwar die Centrifugalkräfte eines sich um eine Axe gleichförmig umdrehenden Körpers einen Druck auf die Axe aus, es ist jedoch auch möglich, daß diese Kräfte sich gegenseitig aufheben und deshalb die Axe gar keinen Druck auszuhalten hat. Dieser Fall kommt z. B. vor bei jedem sich um seine geometrische oder symmetrische Axe drehenden Rotationskörper, bei einer Radwelle und einem Wasserrade insbesondere, u. s. w. Wenn auf einen unter diesen Umständen sich umdrehenden Körper oder auf ein solches Massensystem keine äußeren Kräfte einwirken, so bleibt der Körper ohne Ende in dieser Umdrehung begriffen, ohne daß es nöthig ist, die Umdrehungsaxe festzuhalten. Man nennt deshalb diese Umdrehungsaxe eine freie Axe (franz. axe libre; engl. free axis). Aus dem Vorhergehenden folgen sogleich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie Axe ist. Es ist nöthig, daß nicht nur die Mittelkräfte $Q$ und $R$ aus den parallel den Axenebenen $XZ$ und $YZ$ wirkenden Componenten der Centrifugalkräfte, sondern auch die Summe der Momente von jedem der beiden Kräftesysteme = Null ist, also hiernach:

1) $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$,
2) $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, ferner
3) $M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$, und
4) $M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$.

Die beiden ersten Gleichungen bedingen, daß die freie Axe durch den Schwerpunkt des Körpers oder Massensystemes geht. Die beiden letzteren aber liefern die Elemente zur Bestimmung der Lage dieser Axe. Es läßt sich übrigens nachweisen, daß jeder Körper oder jedes Massensystem mindestens drei freie Axen hat, und daß diese Axen im Schwerpunkte des Systemes unter rechten Winkeln zusammenstoßen.

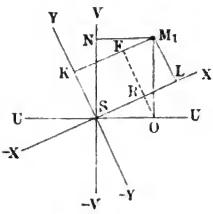
Die höhere Mechanik unterscheidet von den freien Axen noch andere Axen, welche sich in irgend einem Punkte des Systemes durchkreuzen, und nennt diese Axen Hauptaxen (franz. axes principaux; engl. principal axes). Man beweist auch, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine der Hauptaxen ein Maximum, und in Beziehung auf die zweite ein Minimum ist und daß es in Hinsicht auf die dritte Axe einen Mittelwerth hat, sowie daß für einen Punkt, welcher in einer der freien Axen liegt, die Hauptaxen mit den freien Axen, oder den durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen parallel laufen.

§. 310 **Freie Axen eines ebenen Massensystemes.** Befinden sich die Theile einer Masse in einer Ebene, bildet z. B. die Masse eine dünne

Digitized by Google

Platte oder ebene Figur, so ist die gerade Linie durch den Schwerpunkt der ganzen Masse, und normal zur Ebene derselben eine freie Axe der Masse, denn es ist in diesem Falle die Masse ohne Drehungshalbmesser, und daher die einzig mögliche Centrifugalkraft = Null. Um noch die beiden anderen freien Axen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Sei $S$, Fig. 513, der Schwerpunkt einer Masse, und seien $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ zwei in der Massenebene befindliche Coordinatenaxen, bestimmen wir die Massentheile durch Coordinaten parallel zu diesen Axen, z. B. das Massentheilchen $M_1$ durch die Coordinaten $M_1 N = u_1$ und $M_1 O = v_1$. Sei dagegen $X\overline{X}$ eine freie Axe, $Y\overline{Y}$ eine Axe winkelrecht gegen dieselbe, ferner der zu bestimmende Winkel $USX$, um welchen die freie Axe von der Coordinatenaxe $SU$ abweicht, $= \varphi$, und setzen wir die Coordinaten der Massentheile in Hinsicht auf die Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$: $x_1, x_2 \ldots$ und $y_1, y_2 \ldots$, also für den Massentheil $M_1$:

Fig 513.




$$M_1 K = x_1 \text{ und } M_1 L = y_1.$$

Hiernach ergiebt sich sehr leicht:

$$x_1 = M_1 K = SR + RL = SO\cos.\varphi + OM_1 \sin.\varphi = u_1 \cos.\varphi + v_1 \sin.\varphi,$$
$$y_1 = M_1 L = -OR + OF = -SO\sin.\varphi + OM_1 \cos.\varphi$$
$$= -u_1 \sin.\varphi + v_1 \cos.\varphi;$$

und daher das Product:

$$x_1 y_1 = (u_1 \cos.\varphi + v_1 \sin.\varphi).(-u_1 \sin.\varphi + v_1 \cos.\varphi)$$
$$= -(u_1^2 - v_1^2) \sin.\varphi \cos.\varphi + u_1 v_1 (\cos\varphi^2 - \sin.\varphi^2)$$

oder, da $\sin.\varphi \cos.\varphi = {}^1/_2 \sin. 2\varphi$ und $\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2 = \cos. 2\varphi$ ist,

$$x_1 y_1 = -{}^1/_2 (u_1^2 - v_1^2) \sin. 2\varphi + u_1 v_1 \cos 2\varphi,$$

und daher das Moment des Massentheiles $M_1$:

$$M_1 x_1 y_1 = -\frac{M_1}{2}(u_1^2 - v_1^2) \sin. 2\varphi + M_1 u_1 v_1 \cos. 2\varphi,$$

ebenso das Moment des Massentheiles $M_2$:

$$M_2 x_2 y_2 = -\frac{M_2}{2}(u_2^2 - v_2^2) \sin. 2\varphi + M_2 u_2 v_2 \cos. 2\varphi$$

u. s. w., und die Summe der Momente aller Massentheile, oder das Moment der ganzen Masse:

$$M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + \cdots = -{}^1/_2 \sin. 2\varphi [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots)$$
$$- (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] + \cos. 2\varphi (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots).$$

Damit $X\overline{X}$ eine freie Axe werde, muß aber nach dem vorigen Paragraphen dieses Moment = Null sein; wir müssen daher setzen

Digitized by Google

$$^1/_2 \sin. 2\varphi\,[(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] - \cos. 2\varphi\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots) = 0,$$

und erhalten hiernach als Bedingungsgleichung:

$$\tang. 2\varphi = \frac{\sin. 2\varphi}{\cos. 2\varphi} = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)} = \frac{\text{Doppeltes Moment der Centrifugalkraft}}{\text{Differenz der Trägheitsmomente}}.$$

Durch diese Formel ergeben sich zwei Werthe für $2\varphi$, welche von einander um 180°, und also auch zwei Werthe von $\varphi$, welche von einander um 90° abweichen; es ist deshalb nicht allein die durch diesen Winkel $\varphi$ bestimmte Axe $X\overline{X}$ eine freie Axe, sondern auch die gegen sie winkelrecht gerichtete Axe $Y\overline{Y}$.

§. 311 Von vielen Flächen und Körpern lassen sich die freien Axen ohne alle Rechnung angeben. Bei einer symmetrischen Figur ist z. B. die Symmetrieaxe eine freie Axe, das Perpendikel im Schwerpunkte die zweite, und die Axe winkelrecht gegen die Ebene der Figur die dritte freie Axe. Bei einem Rotationskörper $AB$, Fig. 514, ist die Rotationsaxe $Z\overline{Z}$ eine freie Axe, ebenso auch jede Normale $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ . . . zu dieser Linie durch den Schwerpunkt $S$. Bei einer Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Axe, bei einem geraden, von sechs Rechtecken begrenzten Parallelepipede $ABD$, Fig. 515, aber sind es die drei durch den Schwerpunkt $S$ gehenden und auf

Fig. 514.

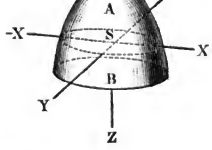
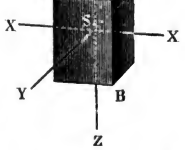



Fig. 515.



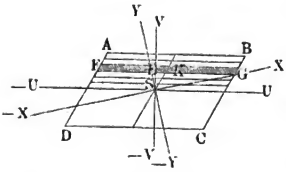

den Seitenflächen $BD$, $AB$ und $AD$ normal stehenden oder mit den Kanten parallel laufenden Axen $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ und $Z\overline{Z}$.

Bestimmen wir noch die freien Axen von einem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 516. Legen wir durch den Schwerpunkt $S$ desselben die unter sich rechtwinkelig stehenden Coordinatenaxen $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ so, daß die eine der Seite $AB$ des Parallelogrammes parallel läuft, und zerlegen wir das Parallelogramm durch Parallellinien in $2n$ gleiche

Digitized by Google

Streifen, wie z. B. $FG$. Ist nun die eine Seite $AB = 2a$, die andere Seite $AD = 2b$, und der spitze Winkel $ADC$ zwischen je zwei Seiten, $= \alpha$, so erhalten wir für den um $SE = x$ von $U\overline{U}$ abstehenden Streifen $FG$ die Länge des einen Theiles $EG$,

Fig. 516.




$= KG + EK = a + x\,cotg.\,\alpha$,

sowie die des anderen Theiles $EF$

$= a - x\,cotg.\,\alpha$,

und, da $\frac{b}{n}\,sin.\,\alpha$ die Breite beider ist, die Inhalte dieser Streifen

$$= \frac{b\,sin.\,\alpha}{n}(a + x\,cotg.\,\alpha) \text{ und } \frac{b\,sin.\,\alpha}{n}(a - x\,cotg.\,\alpha);$$

auch folgen die Maße der Centrifugalkräfte von diesen Theilen in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$:

$$= \frac{b\,sin.\,\alpha}{n}(a + x\,cotg.\,\alpha) \cdot {}^1/_2\,(a + x\,cotg.\,\alpha) = \frac{b\,sin.\,\alpha}{2\,n}(a + x\,cotg.\,\alpha)^2$$

und

$$\frac{b\,sin.\,\alpha}{2\,n}(a - x\,cotg.\,\alpha)^2,$$

sowie ihre Momente in Hinsicht auf die Axe $U\overline{U}$:

$$\frac{b\,sin.\,\alpha}{2\,n}(a + x\,cotg.\,\alpha)^2\,x \text{ und } \frac{b\,sin.\,\alpha}{2\,n}(a - x\,cotg.\,\alpha)^2\,x.$$

Da beide Kräfte in Hinsicht auf $V\overline{V}$ einander entgegengesetzt wirken, so giebt die Vereinigung ihrer Momente die Differenz:

$$\frac{b\,x\,sin.\,\alpha}{2\,n}[(a + x\,cotg.\,\alpha)^2 - (a - x\,cotg.\,\alpha)^2] = \frac{2}{n}\,a\,b\,x^2\,cos.\,\alpha.$$

Setzen wir in der Formel für $x$ nach und nach $\frac{b\,sin.\,\alpha}{n}$, $\frac{2\,b\,sin.\,\alpha}{n}$, $\frac{3\,b\,sin.\,\alpha}{n}$ u. s. w. ein, und addiren wir die dadurch erhaltenen Ergebnisse, so bekommen wir das Maß für das Moment der Centrifugalkraft des halben Parallelogrammes:

$$\frac{2\,a\,b}{n}\,cos.\,\alpha \cdot \frac{b^2\,sin.\,\alpha^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = 2\,a\,b^3\,sin.\,\alpha^2\,cos.\,\alpha \cdot \frac{n^3}{3\,n^3}$$

$$= {}^2/_3\,a\,b^3\,sin.\,\alpha^2\,cos.\,\alpha,$$

und also für das ganze Parallelogramm, oder:



Digitized by Google

$$M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots = {}^4/_3 a b^3 \sin.\alpha^2 \cos.\alpha.$$

Das Trägheitsmoment in Hinſicht auf die Axe $V\overline{V}$ iſt für einen Streifen $FG$

$$= \frac{b \sin.\alpha}{n}\left(\frac{(a + x\,cotg.\alpha)^3}{3} + \frac{(a - x\,cotg.\alpha)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{2\,b \sin.\alpha}{3\,n}(a^3 + 3\,a\,x^2\,cotg.\alpha^2) = {}^2/_3 \frac{a\,b}{n} \sin.\alpha\,(a^2 + 3\,x^2\,cotg.\alpha^2).$$

Setzt man nun für $x$ ſucceſſiv $\frac{b \sin.\alpha}{n}$, $\frac{2\,b \sin.\alpha}{n}$, $\frac{3\,b \sin.\alpha}{n}$ u. ſ. w., und ſummirt man die ſich ergebenden Werthe, ſo folgt das Trägheitsmoment der einen Hälfte

$$= {}^2/_3\,a\,b \sin.\alpha\,(a^2 + b^2 \cos.\alpha^2),$$

und daher das des Ganzen

$$= {}^4/_3\,a\,b \sin.\alpha\,(a^2 + b^2 \cos.\alpha^2).$$

In Hinſicht auf die Umdrehungsaxe $U\overline{U}$ iſt hingegen das Trägheitsmoment des Parallelogrammes

$$= 4\,a\,b \sin.\alpha \cdot \frac{b^2 \sin.\alpha^2}{3} = {}^4/_3\,a\,b^3 \sin.\alpha^3 \text{ (§. 287)};$$

es ergiebt ſich daher die geſuchte Differenz der Trägheitsmomente, d. i.:

$$\begin{aligned}
&(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots),\\
&= {}^4/_3\,a\,b \sin.\alpha\,(a^2 + b^2 \cos.\alpha^2) - {}^4/_3\,a\,b^3 \sin.\alpha^3\\
&= {}^4/_3\,a\,b \sin.\alpha\,[a^2 + b^2\,(\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)]\\
&= {}^4/_3\,a\,b \sin.\alpha\,(a^2 + b^2 \cos.2\,\alpha).
\end{aligned}$$

Endlich folgt für den Winkel $USX = \varphi$, welchen die freie Axe $X\overline{X}$ mit der Coordinatenaxe $U\overline{U}$ oder der Seite $AB$ einſchließt, nach §. 310:

$$\begin{aligned}
tang.\,2\,\varphi &= \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}\\
&= \frac{2 \cdot {}^4/_3\,a\,b^3 \sin.\alpha^2 \cos.\alpha}{{}^4/_3\,a\,b \sin.\alpha\,(a^2 + b^2 \cos.2\,\alpha)} = \frac{b^2 \sin.2\,\alpha}{a^2 + b^2 \cos.2\,\alpha}.
\end{aligned}$$

Beim Rhombus iſt $a = b$, daher:

$$tang.\,2\,\varphi = \frac{\sin.2\,\alpha}{1 + \cos.2\,\alpha} = \frac{2 \sin.\alpha \cos.\alpha}{1 + \cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2} = \frac{2 \sin.\alpha \cos.\alpha}{2 \cos.\alpha^2} = tg.\alpha,$$

alſo:

$$2\,\varphi = \alpha, \text{ und } \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Da dieſer Winkel die Richtung der Diagonale angiebt, ſo folgt, daß die Diagonalen freie Axen des Rhombus ſind.

Digitized by Google

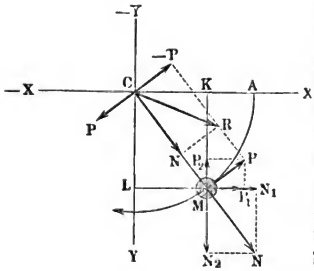
Beispiel. Bei dem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 516, messen die Seiten $AB = 2a = 16$ Zoll und $BC = 2b = 10$ Zoll, und ist der Umfangswinkel $ABC = \alpha = 60^0$, welche Richtungen haben dessen freie Aren? Es ist

$$tang.\ 2\varphi = \frac{5^2 . sin.\ 120^0}{8^2 + 5^2 . cos.\ 120^0} = \frac{25 . sin.\ 60^0}{64 - 25\ cos.\ 60^0} = \frac{25 . 0{,}86603}{64 - 25 . 0{,}5}$$
$$= 0{,}42040 = tang.\ 22^0{,}48',\ \text{oder}\ tang.\ 202^0{,}48'.$$

Hiernach folgen $\varphi = 11^0{,}24'$ und $101^0{,}24'$ als Neigungswinkel der zwei ersten freien Aren gegen die Seite $AB$. Die dritte freie Are steht auf der Ebene des Parallelogrammes rechtwinkelig. Diese Winkel bestimmen auch die freien Aren eines geraden Parallelepipedes mit rhombeidalen Grundflächen.

**Wirkung auf die Umdrehungsaxe.** Wenn sich ein materieller Punkt $M$, Fig. 517, ungleichförmig um eine feste Axe $C$ dreht, so hat §. 312

Fig. 517.




dieselbe nicht bloß die Centrifugalkraft, sondern auch die Kraft der Trägheit dieses Punktes auszuhalten. Während die Centrifugalkraft radial auswärts wirkt, hat natürlich die Kraft der Trägheit eine tangentiale Richtung, und zwar entweder der der Umdrehungsbewegung entgegengesetzt, oder mit derselben zusammenfallend, je nachdem die Acceleration dieser Bewegung eine positive oder eine negative (Retardation) ist. Man kann daher auch annehmen, daß die Centrifugalkraft $\overline{MN} = \overline{CN} = N$ unmittelbar in der Axe $C$ angreife und daß die Kraft der Trägheit $\overline{MP} = -P$ aus einem Kräftepaare $(P, -P)$ und einer Axenkraft $\overline{CP} = -P$ bestehe, und folglich die ganze Axenkraft $\overline{CR} = R$ durch die Diagonale eines aus $N$ und $-P$ construirten rechtwinkeligen Parallelogrammes bestimmen.

Ist $r$ die Entfernung $CM$ der Masse $M$ von der Umdrehungsaxe $C$, sowie $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit und $\varkappa$ die Winkelacceleration, so hat man nach §§. 302 und 282:

$$N = \omega^2 M r$$

und

$$P = \varkappa M r,$$

daher die gesuchte Mittelkraft:

$$R = \sqrt{N^2 + P^2} = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} . Mr,$$



Digitized by Google

und für den Winkel $RCN = \varphi$, um welchen die Richtung dieser Kraft von der Richtung $CM$ der Centrifugalkraft abweicht,

$$tang.\,\varphi = \frac{-P}{N} = -\frac{P}{N} = -\frac{\varkappa}{\omega^2}.$$

Da in Folge der Acceleration $\varkappa$, $\omega$ veränderlich ist, so fällt natürlich auch die Centrifugalkraft $N$ und die Mittelkraft $R$ variabel aus.

Um die Centrifugal- und Trägheitskräfte eines Systems von Massen $M_1$, $M_2$ u. s. w. zu vereinigen, zerlegt man diese Kräfte nach zwei Axenrichtungen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ in Seitenkräfte, vereinigt hierauf die in einer Axenrichtung wirkenden Kräfte durch algebraische Addition, und setzt endlich die hieraus resultirenden zwei Kräfte wie oben zu einer Mittelkraft zusammen. Sind $x$ und $y$ die Coordinaten $CK$ und $CL$ des materiellen Punktes $M_1$ in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{X}X$, $\overline{Y}Y$, so hat man die beiden Componenten der Centrifugalkraft $N$:

$$N_1 = \frac{x}{r}\,N = \omega^2 M x \text{ und}$$

$$N_2 = \frac{y}{r}\,N = \omega^2 M y,$$

dagegen die der Trägheit:

$$P_1 = \frac{y}{r}\,P = \varkappa M y \text{ und}$$

$$P_2 = \frac{x}{r}\,P = \varkappa M x;$$

es folgt daher die Gesammtkraft in der Axe $\overline{X}X$:

$$Q = N_1 + P_1 = \omega^2 M x + \varkappa M y,$$

und die in der Axe $\overline{Y}Y$:

$$R = N_2 - P_2 = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Hat man es nun mit einem sich um eine feste Axe $C$, Fig. 518, drehenden Systeme von materiellen Punkten oder Massen $M_1$, $M_2$ u. s. w. zu thun, deren Coordinaten in Hinsicht auf eine Coordinataxe $\overline{X}X$:

$$CK_1 = x_1,\ CK_2 = x_2 \text{ u. s. w.},$$

und in Hinsicht auf die andere Coordinataxe $\overline{Y}Y$:

$$CL_1 = y_1,\ CL_2 = y_2 \text{ u. s. w.}$$

sind, so fällt folglich die Gesammtkraft in der ersten Axe:

$Q = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1 + \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2 + \cdots$, d. i.:

$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$,

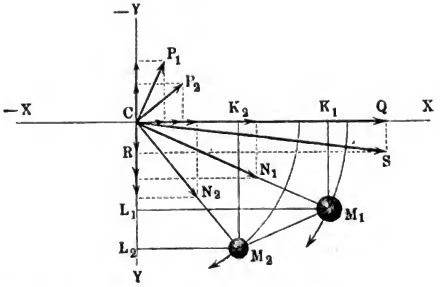
und dagegen die in der anderen Axe:

$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$ aus.

Digitized by Google

Bezeichnet man endlich die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ durch $M$ und die Coordinaten ihres Schwerpunktes in Hinsicht auf die Axen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ durch $x$ und $y$, so hat man (siehe §. 305)

Fig. 518.




$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = Mx \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = My;$$

daher einfacher:

$$Q = \omega^2 Mx + \varkappa My \text{ und}$$
$$R = \omega^2 My - \varkappa Mx.$$

Aus $Q$ und $R$ folgt nun die Mittelkraft:

$$S = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

sowie für den Richtungswinkel $XCS = \varphi$ derselben:

$$tang.\,\varphi = \frac{R}{Q}.$$

Da $Mx$ und $My$ die statischen Momente des Schwerpunktes sind, so folgt, daß man bei Bestimmung des Axendruckes ($S$) eines in einer und derselben Umdrehungsebene befindlichen Massensystemes die ganze Masse in dem Schwerpunkte des Systemes vereinigt annehmen könne, und da die Entfernung des Schwerpunktes des Massensystemes von der Umdrehungsaxe,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist, so hat man auch

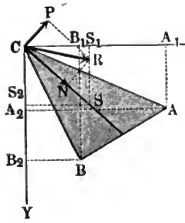
$$S = \sqrt{[(\omega^2 Mx + \varkappa My)^2 + (\omega^2 My - \varkappa Mx)^2]}$$
$$= M\sqrt{[\omega^4 (x^2 + y^2) + \varkappa^2 (x^2 + y^2)]}$$
$$= M\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}\,.\,Mr.$$

Anmerkung. Für ein Dreieck $ABC$, Fig. 519 (a. f. S.), welches sich um seinen Eckpunkt $C$ dreht, und dessen Eckpunkte $A$ und $B$ durch die Coordinaten

Digitized by Google

$(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ bestimmt sind, hat man nach §. 112 die Coordinaten seines Schwerpunktes $S$:

Fig. 519.




$$CS_1 = x = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

und

$$CS_2 = y = \frac{y_1 + y_2}{3},$$

und die Masse, wenn man dieselbe durch den Flächeninhalt mißt,

$$M = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Auch läßt sich das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Umdrehungsaxe $C$ durch den Ausdruck

$$W = \frac{M}{6}\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} + \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_1 - y_2}\right)$$

$$= \frac{M}{6}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

bestimmen.

Diese Formeln finden auch ihre Anwendung auf ein gerades Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck $A\,B\,C$ ist.

Beispiel. Ein gerades Prisma mit der dreiseitigen Grundfläche $A\,B\,C$ soll durch ein constant wirkendes Kräftepaar so schnell um die Seitenkante $C$ gedreht werden, daß es im Verlaufe von $t = 1$ Secunde, $u = 5/2$ Umdrehungen macht, und man soll nicht allein das Moment dieses Kräftepaares, sondern auch noch die Wirkung dieser Bewegung auf die Axe $C$ bestimmen. Es sei die Basis $A\,B\,C$ dieses Körpers durch die Coordinaten

$$x_1 = 1{,}5,\ y_1 = 0{,}5;\ x_2 = 0{,}4,\ y_2 = 1{,}0 \text{ Fuß}$$

bestimmt, ferner die Höhe oder Länge desselben $l = 2$ Fuß, und seine Dichtigkeit $\gamma = 30$ Pfund. Hieraus berechnet sich zunächst der Inhalt der Basis:

$$F = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} = \frac{1{,}5\,.\,1{,}0 - 0{,}4\,.\,0{,}5}{2} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65 \text{ Quadratfuß},$$

und daher die Masse des ganzen Körpers:

$$M = \frac{F l \gamma}{g} = 0{,}032\,.\,0{,}65\,.\,2\,.\,30 = 1{,}248 \text{ Pfund}.$$

Nun ist ferner

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 2{,}25 + 0{,}60 + 0{,}16 = 3{,}01,$$
$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 = 0{,}25 + 0{,}50 + 1{,}00 = 1{,}75;$$

daher folgt das Trägheitsmoment des Körpers:

$$W = (3{,}01 + 1{,}75)\frac{M}{6} = 4{,}76\,.\,\frac{1{,}248}{6} = 0{,}99008 \text{ Fußpfund}.$$

Da in Folge der Beständigkeit des Umdrehungskräftepaares die Umdrehungsbewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so folgt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit $t$ von 1 Secunde (s. §. 10):

$$\omega = \frac{2s}{t} = \frac{2\,.\,2\pi u}{t} = \frac{2\,.\,2\,.\,5\pi}{2} = 31{,}416 \text{ Fuß},$$

und es ist daher die erforderliche mechanische Arbeit:

Digitized by Google

$$A = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,T = \tfrac{1}{2}\,(31{,}416)^2\,.\,0{,}99008 = 488{,}6 \text{ Fußpfund.}$$

Die Winkelacceleration ist

$$\varkappa = \frac{\omega}{t} = \frac{31{,}416}{1} = 31{,}416 \text{ Fuß,}$$

daher das Moment des Kräftepaares:

$$Pa = \varkappa\,W = 31{,}416\,.\,0{,}99008 = 31{,}10 \text{ Fußpfund.}$$

Die Abstände des Schwerpunktes $S$ der Basis von den Coordinataren $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ sind

$$x = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{1{,}5 + 0{,}4}{3} = 0{,}6333 \text{ und}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{0{,}5 + 1{,}0}{3} = 0{,}5000,$$

folglich ergiebt sich der Abstand des Schwerpunktes von der Are:

$$CS = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}6511.$$

Ferner ist

$$\omega^4 = 31{,}416^4 = 974090 \text{ und}$$
$$\varkappa^2 = 31{,}416^2 = 987;$$

daher folgt:

$$\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} = \sqrt{975077} = 987{,}36,$$

und es wächst demnach der Arendruck während der beschleunigten Umdrehung des Körpers, von

$$P = \varkappa\,Mr = 31{,}416\,.\,1{,}248\,.\,0{,}6511 = 25{,}53 \text{ Pfund}$$

bis

$$R = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}\,.\,Mr = 987{,}46\,.\,0{,}8126 = 802{,}41 \text{ Pfund.}$$

Wenn nach Verlauf von einer Secunde Zeit das Kräftepaar zu wirken aufhört, so nimmt der Körper eine gleichförmige Umdrehungsbewegung an, und es besteht von nun an der von der Are auszuhaltende Druck nur in der Centrifugalkraft:

$$N = \omega^2\,Mr = 986{,}96\,.\,0{,}8126 = 802{,}00 \text{ Pfund.}$$

Der von 25,53 bis 802,41 allmälig anwachsende Arendruck ist anfangs rechtwinkelig gegen die centrale Schwerlinie $CS$ gerichtet, nähert sich aber während des Wachsens der Geschwindigkeit dieser Linie immer mehr und mehr, so daß er am Ende der Zeit $t = 1$ Secunde, nur noch um einen Winkel $\varphi$ von dieser Linie abweicht, welcher durch

$$tang.\,\varphi = \frac{P}{N} = \frac{25{,}53}{802{,}00} = 0{,}03183$$

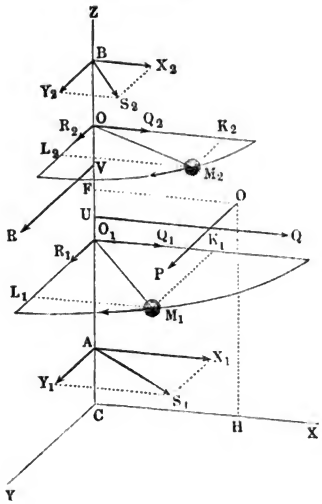
bestimmt ist und hiernach den Werth $\varphi = 1^0{,}49'$ hat. Wenn das Kräftepaar zu wirken aufhört, so fällt natürlich die Richtung der Arenkraft $N = 802{,}00$ Pfund ganz in die centrale Schwerlinie $CS$, und dreht sich folglich auch mit dieser Linie im Kreise herum.

Wenn man statt des Kräftepaares nur eine Kraft $P$ am Hebelarme $a$ auf den Körper wirken läßt, so gesellt sich zu dem obigen Arendrucke noch ein dieser Kraft gleicher Druck $P$.

Digitized by Google

§. 313 **Mittelpunkt des Stosses.** Befinden sich die einzelnen Theile $M_1$, $M_2$ ⋯, Fig. 520, eines rotirenden Massensystemes nicht in einer und derselben Umdrehungsebene, so fallen die Richtungen der Kräfte

Fig. 520.




$Q_1 = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1$,
$Q_2 = \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2$ ꝛc.

nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{X}X$, sondern in die Coordinatenebene $XZ$ und ebenso die der Kräfte:

$R_1 = \omega^2 M_1 y_1 - \varkappa M_1 x_1$,
$R_2 = \omega^2 M_2 y_2 - \varkappa M_2 x_2$ ꝛc.

nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{Y}Y$, sondern in die Coordinatenebene $YZ$. Es lassen sich nun zwar die Kräftesysteme $Q_1$, $Q_2$ u. s. w. und $R_1, R_2$ u. s. w. auf die bekannte Weise (§. 305) zu den Mittelkräften:

$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$ und
$R = R_1 + R_2 + \cdots$

vereinigen, da aber ihre Angriffslinien $UQ$ und $VR$ im Allgemeinen nicht in eine Ebene fallen, sondern die Drehungsaxe $CZ$ in zwei verschiedenen Punkten $U$ und $V$ schneiden, so ist eine weitere Vereinigung dieser Kräfte zu einer Mittelkraft nicht, sondern nur eine Zurückführung derselben auf eine Kraft und ein Kräftepaar möglich. Die Seitenkräfte $Q$ und $R$ sind natürlich wie oben:

$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 M x + \varkappa M y, \text{ und}$$
$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 M y - \varkappa M x,$$

wenn wieder $M$ die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ und $x$ und $y$ die Abstände ihres Schwerpunktes $S$ von den Coordinatebenen $YZ$ und $XZ$ bezeichnen.

Setzen wir ferner die Abstände der Massen $M_1$, $M_2$ u. s. w. von der auf der Umdrehungsaxe $CZ$ rechtwinkelig stehenden Umdrehungsebene $XY$, $z_1$,

Digitized by Google

$z_2$ u. s. w., so erhalten wir (wie in §. 305) für die Abstände der Angriffspunkte $U$ und $V$ der Kräfte $Q$ und $R$ von dem Anfangspunkte $C$:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots}$$

$$= \frac{\omega^2 (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots}$$

$$= \frac{\omega^2 (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)}.$$

Wird die Axe $CZ$ in zwei Punkten $A$ und $B$ (Zapfenlagern) festgehalten, welche um die Coordinaten $CA = l_1$ und $CB = l_2$ vom Anfangspunkte abstehen, so zerlegt sich die Kraft $Q$ in die Seitenkräfte:

$$X_1 = \left(\frac{l_2 - u}{l_2 - l_1}\right) Q \text{ und } X_2 = \left(\frac{u - l_1}{l_2 - l_1}\right) Q,$$

und die Kraft $R$ in die Seitenkräfte:

$$Y_1 = \left(\frac{l_2 - v}{l_2 - l_1}\right) R \text{ und } Y_2 = \left(\frac{v - l_1}{l_2 - l_1}\right) R,$$

und es ist nun der Druck im Zapfen $A$:

$$S_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

und der im Zapfen $B$:

$$S_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}.$$

Wird die Acceleration der Umdrehungsbewegung nicht durch ein Kräftepaar, dessen Moment $Pa$ ist, sondern durch eine excentrische Kraft $P$ am Hebelarme $a$ hervorgebracht, so tritt noch ein dieser Kraft $P$ gleicher Druck zu den Axenkräften $Q$ und $R$ hinzu. Lassen wir diese Kraft $P$ parallel zur Axe $CY$, und im Abstande $FO = a$ von der Umdrehungsaxe, rechtwinkelig gegen die Ebene $XZ$ wirken, und nehmen wir noch an, daß ihre Angriffslinie um $CF = HO = b$ von der Coordinatebene $XY$ abstehe, so wird durch dieselbe nur die Kraft $R$ um $P$ vergrößert, und zwar der Theil $Y_1$ im Stützpunkte $A$ um

$$Y_3 = \left(\frac{l_2 - b}{l_2 - l_1}\right) P,$$

und der Theil $Y_2$ im Stützpunkte $B$ um

$$Y_4 = \left(\frac{b - l_1}{l_2 - l_1}\right) P.$$

Digitized by Google

Wenn $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$, sowie
$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, ferner:
$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$ und
$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$,

und folglich die Umdrehungsaxe $CZ$ eine freie Axe ist, so fallen nicht allein die Kräfte $Q$ und $R$, sondern auch ihre Momente $Qu$ und $Rv$ einzeln Null aus, und es ist daher (vergl. §. 309) zu folgern, daß bei Umdrehung eines Massensystemes um eine freie Axe sich nicht allein die Centrifugalkräfte, sondern auch die Trägheitskräfte einander das Gleichgewicht halten.

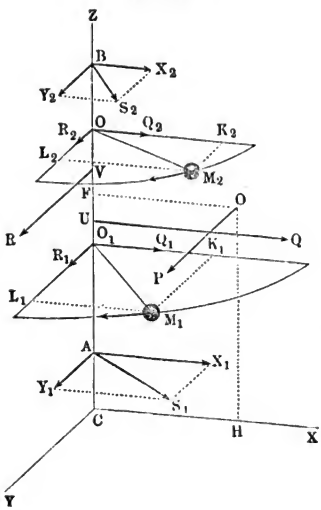
Nehmen wir an, daß sich das Massensystem in Ruhe befindet, daß also $\omega =$ Null ist, oder sehen wir von der Wirkung der Centrifugalkräfte auf die Umdrehungsaxe ab, so erhalten wir einfacher die Axendrücke:

$$Q = \varkappa My = \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$
$$R = -\varkappa Mx = -\varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots), \text{ sowie}$$
$$Qu = \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) \text{ und}$$
$$Rv = -\varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots).$$

Wenn die Ebene $XZ$ Symmetrieebene und folglich auch Schwerebene des ganzen Massensystemes ist, so fällt

$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0 \text{ und}$$
$$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0,$$

Fig. 521.




und daher auch

$$Q = 0,$$

sowie

$$Qu = 0$$

aus.

Machen wir nun noch die Forderung, daß die Umdrehungskraft:

$$P = \frac{\varkappa W}{a}$$

durch die Trägheitskraft $R$ aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Umdrehungsaxe zurückzulassen, so können wir folglich:

$$P + R = 0$$

und

$$Pb + Rv = 0,$$

d. i.:

Digitized by Google

$$\frac{\varkappa W}{a} - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) = 0, \text{ ſowie}$$

$$\frac{\varkappa W b}{a} - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) = 0$$

ſetzen, und es folgt hiernach:

$$a = \frac{W}{M x} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{ſtatiſches Moment}} \text{ und}$$

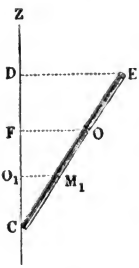
$$b = \left(\frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{W}\right) a = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

$$= \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{ſtatiſches Moment}}.$$

Dieſe Coordinaten beſtimmen einen Punkt $O$, welcher der **Mittelpunkt des Stoßes** (franz. centre de percussion; engl. centre of percussion) genannt wird, weil jede durch denſelben gehende und gegen die durch die Umdrehungs- oder feſte Axe $CZ$ gehende Symmetrieebene $XZ$ des Körpers rechtwinkelig gerichtete Stoßkraft $P$ beim Zuſammenſtoß dieſes Körpers mit einem anderen Körper von der Trägheit der Maſſe des erſteren aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Axe des Körpers zurück zu laſſen oder einen Druck auf dieſelbe auszuüben.

Beiſpiele. 1) Für eine gerade Linie oder eine überall gleich dicke Stange $CE$, Fig. 522, welche an einem Ende $C$ mit der Umdrehungsaxe $CZ$ unter einem beſtimmten Winkel $ZCE$ zuſammenſtößt, iſt, wenn $M$ die Maſſe derſelben und $r$ den Abſtand $DE$ ihres zweiten Endes $E$ von der Umdrehungsaxe bezeichnet, das Trägheitsmoment:

Fig. 522.




$$W = Mk^2 = \tfrac{1}{3} Mr^2 \text{ (ſ. §. 286)},$$

dagegen das ſtatiſche Moment:

$$Mx = \tfrac{1}{2} Mr,$$

und endlich das Centrifugalmoment, da, wenn $h$ die Projection $CD$ der Stangenlänge $CE$ in der Umdrehungsaxe $CZ$ bezeichnet,

$$\frac{CO_1}{O_1 M_1} = \frac{z_1}{x_1} = \frac{h}{r},$$

alſo:

$$M_1 x_1 z_1 = \frac{h}{r} M_1 x_1^2, \; M_2 x_2 z_2 = \frac{h}{r} M_2 x_2^2$$

u. ſ. w. ausfällt:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \frac{h}{r}(M_1 x_1^2 + M_2 x_2^2 + \cdots) = \frac{h}{r} \cdot \tfrac{1}{3} Mr^2 = \tfrac{1}{3} Mhr.$$

Daher ſind die Coordinaten des Stoßmittelpunktes $O$ dieſer Stange durch

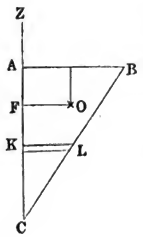
$$FO = a = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{ſtatiſches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} Mr^2}{\tfrac{1}{2} Mr} = \tfrac{2}{3} r \text{ und}$$

$$CF = b = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{ſtatiſches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} Mhr}{\tfrac{1}{2} Mr} = \tfrac{2}{3} h$$

Digitized by Google

bestimmt, und es ist demnach dieser Mittelpunkt um zwei Drittel der Stangenlänge $CE$ vom Ende $C$ und um ein Drittel derselben vom Ende $E$ der Stange entfernt.

Fig. 523.




2) Das Trägheitsmoment einer rechtwinkeligen Dreiecksfläche $ABC$, Fig. 523, welche sich um eine Kathete $CA$ dreht, ist, wenn man deren Masse durch $M$, und deren Katheten $CA$ und $AB$ durch $h$ und $r$ bezeichnet:

$$T = \frac{hr^3}{12} = \frac{hr}{2} \cdot \frac{r^2}{6} = \tfrac{1}{6} Mr^2 \text{ (s. §. 229),}$$

und das statische Moment derselben, da ihr Schwerpunkt $S$ um $\frac{r}{3}$ von der Are $CA$ absteht,

$$Mx = \frac{Mr}{3},$$

folglich ist der Abstand des Stoßmittelpunktes $O$ dieser Fläche von eben dieser Are:

$$FO = a = \frac{\frac{1}{6} Mr^2}{\frac{1}{3} Mr} = \tfrac{1}{2} r.$$

Für ein streifenförmiges Element $KL$ des Dreieckes, welches die Länge $x$ und die Breite $\frac{h}{n}$ hat, und um $CK = z$ von der Spitze $C$ absteht, ist das Centrifugalmoment:

$$Mxz = \frac{h}{n} x \cdot \tfrac{1}{2} x z,$$

oder, da $\frac{x}{z} = \frac{r}{h}$, also $x = \frac{r}{h} z$ ist,

$$Mxz = \tfrac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 z^3.$$

Nimmt man nun für $z$ nach und nach $1\left(\frac{h}{n}\right)$, $2\left(\frac{h}{n}\right)$, $3\left(\frac{h}{n}\right) \cdots n\left(\frac{h}{n}\right)$, und addirt die dadurch erhaltenen Werthe für $Mxz$, so ergiebt sich das ganze Centrifugalmoment:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \tfrac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) \left(\frac{h}{n}\right)^3$$
$$= \tfrac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{n^4}{4} \left(\frac{h}{n}\right)^3 = \tfrac{1}{8} r^2 h^2 = \tfrac{1}{4} \frac{rh}{2} rh$$
$$= \tfrac{1}{4} Mrh,$$

und daher der Abstand des Stoßmittelpunktes $O$ vom Eckpunkt $C$:

$$CF = b = \frac{\frac{1}{4} Mrh}{\frac{1}{3} Mr} = \tfrac{3}{4} h.$$

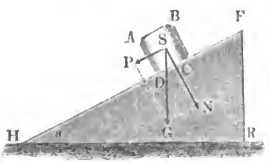
Digitized by Google

## Drittes Capitel.

## Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.

**Gleiten auf der geneigten Ebene.** Ein schwerer Körper kann auf §. 314
mancherlei Weise verhindert werden, frei zu fallen; betrachten wir indessen im Folgenden nur zwei Fälle, nämlich den Fall, wenn der Körper von einer geneigten Ebene unterstützt wird, und den Fall, wenn er um eine horizontale Axe drehbar ist. In beiden Fällen sind die Wege des Körpers in einer Verticalebene enthalten. Befindet sich der Körper auf einer geneigten Ebene, so zerlegt sich das Gewicht desselben in zwei Seitenkräfte, von denen die eine normal gegen die Ebene gerichtet ist und von dieser aufgenommen wird, und die andere parallel zur Ebene und auf den Körper als bewegende Kraft wirkt. Ist $G$ das Gewicht des Körpers $ABCD$, Fig. 524, und $\alpha$ die Neigung der schiefen Ebene $FHR$ gegen den Horizont, so hat man nach §. 146 jenen Normaldruck:

Fig. 524.




$$N = G \cos. \alpha,$$

und diese bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Die Bewegung des Körpers kann nun entweder gleitend oder wälzend sein; berücksichtigen wir zunächst nur die erstere. In diesem Falle nehmen alle Theile des Körpers gleichen Antheil an der Bewegung des Körpers, und haben daher auch eine gemeinschaftliche Acceleration $p$, die sich durch die bekannte Formel:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}, = \frac{P}{M} = \frac{G \sin. \alpha}{G} \cdot g = g \sin. \alpha$$

ausdrücken läßt. Es ist also

$$p : g = \sin. \alpha : 1,$$

d. h. die Beschleunigung eines Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zur Beschleunigung des freien Falles wie der Sinus des Fallwinkels der schiefen Ebene zu Eins. Wegen der hinzutretenden Reibung gewährt aber diese Formel selten hinreichende Genauigkeit; es ist daher nothwendig, in vielen Fällen der Anwendung auch auf diese Rücksicht zu nehmen.

Digitized by Google

Bewegt sich ein Körper auf einer krummen Fläche, so ist die Acceleration veränderlich und an jeder Stelle gleich der Acceleration, welche der Berührungsebene an die krumme Fläche entspricht.

§. 315. Gleitet ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf einer geneigten Ebene ohne Reibung herab, so ist nach §. 11 die Endgeschwindigkeit nach $t$ Secunden:

$$v = g \sin.\alpha . t = 31{,}25 \sin.\alpha . t \text{ Fuß} = 9{,}81 \sin.\alpha . t \text{ Meter},$$

und der zurückgelegte Raum:

$$s = {}^1/_2 g \sin.\alpha . t^2 = 15{,}625 \sin.\alpha . t^2 \text{ Fuß} = 4{,}905 \sin.\alpha . t^2 \text{ Meter}.$$

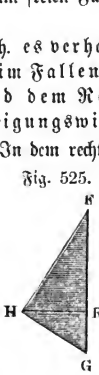
Beim freien Fall ist $v_1 = g t$ und $s_1 = {}^1/_2 g t^2$, es läßt sich daher setzen:

$$v : v_1 = s : s_1 = \sin.\alpha : 1,$$

d. h. es verhalten sich die Endgeschwindigkeit und der Raum beim Fallen auf der schiefen Ebene zur Endgeschwindigkeit und dem Raume beim freien Fallen, wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zur Einheit.

In dem rechtwinkeligen Dreiecke $FGH$, Fig. 525, mit verticaler Hypotenuse $FG$ ist die Kathete:

Fig. 525.




$$FH = FG \sin.FGH = FG . \sin.FHR = \overline{FG} \sin.\alpha,$$

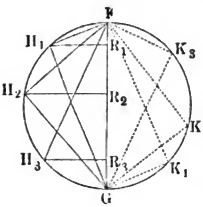
wenn $\alpha$ die Neigung $FHR$ dieser Kathete gegen den Horizont bezeichnet; es ist daher:

$$FH : FG = \sin.\alpha : 1,$$

es durchläuft also ein Körper die verticale Hypotenuse $FG$ und die geneigte Kathete $FH$ in einer und derselben Zeit. Es läßt sich hiernach zu dem Fallraum auf der schiefen Ebene der entsprechende Raum des freien Falles, und zu dem letzteren der erstere durch Construction finden.

Da die auf dem Durchmesser $FG$, Fig. 526, stehenden Peripheriewinkel $FH_1G$, $FH_2G$ u. s. w. lauter rechte sind, so schneidet der Halbkreis über

Fig. 526.




$FG$ von allen in $F$ anfangenden schiefen Ebenen die mit dem Durchmesser, und deshalb auch unter sich, in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume $FH_1$, $FH_2$ u. s. w. ab. Man sagt daher: die Sehnen eines Kreises und der Durchmesser desselben werden gleichzeitig oder isochron durchfallen. Uebrigens gilt dieser Isochronismus nicht allein für die Sehnen $FH_1$, $FH_2$ u. s. w., welche im höchsten Punkte $F$ des Kreises anfangen, sondern auch für die Sehnen $K_1G$, $K_2G$ u. s. w., welche in dem untersten Punkte

Digitized by Google

$G$ deſſelben auslaufen; denn es laſſen ſich durch $F$ Sehnen $FK_1$, $FK_2$ u. ſ. w. ziehen, welche mit den Sehnen $GH_1$, $GH_2$ u. ſ. w. gleiche Lage und gleiche Länge haben.

Aus der Gleichung §. 316

$$s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2g \cdot sin.\alpha}$$ für den durchlaufenen Raum folgt:

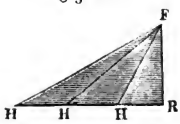
$$s\, sin.\alpha = \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt:

$$v = \sqrt{2g\, s\, sin.\alpha}.$$

Nun iſt aber $s\, sin.\alpha$ die Höhe $FR$ (Fig. 527) der ſchiefen Ebene oder die Verticalprojection $h$ des Weges $FH = s$ auf derſelben; es ſind daher die Endgeſchwindigkeiten von Körpern, welche mit Null Anfangsgeſchwindigkeit von verſchieden geneigten, gleich hohen Ebenen $FH$, $FH_1$ u. ſ. w. herabfallen, unter ſich gleich und auch gleich der Geſchwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe $FR$ dieſer Ebenen frei herabfällt. (Hiermit iſt ſowohl §. 43, als auch §. 85 zu vergleichen).

Fig. 527.




Aus der Gleichung

$$s = {}^1/_2\, g\, sin.\alpha \,.\, t^2$$

folgt die Formel für die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\, sin.\alpha}} = \frac{1}{sin.\alpha}\sqrt{\frac{2s\, sin.\alpha}{g}} = \frac{1}{sin.\alpha}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Für den freien Fall durch die Höhe $FR = h$ iſt aber die Zeit:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

es ergiebt ſich demnach:

$$t : t_1 = 1 : sin.\alpha = s : h = FH : FR,$$

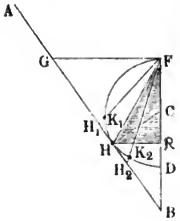
es verhält ſich alſo die Zeit des Fallens auf der ſchiefen Ebene zur Zeit des freien Falles von der Höhe dieſer Ebene wie die Länge zur Höhe der ſchiefen Ebene.

**Beiſpiele.** 1) Von einer ſchiefen Ebene $FH$, Fig. 528 (a. f. S.), iſt der Anfangspunkt $F$ gegeben und der Endpunkt $H$ in einer gegebenen Linie $AB$ ſo zu beſtimmen, daß der Fall auf dieſer Ebene in der kürzeſten Zeit erfolge. Zieht man durch $F$ die Horizontale $FG$ bis zum Durchſchnitt mit $AB$, und macht man $GH = GF$, ſo erhält man in $H$ den geſuchten Punkt, und alſo in $FH$ die Ebene der kürzeſten Fallzeit; denn führt man durch $F$ und $H$ einen ſich an

Digitized by Google

$FG$ und $FH$ tangential anlegenden Kreis, so sind dessen isochron durchlaufene Sehnen $FK_1$, $FK_2$ u. s. w. kürzer als die Längen $FH_1$, $FH_2$ u. s. w. der entsprechenden schiefen Ebenen; es ist folglich auch die Fallzeit für jene Sehnen kleiner, als für diese Längen, und die Fallzeit für die schiefe Ebene $FH$, welche mit einer Sehne zusammenfällt, die kürzeste.

Fig. 528.




2) Man soll die Neigung derjenigen schiefen Ebene $FH$, Fig. 527, angeben, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, als wenn er erst von der Höhe $FR$ frei herabfiele und dann mit der erlangten Geschwindigkeit horizontal bis $H$ fortginge. Die Zeit zum Herabfallen von der senkrechten Höhe $FR = h$ ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

und die erlangte Geschwindigkeit in $R$ ist:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Tritt nun beim Uebergange aus der verticalen Bewegung in die horizontale kein Geschwindigkeitsverlust ein, was erfolgt, wenn die Ecke $R$ abgerundet ist, so wird der Weg $RH = h\,cotg.\,\alpha$ gleichförmig und in der Zeit

$$t_2 = \frac{h\,cotg.\,\alpha}{v} = \frac{h\,cotg.\,\alpha}{\sqrt{2gh}} = \tfrac{1}{2}\,cotg.\,\alpha\,\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

durchlaufen. Die Fallzeit für die schiefe Ebene ist:

$$t = \frac{1}{sin.\,\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

setzen wir daher $t = t_1 + t_2$, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{sin.\,\alpha} = 1 + \tfrac{1}{2}\,cotg.\,\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{tang.\,\alpha}{sin.\,\alpha} = tang.\,\alpha + \tfrac{1}{2},$$

deren Auflösung auf $tang.\,\alpha = \frac{3}{4}$ führt. In der entsprechenden schiefen Ebene verhält sich hiernach die Höhe zur Basis zur Länge wie 3 zu 4 zu 5, und es ist der Neigungswinkel $\alpha = 36^0\,52'\,11''$.

3) Bei einer schiefen Ebene von der gegebenen Basis $a$ ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\,sin.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{2a}{g\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g\,sin.\,2\alpha}};$$

sie fällt daher am kleinsten aus, wenn $sin.\,2\alpha$ am größten, d. i. $= 1$, also $2\alpha^0 = 90^0$, oder $\alpha^0 = 45^0$ ist. Von Dächern mit $45^0$ Neigung fließt daher das Wasser in der kürzesten Zeit herab.

§. 317. Geht die Bewegung auf einer schiefen Ebene mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit $c$ vor sich, so hat man die in §. 13 und §. 14 gefundenen Formeln in Anwendung zu bringen. Hiernach ist für einen auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper die Endgeschwindigkeit:

$$v = c - g\,sin.\,\alpha\,.\,t,$$

und der zurückgelegte Weg:

Digitized by Google

$$s = ct - {}^1/_2\, g \sin.\alpha . t^2,$$

dagegen für den von der schiefen Ebene herabsinkenden Körper:

$$v = c + g \sin.\alpha . t \text{ und } s = ct + {}^1/_2\, g \sin.\alpha . t^2.$$

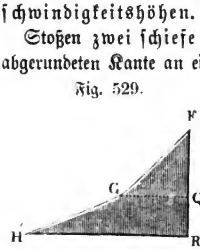
Uebrigens gilt in beiden Fällen der Bewegung die Formel:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2 g \sin.\alpha}, \text{ oder } s \sin.\alpha = h = \frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist also stets die Verticalprojection ($h$) des auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weges ($s$) gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Stoßen zwei schiefe Ebenen $FGQ$ und $GHR$, Fig. 529, in einer abgerundeten Kante an einander, so findet beim Uebergang des fallenden Körpers von der einen Ebene zur anderen kein Stoß, und deshalb auch kein Geschwindigkeitsverlust statt; es gilt deshalb auch für das Herabfallen eines Körpers von dieser Verbindung zweier Ebenen die Regel: Fallhöhe ($FR$) gleich Differenz der Geschwindigkeitshöhen. Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Regel auch bei dem Sinken und Steigen auf einer derartigen Verbindung von beliebig vielen Ebenen, sowie beim Fallen und Aufsteigen auf krummen Linien oder Flächen ihre Richtigkeit behält (vergl. §. 85).

Fig. 529.




Beispiele. 1) Ein Körper steigt mit 21 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene von 22° Neigung hinauf, wie groß ist seine Geschwindigkeit und sein zurückgelegter Weg nach $1{}^1/_2$ Secunden?

Es ist die Geschwindigkeit:

$$v = 21 - 31{,}25 . \sin.22^0 . 1{,}5 = 21 - 31{,}25 . 0{,}3746 . 1{,}5 = 21 - 17{,}56 = 3{,}44 \text{ Fuß},$$

und der Weg:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{21 + 3{,}44}{2} \cdot {}^3/_2 = \frac{24{,}44 . 3}{4} = 18{,}33 \text{ Fuß}.$$

2) Wie hoch erhebt sich ein Körper mit 36 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene von 48° Ansteigen?

Es ist die senkrechte Höhe:

$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}016 . v^2 = 0{,}016 . 36^2 = 20{,}736 \text{ Fuß}.$$

daher der ganze Weg auf der schiefen Ebene:

$$s = \frac{h}{\sin.\alpha} = \frac{20{,}736}{\sin.48^0} = 27{,}903 \text{ Fuß}.$$

Die zur Zurücklegung desselben nöthige Zeit ist:

$$t = \frac{2 . s}{v} = \frac{2 . 27{,}903}{36} = \frac{27{,}903}{18} = 1{,}55 \text{ Secunden}.$$

**Gleiten auf der geneigten Ebene mit Rücksicht auf Reibung.** Die gleitende Reibung übt einen bedeutenden Einfluß auf das §. 318



Digitized by Google

Fallen und Steigen eines Körpers auf einer schiefen Ebene aus. Aus dem Gewichte $G$ des Körpers und aus dem Neigungswinkel $\alpha$ der schiefen Ebene folgt der Normaldruck:

$$N = G \cos. \alpha,$$

und hieraus wieder die Reibung:

$$F = \varphi N = \varphi G \cos. \alpha.$$

Subtrahirt man diese von der Kraft $P = G \sin. \alpha$, mit welcher die Schwerkraft den Körper von der schiefen Ebene herabtreibt, so bleibt die bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha,$$

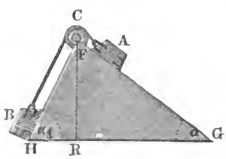
und es ergiebt sich die Beschleunigung des von der schiefen Ebene herabsinkenden Körpers:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \left(\frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G}\right) g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\, g.$$

Bei einem auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper ist die bewegende Kraft negativ und $= G \sin. \alpha + \varphi . G \cos. \alpha$, daher auch die Acceleration $p$ negativ und $= -(\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\, g$.

Sind zwei auf verschiedenen Ebenen $FG$ und $FH$, Fig. 530, befindliche Körper durch eine über eine Leitrolle $C$ gelegte, vollkommen biegsame Schnur mit einander verbunden, so ist es möglich, daß der eine von beiden Körpern sinkt und den anderen mit emporzieht. Bezeichnen wir die Gewichte dieser Körper durch $G$ und $G_1$, und die Neigungswinkel der schiefen Ebenen, auf welchen dieselben fortgleiten, durch $\alpha$ und $\alpha_1$, und nehmen wir an, daß $G$ sinke und $G_1$ mit emporziehe, so erhalten wir als bewegende Kraft:

Fig. 530.




$$P = G \sin. \alpha - G_1 \sin. \alpha_1 - \varphi G \cos. \alpha - \varphi G_1 \cos. \alpha_1$$
$$= G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1),$$

und als bewegte Masse

$$M = \frac{G + G_1}{g},$$

daher die Acceleration, mit welcher $G$ sinkt und $G_1$ steigt:

$$p = \frac{G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1)}{G + G_1} \cdot g.$$

Da die Reibung als widerstehende Kraft keine Bewegung erzeugen kann, so ist für das Sinken von $G$ und Steigen von $G_1$ nöthig, daß

$$G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) > G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1),$$

also

Digitized by Google

$$\frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha}, \text{ d. i. } \frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)}$$

ist. Soll hingegen $G_1$ sinken und $G$ mit emporziehen, so muß sein:

$$\frac{G_1}{G} > \frac{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}, \text{ d. i. } \frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}.$$

So lange aber $\frac{G}{G_1}$ innerhalb der Grenzen

$$\frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha} \text{ und } \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}, \text{ oder}$$

$$\frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)} \text{ und } \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}$$

liegt, so lange wird die Reibung jede Bewegung verhindern.

**Beispiele.** 1) Ein Schlitten gleitet auf einer 150 Fuß langen und 20 Grad fallenden Schneebahn herab und geht, unten angekommen, auf einer horizontalen Schneebahn fort, bis ihn die Reibung in Ruhe versetzt. Wenn nun der Coefficient der Reibung zwischen Schnee und Schlitten, = 0,03 ist, welchen Weg wird der Schlitten, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, auf der horizontalen Ebene zurücklegen?

Es ist die Acceleration des Schlittens:

$$p = (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)\, g = (sin.\,20^0 - 0{,}03\,.\,cos.\,20)\,.\,31{,}25$$
$$= (0{,}3420 - 0{,}03\,.\,0{,}9397)\,.\,31{,}25 = 0{,}3138\,.\,31{,}25 = 9{,}806 \text{ Fuß},$$

daher die Endgeschwindigkeit des Herabgleitens:

$$v = \sqrt{2\,p\,s} = \sqrt{2\,.\,9{,}806\,.\,150} = \sqrt{2941{,}8} = 54{,}24 \text{ Fuß}.$$

Auf der horizontalen Ebene ist die Acceleration:

$$p_1 = -\varphi\, g = -0{,}03\,.\,31{,}25 = -0{,}9375 \text{ Fuß}, \text{ daher der Weg:}$$

$$s_1 = \frac{v^2}{2\,\varphi\, g} = \frac{2941{,}8}{1{,}875} = 1569 \text{ Fuß}.$$

Die Zeit zum Herabgleiten ist:

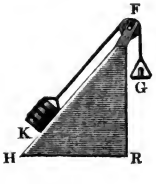
$$t = \frac{2\,s}{v} = \frac{300}{54{,}24} = 5{,}5 \text{ Secunden},$$

und zum Fortgleiten:

$$t_1 = \frac{2\,s_1}{v} = \frac{3138}{54{,}24} = 57{,}8 \text{ Secunden}, \text{ daher die ganze Fahrzeit:}$$

$$t + t_1 = 63{,}3 \text{ Secunden} = 1 \text{ Minute } 3{,}3 \text{ Secunden}.$$

Fig. 531.




2) Ein gefüllter Kübel $K$, Fig. 531, mit 250 Pfund Bruttogewicht, soll durch ein senkrecht niederziehendes Gewicht $G$ von 260 Pfund auf einer schiefen Ebene $FH$ von 70 Fuß Länge und 50° Neigung emporgezogen werden; welche Zeit wird dazu nöthig sein, wenn der Coefficient der Reibung des Kübels auf der Leitung, 0,36 beträgt?



Digitized by Google

Es ist die bewegende Kraft:

$= G - (\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) K = 260 - (\sin. 50^0 + 0{,}36 . \cos. 50^0) . 250$
$= 260 - 0{,}9974 . 250 = 10{,}6$ Pfund;

daher die Beschleunigung:

$$p = \frac{10{,}6}{250 + 260} = \frac{10{,}6}{510} = 0{,}0208 \text{ Fuß},$$

ferner die Zeit der Bewegung:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{140}{0{,}0208}} = \sqrt{6731} = 82{,}04 \text{ Sec.} = 1 \text{ Min. } 22 \text{ Sec.},$$

und die Endgeschwindigkeit:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{140}{82} = 1{,}70 \text{ Fuß}.$$

§. 319 **Rollende Bewegung auf einer schiefen Ebene.** Bei einem von einer schiefen Ebene herabrollenden Wagen wirkt vorzüglich die Axenreibung der Beschleunigung entgegen; ist $G$ das Gewicht des Wagens, $r$ der Axen- und $a$ der Radhalbmesser, so beträgt die Reibung:

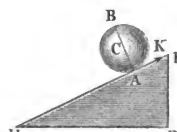
$$\frac{\varphi r}{a} N = \frac{\varphi r}{a} G \cos.\alpha,$$

und daher die Beschleunigung:

$$p = \left(\sin.\alpha - \frac{\varphi r}{a} \cos.\alpha\right) g.$$

Wälzt sich ein runder Körper $AB$, z. B. ein Cylinder oder eine Kugel u. s. w., von einer schiefen Ebene $FH$, Fig. 532, herab, so hat man es mit einer progressiven und drehenden Bewegung zugleich zu thun. In der Regel ist die Acceleration $p$ des Fortschreitens gleich der Acceleration des Drehens (§. 169); setzen wir daher das Trägheitsmoment des sich wälzenden Körpers, $= Gk^2$, und den Halbmesser $CA$ des Wälzens, $= a$, so erhalten wir für die Kraft $\overline{AK} = K$, mit welcher die Walze in Folge des Eingreifens ihrer Theile in die Theile der schiefen Ebene in Umdrehung gesetzt wird:

Fig. 532.




$$K = p \cdot \frac{Gk^2}{g a^2}.$$

Nun wirkt aber die Kraft $K$ der Kraft $G \sin.\alpha$ zum Herablaufen entgegen; es folgt daher die bewegende Kraft für die progressive Bewegung

$$P = G \sin.\alpha - K,$$

und die Beschleunigung derselben:

$$p = \frac{G \sin.\alpha - K}{G} \cdot g.$$

Digitized by Google

Eliminirt man $K$ aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$G\,p = G\,g\,sin.\,\alpha - \frac{G\,k^2}{a^2}\cdot p,$$

folglich die gesuchte Acceleration:

$$p = \frac{g\,sin.\,\alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}}.$$

Bei einem sich wälzenden homogenen Cylinder ist $k^2 = {}^1/_2\,a^2$ (§. 288), daher

$$p = \frac{g\,sin.\,\alpha}{1 + {}^1/_2} = {}^2/_3\,g\,sin.\,\alpha;$$

bei einer Kugel aber $k^2 = {}^2/_5\,a^2$ (§. 290), daher

$$p = \frac{g\,sin.\,\alpha}{1 + {}^2/_5} = {}^5/_7\,g\,sin.\,\alpha;$$

es ist also bei dem rollenden Cylinder die Beschleunigung nur ${}^2/_3$, und bei der rollenden Kugel nur ${}^5/_7$ mal so groß als bei einem ohne Reibung gleitenden Körper.

Die Kraft des Drehens ist:

$$K = \frac{g\,sin.\,\alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}}\cdot\frac{G\,k^2}{g\,a^2} = \frac{G\,k^2\,sin.\,\alpha}{a^2 + k^2}.$$

So lange dieselbe kleiner ist als die gleitende Reibung $\varphi\,G\,cos.\,\alpha$, so lange läuft auch der Körper vollkommen wälzend von der Ebene herab. Ist aber

$$K > \varphi\,G\,cos.\,\alpha,\ \text{d. i.}\ tang.\,\alpha > \varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right),$$

so reicht die Reibung nicht mehr aus, dem Körper eine der fortschreitenden Geschwindigkeit gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen; es ist daher dann die Acceleration des Fortschreitens wie bei der gleitenden Reibung:

$$p = \frac{G\,sin.\,\alpha - \varphi\,G\,cos.\,\alpha}{G}\cdot g = (sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha)\,g,$$

und die der Umdrehung:

$$p_1 = \frac{\varphi\,G\,cos.\,\alpha}{G\,k^2 : a^2}\cdot g = \varphi\,\frac{a^2}{k^2}\,g\,cos.\,\alpha.$$

Bei einem Wagen vom Gewichte $G$ mit Rädern vom Halbmesser $a$ und dem Trägheitsmomente $W_1 = G_1\,k_1^2$ hat man:

$$K = p\,\frac{G_1\,k_1^2}{g\,a^2}\ \text{ und }\ p = \frac{G\,sin.\,\alpha - \varphi\,\frac{r}{a}\,G\,cos.\,\alpha - K}{G}\cdot g,$$

Digitized by Google

d. i.:

$$p = \frac{g\,(\sin.\alpha - \varphi\frac{r}{a}\cos.\alpha)}{1 + \frac{G_1 k_1^2}{G a^2}}.$$

Beispiele. 1) Ein belasteter Wagen von 3600 Pfund Gewicht mit Rädern von 4 Fuß Höhe und 2000 Fußpfund Trägheitsmoment rollt von einer schiefen Ebene mit 12° Neigung herab; welches ist seine Acceleration, wenn der Coefficient der Arenreibung, $\varphi = 0{,}15$, und die Stärke der Radaren, $2r = 3$ Zoll beträgt?

Es ist:

$$\frac{G_1 k_1^2}{G a^2} = \frac{2000}{3600 \,.\, 2^2} = \frac{5}{36} = 0{,}139 \text{ und } \varphi\frac{r}{a} = 0{,}15 \cdot \frac{1}{4 \,.\, 4} = 0{,}0094,$$

daher die gesuchte Beschleunigung:

$$p = \frac{31{,}25\,.\,(\sin.12^0 - 0{,}0094\,.\cos.12^0)}{1 + 0{,}139} = \frac{31{,}25\,.\,(0{,}2079 - 0{,}0094\,.\,0{,}978)}{1{,}139}$$

$$= \frac{31{,}25\,.\,0{,}1987}{1{,}139} = 5{,}452 \text{ Fuß}.$$

2) Mit welchen Accelerationen rollt eine massive Walze von einer schiefen Ebene herab, deren Fallwinkel $\alpha = 40^0$ beträgt?

Ist der Coefficient für die gleitende Reibung der Walze auf der Ebene, $\varphi = 0{,}24$ so hat man:

$$\varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) = 0{,}24\,(1 + 2) = 0{,}72;$$

nun ist aber $tang.\,40^0 = 0{,}839$; es fällt daher $tang.\,\alpha$ größer als $\varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)$, und die Acceleration der rollenden Bewegung kleiner als die der progressiven Bewegung aus. Die letztere ist

$p = (\sin.\alpha - \varphi\cos.\alpha)\,g = (0{,}6428 - 0{,}24\,.\,0{,}7660)\,.\,31{,}25 = 0{,}459\,.\,31{,}25$
$= 14{,}34$ Fuß,

die erstere aber nur

$$p_1 = 0{,}24\,.\,2\,.\,31{,}25\,\cos.40^0 = 15\,.\,0{,}766 = 11{,}49 \text{ Fuß}.$$

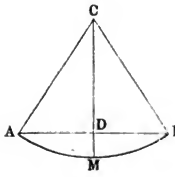
§. 320 **Das Kreispendel.** Ein an einer horizontalen Axe hängender Körper ist im Gleichgewichte, so lange sein Schwerpunkt senkrecht unter der Axe liegt; bringt man aber den Schwerpunkt aus der die Axe enthaltenden Verticalebene, und überläßt man den Körper sich selbst, so nimmt derselbe eine schwingende Bewegung (franz. und engl. oscillation), d. i. eine hin- und hergehende Bewegung im Kreise, an. Im Allgemeinen heißt aber ein um eine horizontale Axe schwingender Körper ein Kreispendel oder Pendel (franz. pendule; engl. pendulum) schlechtweg. Ist der schwingende Körper ein materieller Punkt, und besteht die Verbindung desselben mit der Umdrehungsaxe in einer gewichtslosen Linie, so hat man es mit einem einfachen oder mathematischen Pendel (franz. p. simple und engl. simple p.) zu thun; besteht aber das Pendel in einem ausgedehnten Körper oder aus mehreren Körpern, so heißt dasselbe ein zusammengesetztes, physisches oder materielles Pendel (franz. pendule

Digitized by Google

composé; engl. composed pendulum). Ein solches Pendel läßt sich als eine feste Verbindung von lauter einfachen, um eine gemeinschaftliche Axe schwingenden Pendeln ansehen. Das einfache Pendel ist nur ein eingebildetes, seine Annahme gewährt aber besondere Vortheile, weil es leicht ist, die Theorie der Bewegung des zusammengesetzten Pendels auf die des einfachen Pendels zurückzuführen.

Wird das in $C$ aufgehangene Pendel, Fig. 533, aus seiner verticalen Lage $CM$ in die Lage $CA$ gebracht und nun sich selbst überlassen, so geht es vermöge seiner Schwere mit einer beschleunigten Bewegung nach $CM$ zurück, und es kommt dessen Masse im tiefsten Punkte $M$ mit einer Geschwindigkeit $c$ an, deren Höhe $\frac{c^2}{2g}$ der Fallhöhe $DM$ gleich ist. In Folge dieser Geschwindigkeit durchläuft es nun auf der anderen Seite den Bogen $MB = MA$, und steigt dabei wieder auf die Höhe $DM$. Von $B$ aus fällt es von Neuem nach $M$ und $A$ zurück, und so geht es wiederholt im Kreisbogen $AB$ hin und her. Wäre der Widerstand der Luft und die Axenreibung ganz beseitigt, so würde diese schwingende Bewegung des Pendels ohne Ende fortgehen; weil aber diese Hindernisse nie ganz wegzubringen sind, so werden die Schwingungsbögen mit der Zeit immer kleiner und kleiner, und es geht das Pendel endlich zur Ruhe über.

Fig. 533.




Die Bewegung des Pendels von $A$ bis $B$ nennt man einen Schwung oder Pendelschlag (franz. und engl. oscillation), den Bogen $AB$ selbst aber den Schwingungsbogen (franz. und engl. amplitude); der den halben Schwingungsbogen messende Winkel, um welchen sich das Pendel zu beiden Seiten von der Lothlinie $CM$ entfernt, heißt der Elongationswinkel, Ausschlagswinkel oder Ausschlag schlechtweg. Die Zeit, in welcher das Pendel eine Oscillation macht, heißt endlich Schwingungszeit oder Schwingungsdauer (franz. durée d'une oscillation; engl. time of oscillation).

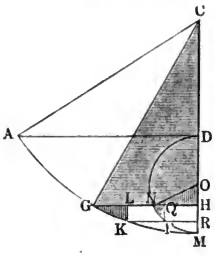
**Theorie des einfachen Kreispendels.** Wegen der häufigen Anwendung der Pendel im praktischen Leben, namentlich bei Uhren, ist es wichtig, die Schwingungszeiten derselben zu kennen; die Bestimmung derselben ist daher eine Hauptaufgabe der Mechanik. Setzen wir in der Absicht, diese Aufgabe zu lösen, die Pendellänge $AC = MC = r$, Fig. 534 (a. f. S.), und die einem ganzen Schwunge entsprechende Fall- oder Steighöhe $MD = h$. Nehmen wir nun an, daß das Pendel von $A$ nach $G$ gefallen sei, und setzen §. 321

Digitized by Google

wir die dieser Bewegung entsprechende Fallhöhe $DH = x$, so können wir die in $G$ erlangte Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gx},$$

Fig. 534.




und das Zeittheilchen, innerhalb dessen der Wegtheil $GK$ durchlaufen wird,

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

setzen. Beschreiben wir nun aus der Mitte $O$ von $MD = h$ und mit dem Halbmesser $OM = OD = \frac{1}{2}h$ einen Halbkreis $MND$, so können wir von diesem einen Bogentheil $NP$ angeben, welcher mit $GK$ gleiche Höhe $PQ = KL = RH$ hat und in einfacher Beziehung zu diesem Wegtheile $GK$ steht. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $GKL$ und $CGH$ ist

$$\frac{GK}{KL} = \frac{CG}{GH},$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $NPQ$ und $ONH$ ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH};$$

dividiren wir daher diese beiden Proportionen durch einander und berücksichtigen wir, daß $KL = PQ$ ist, so erhalten wir das Verhältniß der genannten Bogentheile:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG.NH}{GH.ON}.$$

Der Lehre vom Kreise, und insbesondere dem Theorem von der mittleren Proportionallinie zufolge ist aber

$$\overline{GH}^2 = MH\,(2\,CM - MH) \text{ und } \overline{NH}^2 = MH.DH,$$

es folgt daher:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG.\sqrt{DH}}{ON.\sqrt{2\,CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}},$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines Wegelementes:

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2r}{h\sqrt{2g[2r - (h - x)]}} \cdot NP$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{NP}{h\sqrt{1 - \frac{h - x}{2r}}}.$$

Digitized by Google

In den meiſten Fällen der Anwendung geſtattet man dem Pendel nur einen kleinen Ausſchlag, und es iſt deshalb $\frac{h}{2r}$, ſowie $\frac{x}{2r}$, und alſo auch $\frac{h-x}{2r}$ eine ſo kleine Größe, daß wir ſie ſelbſt, ſowie ihre höheren Potenzen, außer Acht laſſen, und nun

$$\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

ſetzen können. Die Dauer eines halben Schwunges, oder die Zeit, innerhalb welcher das Pendel den Bogen $AM$ zurücklegt, iſt gleich der Summe von allen, den Elementen $GK$ oder $NP$ entſprechenden Zeittheilchen, oder, da $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ ein conſtanter Factor iſt, gleich $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Summe aller den Halbkreis $DNM$ bildenden Elemente, d. i. $= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis $\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ ſelbſt, alſo

$$t_1 = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Dieſelbe Zeit braucht aber auch das Pendel beim Aufſteigen, weil hier die Geſchwindigkeiten dieſelben ſind und nur in der Richtung entgegengeſetzt vorkommen, und deshalb iſt denn eine ganze Schwingungsdauer doppelt ſo groß, d. i.

$$t = 2t_1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

**Schärfere Formel für die Schwingungszeit des Kreispendels.** (§. 322) Um die Schwingungsdauer mit größerer Genauigkeit zu beſtimmen, welches zumal bei größeren Schwingungswinkeln nothwendig iſt, verwandeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h-x}{2r}}} = \left(1-\frac{h-x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

in die Reihe:

$$1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h-x}{2r} + \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots,$$

ſo daß wir die Zeit für ein Wegelement:

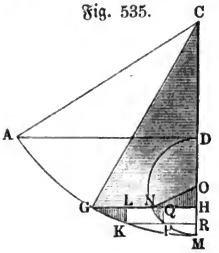
$$\tau = \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h-x}{2r} + \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

erhalten.

Digitized by Google

Setzen wir den Centriwinkel $DON = \varphi^0$, also den Bogen

Fig. 535.




$$DN = \overline{DO} \cdot \varphi = \frac{h\varphi}{2},$$

so erhalten wir die Höhe

$$MH = h - x = MO - HO = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} cos.\varphi = (1 + cos.\varphi)\frac{h}{2};$$

daher das Zeitelement:

$$\tau = \left[1 + {}^1/_2 . (1 + cos.\varphi)\frac{h}{4r} + {}^3/_8 (1 + cos.\varphi)^2 \left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$ oder da

$$(1 + cos.\varphi)^2 = 1 + 2\,cos.\varphi + (cos.\varphi)^2 = 1 + 2\,cos.\varphi + \frac{1 + cos.2\varphi}{2}$$
$$= {}^3/_2 + 2\,cos.\varphi + {}^1/_2 cos.2\varphi \text{ ist,}$$

$$\tau = \left[1 + {}^1/_2(1 + cos.\varphi)\frac{h}{4r} + {}^3/_8({}^3/_2 + 2\,cos.\varphi + {}^1/_2 cos.2\varphi)\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$
$$= \left[1 + {}^1/_2\frac{h}{4r} + {}^9/_{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots + \left({}^1/_2\frac{h}{4r} + {}^3/_4\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right) cos.\varphi + ({}^3/_{16} + \cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2 cos.2\varphi + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$
$$= \left(\left[1 + {}^1/_2\frac{h}{4r} + {}^9/_{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\frac{NP}{h} + \left[{}^1/_2\frac{h}{4r} + {}^3/_4\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right] \cdot \frac{\overline{NP}\,cos.\varphi}{h} + ({}^3/_{16} + \cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2 \frac{\overline{NP}\,cos.2\varphi}{h}\right)\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Nun ist aber die Summe aller Elemente $NP$ = Bogen $DNP = \frac{\varphi h}{2}$, ferner $\overline{NP}\,cos.\varphi = NQ$, und die Summe aller $NQ$ = Ordinate $NH = \frac{h}{2} sin.\varphi$, sowie die Summe aller $\frac{2\overline{NP}\,cos.2\varphi}{h} = sin.2\varphi$, daher läßt sich die Fallzeit des Bogens $AG$:

$$t_1 = \left(\left[1 + {}^1/_2 \cdot \frac{h}{4r} + {}^9/_{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\varphi + \left[{}^1/_2\frac{h}{4r} + {}^3/_4\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right] sin.\varphi + ({}^3/_{16} + \cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2 \frac{sin.2\varphi}{2}\right) \cdot {}^1/_2\sqrt{\frac{r}{g}}$$ setzen.

Digitized by Google

Die Zeit zum Durchlaufen des Bogens $AM$ ist, da hier $\varphi = \pi$, $\sin.\varphi = \sin.\pi$, sowie $\sin.2\varphi = \sin.2\pi, = 0$ wird,

$$t_1 = \left[1 + {}^1/_2 \cdot \frac{h}{4r} + {}^3/_8 \cdot {}^3/_2 \cdot \left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right] \pi \cdot {}^1/_2 \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$= \left[1 + ({}^1/_2)^2 \cdot \frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \cdots\right] \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da die Geschwindigkeit beim Steigen auf der anderen Seite genau so abnimmt, wie sie beim Durchfallen der Bogenhälfte $AM$ wächst, so ist die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens, oder die sogenannte Schwingungsdauer:

$$t = 2t_1 = \left[1 + ({}^1/_2)^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots\right] \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schwingt das Pendel im Halbkreise, so hat man $h = r$, und daher die Schwingungszeit:

$$t = \left(1 + {}^1/_8 + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + \cdots\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}180\,\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist der Schwingungsbogen viel kleiner als der Halbkreis, und die Formel

$$t = \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

hinreichend genau.

Aus dem Elongationswinkel $\alpha$ folgt $\cos.\alpha = \frac{r-h}{r} = 1 - \frac{h}{r}$, also $\frac{h}{r} = 1 - \cos.\alpha$, und daher:

$$\frac{h}{8r} = {}^1/_4 \cdot \frac{1 - \cos.\alpha}{2} = {}^1/_4 \left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2;$$

es läßt sich folglich hiernach die einem gegebenen Elongationswinkel entsprechende Correction der Schwingungszeit finden. Ist z. B. dieser Winkel $\alpha = 15^0$, so hat man:

$$\frac{h}{8r} = {}^1/_4 \left(\sin.\frac{15^0}{2}\right)^2 = 0{,}00426,$$

dagegen für $\alpha = 5^0$:

$$\frac{h}{8r} = 0{,}00047;$$

bei dem letzten Elongationswinkel ist also die Schwingungsdauer:

$$t = 1{,}00047 \cdot \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Digitized by Google

Man kann also bei einem Ausschlag unter 5° ziemlich genau die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r} = 0{,}562 \sqrt{r}$$

setzen.

§. 323 **Pendellängen.** Da in der Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

der Ausschlagswinkel nicht vorkommt, so folgt auch, daß die Dauer kleiner Pendelschwingungen gar nicht von diesem Winkel abhängt, daß also verschiedene, jedoch nicht weit ausschlagende gleich lange Pendel isochron schwingen oder gleiche Schwingungszeiten haben. Ein Pendel mit 4 Grad Ausschlag hat also (fast) dieselbe Schwingungsdauer, als ein Pendel mit 1 Grad Ausschlag.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer $t$ mit der Zeit $t_1$ des freien Falles, so stoßen wir auf Folgendes. Die Zeit zum freien Fallen von der Höhe $r$ ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}},$$

daher folgt

$$t : t_1 = \pi : \sqrt{2};$$

die Zeit eines Pendelschwunges verhält sich also zur Zeit, in welcher ein Körper von einer der Pendellänge gleichen Höhe frei herabfällt, wie die Ludolph'sche Zahl $\pi$ zur Quadratwurzel aus 2. Die Zeit zum Durchfallen von $2r$ ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2r}{g}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}};$$

daher verhält sich auch die Schwingungsdauer zur Zeit des Fallens von einer der doppelten Pendellänge gleichen Höhe wie $\pi$ zu 2.

Setzen wir die den Pendellängen $r$ und $r_1$ entsprechenden Schwingungszeiten $t$ und $t_1$, so erhalten wir:

$$t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1};$$

es verhalten sich also bei einer und derselben Beschleunigung der Schwere die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Ist dagegen $n$ die Zahl der Schwingungen, welche das eine Pendel in einer gewissen Zeit, z. B. in der Minute, macht, und $n_1$ die Zahl, welche in derselben Zeit vom anderen Pendel gemacht werden, so hat man:

$$t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1},$$

Digitized by Google

daher umgekehrt:

$$n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r},$$

d. h. die Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Das viermal so lange Pendel giebt also die halbe Schwingungszahl.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel (franz. pendule à seconde; engl. seconds pendulum), wenn seine Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Setzen wir in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, $t = 1$, so bekommen wir die Länge des Secundenpendels, $r = \frac{g}{\pi^2}$, für das preußische Fußmaß

$$r = 3{,}1662 \text{ Fuß} = 38 \text{ Zoll};$$

für das Metermaß aber

$$r = 0{,}9938 \text{ Meter}.$$

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ folgt durch Umkehrung, $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$; es läßt sich also hiernach aus der Länge $r$ eines Pendels und aus der Schwingungsdauer $t$ desselben die Beschleunigung $g$ der Schwere finden. Diese Methode ist sogar einfacher und sicherer als die Anwendung der Atwood'schen Fallmaschine.

Anmerkung. Durch Pendelbeobachtungen hat man auch die Abnahme der Schwerkraft, von den Polen nach dem Aequator zu, nachgewiesen und deren Größe bestimmt. Diese Abnahme hat ihren Grund in dem Einflusse der Centrifugalkraft, welche aus der täglichen Umdrehung der Erde um ihre eigene Axe entspringt, sowie in der Zunahme der Erdhalbmesser von den Polen nach dem Aequator zu. Die Centrifugalkraft vermindert z. B. im Aequator die Schwere um $\frac{1}{290}$ ihres Werthes (§. 302), während sie unter den Polen selbst Null ist. Ist $\beta$ die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man, Pendelbeobachtungen zufolge, an diesem Orte die Acceleration der Schwere:

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259\ \cos.2\beta) \text{ in Metern},$$

also unter dem Aequator, wo $\beta = 0$, also $\cos.2\beta = 1$ ist,

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259) = 9{,}780 \text{ Meter},$$

und unter den Polen, wo $\beta = 90^0$, also $\cos.2\beta = \cos.180^0 = -1$ ist,

$$g = 9.8056 . 1{,}00259 = 9{,}831 \text{ Meter}.$$

Uebrigens ist $g$ auf Bergen kleiner als im Niveau des Meeres.

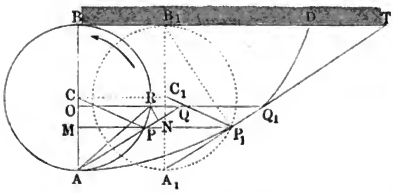
**Cycloide.** Man kann auf unendlich mannigfaltige Weise einen Körper in Schwingungen oder hin- und hergehende Bewegungen versetzen, nennt wohl auch jeden in einem dieser Bewegungszustände befindlichen Körper ein Pendel, und unterscheidet hiernach verschiedene Arten von Pendeln, wie z. B. das Kreispendel, welches wir im Vorstehenden betrachtet haben, ferner das Cycloidenpendel, wo der Körper in Folge seiner Schwere in einem Cycloidenbogen hin- und herschwingt, ferner das Torsionspen- §. 324

Digitized by Google

del, wo der Körper in Folge der Torsion eines Fadens oder Drahtes schwingt, u. s. w. Hier möge nur noch vom Cycloidenpendel die Rede sein.

Die Cycloide (franz. cycloide; engl. cycloid) $A P_1 D$, Fig. 536, ist eine krumme Linie, welche von jedem Punkte $A$ eines Kreises $APB$ beschrieben wird, der sich auf einer geraden Linie $BD$ wälzt. Hat sich dieser Erzeugungskreis um $BB_1 = CC_1$ fortgewälzt, ist er also in die Lage $A_1 B_1$ gekommen, so hat er sich auch um den Bogen $AP = A_1 P_1 = BB_1 = PP_1$ gedreht, es ist folglich die irgend einer Abscisse $AM$ entsprechende Ordinate $MP_1$ = Ordinate $MP$ des Kreises plus Drehungsbogen $AP$. Bei diesem Wälzen dreht sich der Erzeugungskreis um den jedesmaligen Berührungspunkt in der Grundlinie $BD$, steht er also in $A_1 B_1$, so dreht er sich um $B_1$ und beschreibt dadurch das Bogenelement $P_1 Q_1$ der Cycloide; es ist folglich die Sehne $B_1 P_1$ die Richtung der Normale, und die Sehne $A_1 P_1$ die der Tangente $P_1 T$ im Punkte $P_1$ der Cycloide. Die bis zur Ordinate $OQ_1$ reichende Verlängerung $PQ$ der Sehne $AP$ ist auch gleich dem Cycloidenelemente $P_1 Q_1$; da ferner der Weg $PR$ des Drehens gleich ist dem Wege $RQ$ des Fortschreitens, so ist $PQ$ Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes $PRQ$ und gleich der doppelten Linie $PN$, welche das Perpendikel $RN$ abschneidet; endlich ist aber $PN$ die Differenz von zwei benachbarten Sehnen $AR$ und $AP$, und folglich das Cycloidenelement $P_1 Q_1$ = der doppelten Sehnendifferenz $(AR - AP)$. Da die stetig auf einander folgenden Bogenelemente zusammen einen ganzen Bogen $AP_1$, und ebenso die sämmtlichen Sehnendifferenzen die ganze Sehne $AP$ ausmachen, so ist hiernach die Länge des Cycloidenbogens $AP_1$ gleich dem Doppelten der ihm zugehörigen Kreissehne $AP$. Der halben Cycloide $AP_1 D$ entspricht der Durchmesser als Kreissehne; es ist daher die Länge der halben Cycloide gleich dem doppelten Durchmesser $(2AB)$ des Erzeugungskreises.

Fig. 536.

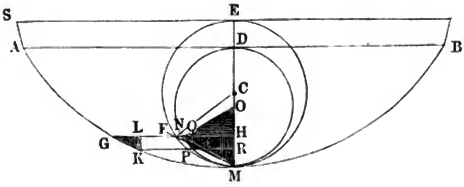



§. 325 **Cycloidenpendel.** Aus den im Vorstehenden entdeckten Eigenschaften der Cycloide läßt sich nun die Theorie des Cycloidenpendels, oder die Formel für die Zeit der Schwingung eines Körpers in einem Cycloidenbogen leicht entwickeln. Es sei $AKM$, Fig. 537, die Hälfte des Cycloidenbogens, in

Digitized by Google

welchem ein Körper fällt und steigt oder oscillirt, und $ME$ sei der Erzeugungskreis, also $CE = CM = r$ der Halbmesser desselben. Hat der

Fig. 537.




Körper den Bogen $AG$ durchlaufen, ist er also von der Höhe $DH = x$ herabgefallen (vergl. §. 321), so hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ erlangt, mit welcher er das Bogenelement $GK$ in der Zeit

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

durchläuft. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $GLK$ und $FHM$ ist aber

$$\frac{GK}{KL} = \frac{FM}{MH},$$

oder, da $\overline{FM}^2 = MH.ME$,

$$\frac{GK}{KL} = \frac{\sqrt{MH.ME}}{MH} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}};$$

wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $NPQ$ und $ONH$ ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH},$$

oder, da $\overline{NH}^2 = MH.DH$,

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{\sqrt{MH.DH}}.$$

Nun ist $KL = PQ$, daher folgt durch Division:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}} \cdot \frac{\sqrt{MH.DH}}{ON} = \frac{\sqrt{ME.DH}}{ON},$$

oder, da $ON$ die halbe Fallhöhe $= \frac{h}{2}$, $ME = 2r$ und $DH = x$ ist,

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{2rx}}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\sqrt{2rx}}{h}.$$

Digitized by Google

Setzt man nun $GK = \frac{2\sqrt{2rx}}{h} \cdot \overline{NP}$ in die Formel $\tau = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$, so erhält man:

$$\tau = \frac{2\sqrt{2rx}}{\sqrt{2gx}.h} \cdot NP = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \overline{NP}.$$

Die Zeit des Fallens von $A$ bis $M$ ist nun die Summe aller Werthe von $\tau$, welche man erhält, wenn man für $NP$ nach und nach alle Theile des Halbkreises $DNM$ einführt, also

$$= \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ mal Halbkreis } DNM\left(\frac{\pi}{2}h\right).$$

Auf diese Weise erhält man die Zeit zum Durchfallen des Bogens $AM$:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}h \cdot \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

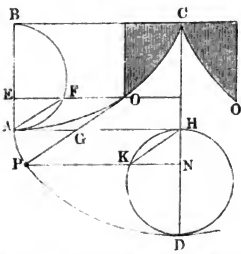
und da die Zeit des Steigens im Bogen $MB$ ebenso groß ist, die Schwingungszeit oder Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens $AMB$:

$$t = 2t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Da diese Größe ganz unabhängig ist von der Bogenlänge, so folgt, daß mathematisch genau die Schwingungszeiten für alle Bögen einer und derselben Cycloide gleich sind, das Cycloidenpendel also vollkommen isochron schwingt. Vergleichen wir diese Formel mit der Formel für die Schwingungsdauer eines Kreispendels, so folgt, daß die Schwingungszeiten für beide Pendelarten einander gleich sind, wenn die Länge des Kreispendels gleich ist dem vierfachen Halbmesser von dem Erzeugungskreise des Cycloidenpendels.

Anmerkung. Um einen an einem biegsamen Faden hängenden Körper in einem Cycloidenbogen schwingen lassen zu können und dadurch ein Cycloidenpendel herzustellen, hängt man denselben zwischen zwei Cycloidenbögen $CO$ und $CO_1$, Fig. 538, auf, so daß sich der Faden bei jedem Ausschlage von dem einen Bogen ab- und auf den anderen aufwickelt. Daß bei diesem Ab- und Aufwickeln des Fadens $COP$ der Endpunkt $P$ desselben eine der gegebenen Cycloide gleiche Curve beschreibt, daß also die Evolvente der Cycloide eine gleiche Cycloide in umgekehrter Lage ist, läßt sich einfach so darthun. So wie die Länge der halben Cycloide $COA = CD = 2AB$ ist, ebenso hat man den Bogen $OA =$ der abgewickelten Geraden $OP$; aber Bogen $OA$ ist $=$ zweimal Sehne $AF = 2GO$, daher auch $PG = GO = AF$

Fig. 538.



und $HN = AE$. Beschreibt man nun über $DH = AB$ einen Halbkreis $DKH$, und zieht man die Ordinate $NP$, so hat man $KH = PG$, und daher auch

$$PK = GH = AH - AG = AH - FO = \text{Bog. } AFB - \text{Bog. } AF = \text{Bog. } BF = \text{Bog. } DK,$$

und endlich die Ordinate $NP =$ Kreisordinate $NK$ plus entsprechender Bögen $DK$; es ist also $NP$ die Ordinate einer Cycloide $DPA$, welche dem Erzeugungskreise $DKH$ entspricht.

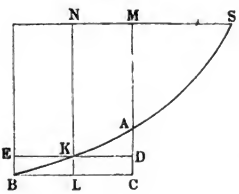
Ueber die Anwendung des Cycloidenpendels bei Uhren s. „Jahrbücher des polytechn. Institutes in Wien", Bd. 20, Art. II. Auch Prechtl's technologische Encyklopädie, Bd. 19.

**Die Curve der kürzesten Fallzeit.** Es läßt sich mittels des höheren Calculs nachweisen, daß die Cycloide außer dieser Eigenschaft des Isochronismus oder Tautochronismus auch noch die des Brachystochronismus besitzt, daß sie nämlich diejenige Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ist, in welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte nach dem anderen herabfällt. (§. 326)

Der Beweis hierzu läßt sich, nach Jacob Bernoulli, auf folgende Weise führen.

Es sei die relative Lage zweier Punkte $A$ und $B$, Fig. 539, durch den verticalen Abstand $AC = a$ und den horizontalen Abstand $BC = b$ und die einer horizontalen Linie $DE$ durch den verticalen Abstand $AD = h$ gegeben; man sucht den Punkt $K$, in welchem ein von $A$ nach $B$ fallender Körper die Linie $DE$ durchschneiden muß, um in der kürzesten Zeit von $A$ nach $B$ zu gelangen. Kommt der Körper in $A$ mit der Geschwindigkeit $v$ an, so ist die Geschwindigkeit in $K$:

Fig. 539.




$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh};$$

setzen wir nun voraus, daß die Punkte $A$, $K$ und $B$ einander unendlich nahe liegen, oder daß $a$, $b$ und $h$ sehr klein sind gegen $v$, so können wir auch annehmen, daß $AK$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v$, und $KB$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_1$ durchlaufen werde, daß also die Zeit zum Durchfallen des Weges $AKB$,

$$t = \frac{AK}{v} + \frac{KB}{v_1} \text{ sei.}$$

Bezeichnen wir $DK$ durch $x$, so haben wir:

$$AK = \sqrt{h^2 + x^2} \text{ und } KB = \sqrt{(a-h)^2 + (b-x)^2},$$

und daher:



Digitized by Google

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}}{v_1}.$$

Diese Zeit wird nun ein Minimum, wenn wir ihr erstes Differentialverhältniß, d. i.

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{z}{v\sqrt{h^2 + z^2}} - \frac{b-z}{v_1\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}} = \text{Null}$$

setzen.

Nun ist aber

$$\frac{z}{\sqrt{h^2 + z^2}} = \frac{KD}{KA} = cos.\, AKD = cos.\, \varphi$$

und

$$\frac{b-z}{\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}} = \frac{BL}{BK} = cos.\, KBL = cos.\, \varphi_1,$$

wofern wir die Neigungswinkel der Wege $AK$ und $KB$ gegen den Horizont mit $\varphi$ und $\varphi_1$ bezeichnen; daher erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$\frac{cos.\, \varphi}{v} = \frac{cos.\, \varphi_1}{v_1}.$$

Setzen wir die den Geschwindigkeiten $v$ und $v_1$ entsprechenden Fallhöhen $MA = y$ und $NK = y_1$, also

$$v = \sqrt{2gy} \text{ und } v_1 = \sqrt{2gy_1},$$

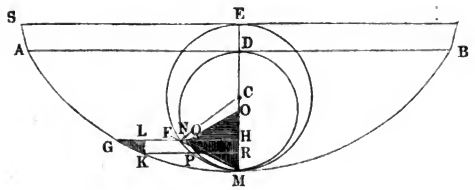
so geht unsere Gleichung in folgende

$$\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}} = \frac{cos.\, \varphi_1}{\sqrt{y_1}}$$

über, und wenden wir nun unseren Fall auf das Fallen in einer krummlinigen Bahn $SAKB$ an, so folgt hiernach, daß für jede Stelle in dieser Curve der Quotient $\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}}$ eine constante Zahl, etwa $= \frac{1}{\sqrt{2r}}$ ist.

Diese Eigenschaft entspricht aber einer Cycloide $SGM$, Fig. 540, denn es ist für ein Wegelement $GK$ dieser Curve:

Fig. 540.




Digitized by Google

$$\cos.\varphi = \frac{GL}{GK} = \frac{FH}{FM} = \frac{\sqrt{MH.EH}}{\sqrt{MH.EM}} = \sqrt{\frac{EH}{EM}} = \sqrt{\frac{y}{2r}},$$

und daher:

$$\frac{\cos.\varphi}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

wobei $r$ den Halbmesser $CM = CE$ des Erzeugungskreises $EFM$ bezeichnet.

Es ist also ein Cycloidenbogen $SG$ derjenige, in welchem ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Punkte $S$ nach einem anderen $G$ herabfällt.

**Das materielle Pendel.** Um die Schwingungszeit eines zusammengesetzten Pendels oder irgend eines um eine horizontale Axe $C$ schwingenden Körpers $AB$, Fig. 541, zu finden, suchen wir zunächst den Mittelpunkt des Schwunges oder Schwingungspunkt (franz. centre d'oscillation; engl. center of oscillation), d. i. denjenigen Punkt $K$ des Körpers auf, welcher, wenn er für sich allein um $C$ schwingt oder ein mathematisches Pendel ausmacht, dieselbe Schwingungsdauer hat wie der ganze Körper. Man sieht leicht ein, daß es dieser Erklärung zufolge mehrere Schwingungspunkte in einem Körper giebt; gewöhnlich meint man aber nur denjenigen von ihnen, welcher mit dem Schwerpunkte in einem und demselben Perpendikel zur Umdrehungsaxe liegt. §. 327

Fig. 541.

Aus dem veränderlichen Ausschlagswinkel $KCF = \varphi$ folgt die Beschleunigung des isolirten Punktes $K$:

$$= g \sin.\varphi,$$

weil man sich vorstellen kann, daß derselbe von einer schiefen Ebene mit der Neigung $KHR = KCF = \varphi$ herabgleitet. Ist aber $Mk^2$ das Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der Körperverbindung $AB$, $Ms$ dessen statisches Moment, d. i. das Product aus der Masse und aus dem Abstande $CS = s$ ihres Schwerpunktes $S$ von der Umdrehungsaxe $C$, und $r$ die Entfernung $CK$ des Schwingungspunktes $K$ von der Umdrehungsaxe oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem materiellen Pendel $AB$ isochron schwingt, so hat man die auf $K$ reducirte Masse:

$$= \frac{Mk^2}{r^2},$$

und die dahin reducirte Umdrehungskraft:

$$= \frac{s}{r} Mg \sin.\varphi;$$

folglich die Beschleunigung:



Digitized by Google

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r} Mg \sin. \varphi : \frac{Mk^2}{r^2} = \frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \sin. \varphi.$$

Damit dieses Pendel mit dem mathematischen einerlei Schwingungsdauer habe, ist nöthig, daß beide an jeder Stelle ihrer Bewegung einerlei Beschleunigung besitzen, daß also

$$\frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \sin. \varphi = g \sin. \varphi$$

sei. Diese Gleichung giebt nun

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Entfernung des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels durch sein statisches oder Gewichtsmoment dividirt.

Setzt man diesen Werth von $r$ in die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, so erhält man für die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{gs}},$$

oder genauer:

$$t = \pi \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \sqrt{\frac{k^2}{gs}}.$$

Umgekehrt läßt sich aus der Schwingungsdauer eines aufgehängten Körpers sein Trägheitsmoment finden, indem man setzt:

$$Mk^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \cdot Mgs \quad \text{oder} \quad k^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs.$$

Anmerkung 1. Um das Trägheitsmoment $Mk^2$ eines Körpers aus der Schwingungsdauer desselben bestimmen zu können, ist nöthig, daß man das statische Moment $Mgs = Gs$ desselben kenne. Das letztere findet man dadurch, daß man den Körper $AC$, Fig. 542, durch ein Seil $ABD$ aus seiner Gleichgewichtslage bringt, welches über eine Leitrolle gelegt und durch Gewichte $P$ gespannt wird. Das Perpendikel $CN$ von der Drehungsaxe $C$ gegen die Richtung des Seiles $AB$ ist der Hebelarm $a$ des Gewichtes $P$, und $Pa$ ist gleich dem Momente $G \,.\, \overline{CH}$ des im Schwerpunkte $S$ niederziehenden Gewichtes $G$. Bezeichnet $\alpha$ den Winkel $VCS = CSH$, um welchen der Körper durch die Kraft $P$ gehoben wird, so hat man noch:

$$\overline{CH} = \overline{CS} \sin. \alpha = s \sin. \alpha,$$

folglich:

$$Gs \sin. \alpha = Pa,$$

und das gesuchte statische Moment:

$$Gs = \frac{Pa}{\sin. \alpha}.$$

Digitized by Google

Anmerkung 2. Ein sehr einfaches und brauchbares Pendel $ADF$, Fig. 543, besteht in einer Bleikugel $A$ von ungefähr 1 Zoll Durchmesser, [und in einem

Fig. 542.

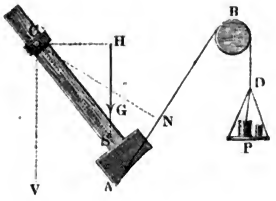
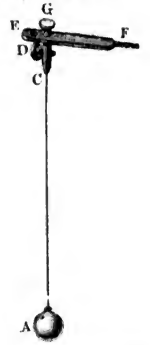



Fig. 543.




seidenen Faden, dessen oberes Ende $C$ von einer Zwinge $D$ mit einer Preßschraube festgehalten wird. Diese Zwinge wird durch einen Arm $EF$ gesteckt und mit demselben durch eine Schraube $G$ fest verbunden, nachdem man ihn mittels seines schraubenförmig zugeschnittenen Endes $F$ in einen Thürstock oder einen anderen festen Punkt eingebohrt hat. Bei einer Länge $CA = 0{,}2485$, also nahe $^1/_4$ Meter, schlägt dieses Pendel halbe Secunden, und zwar fast eine Stunde lang, wiewohl in immer kleineren und kleineren Bögen.

Beispiele. 1) Für eine gleichförmig dichte prismatische Stange $AB$, Fig. 544, deren Drehpunkt $C$ um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ von den Enden $A$ und $B$ absteht, hat man, wenn $F$ den Querschnitt dieser Stange bezeichnet, das Trägheitsmoment nach §. 286:

$$Mk^2 = {}^1/_3 F (l_1^3 + l_2^3),$$

und das statische Moment:

$$Ms = {}^1/_2 F (l_1^2 - l_2^2);$$

es ist daher die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dieser Stange isochron schwingt:

Fig. 544.

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l^2 + 3d^2}{6d},$$

wenn $l$ die Summe $l_1 + l_2$, und $d$ die Differenz $l_1 - l_2$ bezeichnet. Soll diese Stange halbe Secunden schlagen, so hat man:

$$r = {}^1/_4 \cdot \frac{g}{\pi^2} = {}^1/_4 . 38 = 9{,}5 \text{ Zoll},$$

beträgt aber die ganze Länge $l$ der Stange 12 Zoll, so ist zu setzen

$$9{,}5 = \frac{144 + 3d^2}{6d} \text{ oder } d^2 - 19d = -48,$$

es folgt daher:

$$d = \frac{19 - \sqrt{169}}{2} = 3,$$

und hieraus:

$l_1 = \frac{l+d}{2} = 15/2 = 7\frac{1}{2}$ Zoll, sowie $l_2 = \frac{l-d}{2} = 9/2 = 4\frac{1}{2}$ Zoll.

2) Für ein Pendel mit kugelförmiger Linse $AB$, Fig. 545, ist, wenn $G$ das Gewicht und $l$ die Länge $CA$ der Stange oder des Fadens, dagegen $K$ das Gewicht der Kugel und $r_1$ ihren Halbmesser $MA = MB$ bezeichnet:

Fig. 545.

$$r = \frac{\frac{1}{3}Gl^2 + K[(l+r_1)^2 + \frac{2}{5}r_1^2]}{\frac{1}{2}Gl + K(l+r_1)}.$$

Wiegt nun der Draht 0,05 Pfund und die Kugel 1,5 Pfund, ist ferner die Länge des Drahtes 1 Fuß, und der Halbmesser der Kugel 1,15 Zoll, so hat man die Entfernung des Schwingungspunktes dieses Pendels von der Drehungsaxe:

$$r = \frac{\frac{1}{3}.0{,}05.12^2 + 1{,}5.(13{,}15^2 + \frac{2}{5}.1{,}15^2)}{\frac{1}{2}.0{,}05.12 + 1{,}5.13{,}15} = \frac{2{,}4 + 260{,}177}{0{,}3 + 19{,}725}$$

$$= \frac{262{,}577}{20{,}025} = 13{,}112 \text{ Zoll}.$$

Ohne Rücksicht auf den Draht wäre $r = \frac{260{,}177}{19{,}725} = 13{,}190$ Zoll; und die träge Masse der Kugel, in ihrem Centro angenommen, wäre $r = 13{,}15$ Zoll. Die Schwingungszeit dieser Kugel ist:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}562\sqrt{\frac{13{,}112}{12}} = 0{,}562\sqrt{1{,}0926\ldots} = 0{,}5874 \text{ Secunden}.$$

§. 328 **Reciprocität des Aufhängepunktes und des Schwingungspunktes.** Der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels sind wechselseitig (franz. réciproque; engl. reciprocal), d. h. es kann der eine mit dem anderen vertauscht, also das Pendel im Schwingungspunkte aufgehangen werden, ohne daß die Schwingungszeit eine andere wird. Der Beweis dieses Satzes führt sich mit Hülfe des §. 284 auf folgende Weise. Ist $W$ das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels $AB$, Fig. 546, in Hinsicht auf eine Umdrehung um den Schwerpunkt $S$, so hat man dasselbe für eine Umdrehung um die Axe $C$, welche um $CS = s$ vom Schwerpunkte $S$ absteht,

Fig. 546.

$$W_1 = W + Ms^2,$$

und daher den Abstand des Schwingungspunktes $K$ von der Drehungsaxe $C$:

$$r = \frac{W_1}{Ms} = \frac{W + Ms^2}{Ms} = \frac{W}{Ms} + s.$$

Bezeichnet man nun den Abstand $KS = r - s$ des Schwingungspunktes $K$ vom Schwerpunkte durch $s_1$, so erhält man die einfache Gleichung $ss_1 = \frac{W}{M}$, in welcher $s$ und $s_1$ auf gleiche Weise vorkommen, und daher auch mit einander vertauscht werden können. Diese Formel gilt also nicht allein für den Fall, wenn $s$ den Abstand des Drehungspunktes, und $s_1$ den des Schwingungspunktes von dem Schwerpunkte bezeichnet,

Digitized by Google

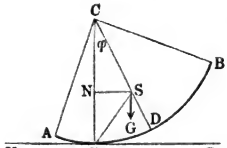
sondern auch umgekehrt, wenn $s$ den Abstand des Schwingungspunktes, und $s_1$ den des Drehungspunktes vom Schwerpunkte ausdrückt; es wird also $C$ zum Schwingungspunkte, wenn $K$ als Aufhängepunkt dient. Man benutzt diese Eigenschaft bei dem sogenannten, zuerst von Bohnenberger vorgeschlagenen und später von Kater angewendeten Reversionspendel $AB$, Fig. 547, welches mit zwei schneidigen Axen $C$ und $K$ ausgerüstet ist, die so gegen einander gestellt sind, daß die Schwingungszeiten dieselben bleiben, das Pendel mag um die eine oder um die andere Axe schwingen. Um nicht die Axen gegen einander verstellen zu müssen, werden noch zwei Laufgewichte $P$ und $Q$ angebracht, wovon das kleinere durch eine feine Schraube gestellt werden kann. Hat man durch Verschieben oder Einstellen dieser Laufgewichte es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer dieselbe ist, das Pendel mag in $C$ oder in $K$ aufhängen, so bekommt man in der Entfernung $CK$ beider Schneiden von einander die Länge $r$ des einfachen Pendels, welches mit dem Reversionspendel gleichzeitig schwingt, und es ergiebt sich nun die Schwingungsdauer durch die Formel

Fig. 547.

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

**Wälzendes Pendel.** Mit dem Schwingen eines Pendels läßt sich auch §. 329
das Schaukeln oder Wiegen eines Körpers mit walzenförmigem Fuße vergleichen. Dieses Wiegen ist zwar, wie jede andere wälzende Bewegung, aus einer progressiven und einer Drehbewegung zusammengesetzt, allein es läßt sich auch annehmen, daß es aus einer einfachen Drehung mit veränderlicher Drehaxe bestehe. Diese Drehaxe ist aber der Stützpunkt $P$, womit der schaukelnde Körper $ABC$, Fig. 548, auf der horizontalen Basis $HR$ aufruhet. Ist der Halbmesser $CD = CP$ der walzenförmigen Basis $ADB$, $= r$, und der Abstand $CS$ des Schwerpunktes $S$ des ganzen Körpers vom Mittelpunkte $C$ dieser Basis, $= s$, so hat man für die dem Drehungswinkel $SCP = \varphi$ entsprechende Entfernung $SP = y$ des Schwerpunktes vom Drehungspunkte:

Fig. 548.




$$y^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos.\varphi$$
$$= (r-s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

bezeichnen wir daher noch das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Hinsicht auf den Schwerpunkt $S$ durch $Mk^2$, so erhalten wir das Trägheitsmoment in Hinsicht auf den Stützpunkt $P$:

Digitized by Google

$$W = M\,(k^2 + y^2) = M\left[k^2 + (r - s)^2 + 4\,r\,s\left(sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2\right],$$

wofür bei kleinen Schwingungswinkeln, $= M\,[k^2 + (r - s)^2 + r\,s\,\varphi^2]$ oder gar nur $M\,[k^2 + (r - s)^2]$ gesetzt werden kann. Da nun das Kraftmoment $= G.\overline{SN} = Mg.\overline{CS}\,sin.\,\varphi = M\,g\,s\,sin.\,\varphi$ ist, so folgt die Winkelacceleration für die Drehung um $P$:

$$\varkappa = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{M\,g\,s\,sin.\,\varphi}{M\,[k^2 + (r - s)^2]} = \frac{g\,s\,sin.\,\varphi}{k^2 + (r - s)^2}.$$

Beim einfachen Pendel ist dieselbe $= \frac{g\,sin.\,\varphi}{r_1}$, wenn $r_1$ dessen Länge bezeichnet; sollen daher beide isochron schwingen, so muß sein:

$$\frac{g\,s\,sin.\,\varphi}{k^2 + (r - s)^2} = \frac{g\,sin.\,\varphi}{r_1},\ \text{d. i.}\ r_1 = \frac{k^2 + (r - s)^2}{s}.$$

Die Schwingungszeit der Wiege ist hiernach:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (r - s)^2}{g\,s}}.$$

Fig. 549.

Diese Theorie läßt sich auch auf ein Pendel $AB$, Fig. 549, mit abgerundeter Umdrehungsaxe $CM$ anwenden, wenn man statt $r$ den Krümmungshalbmesser $CM$ dieser Axe einführt. Wäre statt der runden Axe eine schneidige Axe $D$ angebracht, so würde die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{k^2 + \overline{DS}^2}{g.DS}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (s - x)^2}{g\,(s - x)}}$$

betragen, wofern die Entfernung $CD$ der Schneide $D$ vom Mittelpunkte $C$ der runden Axe durch $x$ bezeichnet wird. Beide Pendel haben nun gleiche Schwingungszeiten, wenn

$$\frac{k^2 + (s - x)^2}{s - x} = \frac{k^2 + (r - s)^2}{s},\ \text{oder}\ \frac{k^2}{s - x} - x = \frac{k^2 + r^2}{s} - 2\,r$$

ist. Schreiben wir $\frac{k^2}{s - x} = \frac{k^2}{s} + \frac{k^2\,x}{s^2}$ annähernd, und vernachlässigen wir $r^2$, so erhalten wir:

$$x = \frac{2\,r\,s^2}{s^2 - k^2}.$$

Anmerkung. Von dem conischen Pendel ist unter dem Artikel „Regulator" im dritten Theile die Rede.

Im Supplementbande wird von den schwingenden Bewegungen ausführlich gehandelt.

Digitized by Google

## Viertes Capitel.

## Die Lehre vom Stoße.

**Stoss überhaupt.** Vermöge der Undurchdringlichkeit der Materie können zwei Körper gleichzeitig nicht einen und denselben Raum einnehmen. Kommen aber zwei bewegte Körper so mit einander in Berührung, daß einer in den Raum des anderen einzudringen sucht, so findet eine Wechselwirkung zwischen beiden statt, welche eine Veränderung in den Bewegungszuständen dieser Körper zur Folge hat. Diese Wechselwirkung ist es, welche man Stoß (franz. choc; engl. impact, collision) nennt. §. 330

Die Verhältnisse des Stoßes hängen zunächst von dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§. 65) ab; während des Stoßes drückt der eine Körper genau ebenso stark auf den anderen, wie dieser in entgegengesetzter Richtung auf jenen. Die gerade Linie, welche winkelrecht auf den Flächen steht, in welchen sich beide Körper berühren, und welche durch den Berührungspunkt selbst geht, ist die Richtung der Stoßkraft. Befinden sich die Schwerpunkte beider Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein centrischer oder Centralstoß, außerdem aber ein excentrischer Stoß. Die Körper $A$ und $B$ in Fig. 550 geben einen centrischen Stoß,

Fig. 550.

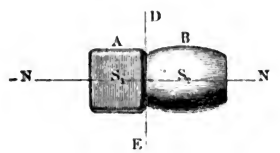
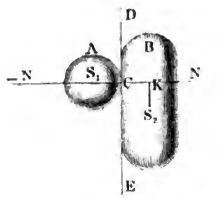



Fig. 551.



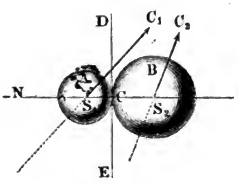

weil ihre Schwerpunkte $S_1$ und $S_2$ in der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene $DE$ liegen; von den Körpern $A$ und $B$ in Fig. 551 stößt $A$ centrisch und $B$ excentrisch, weil $S_1$ in und $S_2$ außerhalb der Normal- oder Stoßlinie $N\overline{N}$ befindlich ist.

In Hinsicht auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden Stoß (franz. choc direct; engl. direct impact) und den schiefen Stoß (franz. choc oblique; engl. oblique impact) von einander. Beim geraden

Digitized by Google

Stoße fällt die Bewegungsrichtung in die Stoßlinie, beim schiefen Stoße findet aber eine Abweichung zwischen beiden Richtungen statt. Bewegen sich z. B. die Körper $A$ und $B$, Fig. 552, in Richtungen $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$, welche von der Normalen oder Stoßlinie $N\overline{N}$ abweichen, so findet ein schiefer Stoß statt, während derselbe ein gerader wäre, wenn diese Bewegungsrichtungen mit $N\overline{N}$ zusammenfielen.

Fig. 552.




Außerdem unterscheidet man noch den Stoß freier Körper und den Stoß ganz oder theilweise unterstützter Körper von einander.

§. 331 Die Zeit während der Mittheilung oder Veränderung der Bewegung durch den Anstoß ist zwar sehr klein, aber keineswegs unendlich klein; sie hängt, sowie die Stoßkraft selbst, von Masse, Geschwindigkeit und Elasticität der zum Stoße gelangenden Körper ab. Man kann diese Zeit aus zwei Perioden bestehend annehmen. In der ersten Periode drücken die Körper einander zusammen und in der zweiten dehnen sich dieselben ganz oder zum Theil wieder aus. Durch das Zusammendrücken wird die Elasticität in Wirksamkeit gesetzt, welche sich mit der Trägheit ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch den Bewegungszustand der zusammenstoßenden Körper verändert. Wird bei dem Zusammendrücken die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, so geht der Körper am Ende des Stoßes in seine vorige Gestalt vollkommen zurück, und dann nennen wir den Körper einen vollkommen elastischen; nimmt aber der Körper am Ende des Stoßes seine vorige Form nicht vollständig wieder an, so nennen wir den Körper unvollkommen elastisch, und behält endlich der Körper die durch das Maximum des Zusammendrückens erhaltene Form, besitzt er also gar kein Bestreben zum Ausdehnen, so nennen wir den Körper einen unelastischen. Jedenfalls ist aber diese Eintheilung nur in Beziehung auf eine gewisse Stärke des Stoßes als richtig anzunehmen; denn es ist möglich, daß ein und derselbe Körper bei einem schwachen Stoße sich noch elastisch und bei einem starken Stoße unelastisch zeigt. Streng genommen giebt es aber weder einen vollkommen elastischen, noch einen vollkommen unelastischen Körper; doch nennen wir in der Folge solche Körper elastische, welche ihre Gestalt nach dem Stoße ziemlich wieder herstellen, und diejenigen unelastische, welche durch den Stoß bedeutende bleibende Formveränderungen erleiden (vergl. §. 201).

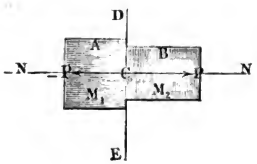
In der praktischen Mechanik werden die zum Stoße gelangenden Körper, wie z. B. Holz, Eisen u. s. w., sehr oft als unelastische angesehen, weil die-

Digitized by Google

ſelben entweder an und für ſich eine kleine Elaſticität beſitzen, oder durch Wiederholung der Stöße ihre Elaſticität größtentheils verlieren. Uebrigens iſt es eine wichtige Regel, Stöße bei Maſchinen und Bauwerken ſo viel wie möglich zu vermeiden oder zu mäßigen oder in elaſtiſche zu verwandeln, weil durch dieſelben Erſchütterungen und große Abnutzungen herbeigeführt werden und weil dieſelben einen Theil der Leiſtung der Maſchinen conſumiren.

**Centralstoss.** Entwickeln wir zunächſt die Geſetze des geraden Central- §. 332
ſtoßes frei beweglicher Körper. Denken wir uns die Stoßzeit aus lauter gleichen Theilen $\tau$ beſtehend und nehmen wir an, daß die Stoßkraft während des erſten Zeittheilchens $= P_1$, während des zweiten $P_2$, während des dritten $P_3$ ſei u. ſ. w. Iſt nun die Maſſe des einen Körpers $A$, Fig. 553, $= M_1$, ſo hat man die entſprechenden Acceleration:

Fig. 553.




$$p_1 = \frac{P_1}{M_1},\ p_2 = \frac{P_2}{M_1},$$

$$p_3 = \frac{P_3}{M_1} \text{ u. ſ. w.}$$

Nach §. 19 iſt aber die einer Acceleration $p$ und einem Zeittheilchen $\tau$ entſprechende Geſchwindigkeitsveränderung:

$$\varkappa = p\tau;$$

es ſind daher für den vorliegenden Fall die elementaren Geſchwindigkeitszu- oder -abnahmen:

$$\varkappa_1 = \frac{P_1\tau}{M_1},\ \varkappa_2 = \frac{P_2\tau}{M_1},\ \varkappa_3 = \frac{P_3\tau}{M_1} \text{ u. ſ. w.}$$

und es iſt die in einer gewiſſen endlichen Zeit erfolgte Geſchwindigkeitszu- oder -abnahme der Maſſe $M_1$:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \cdots = (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_1},$$

ſowie die entſprechende Geſchwindigkeitsveränderung der Maſſe $B$ von der Größe $M_2$:

$$= (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_2}.$$

Bei dem folgenden oder ſtoßenden Körper $A$ wirkt die Stoßkraft der Geſchwindigkeit $c_1$ entgegen, es findet folglich hier eine Geſchwindigkeitsabnahme ſtatt, und es iſt die nach einer gewiſſen Zeit noch übrig bleibende Geſchwindigkeit dieſes Körpers:

Digitized by Google

$$v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \cdots) \frac{\tau}{M_1};$$

bei dem vorangehenden oder gestoßenen Körper $B$ hingegen wirkt die Stoßkraft in der Bewegungsrichtung, es erhält daher die Geschwindigkeit $c_2$ einen Zuwachs und es geht dieselbe in

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 + \cdots) \frac{\tau}{M_2}$$

über.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen $(P_1 + P_2 + \cdots)\,\tau$, so bleibt uns die allgemeine Formel:

I. $M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2)$, oder
$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$.

Man bezeichnet wohl das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers durch den Namen Bewegungsmoment (franz. quantité de mouvement; engl. momentum of body) und kann hiernach behaupten: in jedem Augenblick der Stoßzeit ist die Summe der Bewegungsmomente $(M_1 v_1 + M_2 v_2)$ beider Körper eben so groß wie vor dem Stoße.

Im Augenblicke des größten Zusammendrückens haben beide Körper einerlei Geschwindigkeit $v$, setzen wir daher diesen Werth statt $v_1$ und $v_2$ in die gefundene Gleichung, so bleibt

$$M_1 v + M_2 v = M_1 c_1 + M_2 c_2,$$

und es ergiebt sich die Geschwindigkeit beider Körper im Augenblicke der stärksten Zusammendrückung:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Sind die Körper $A$ und $B$ unelastisch, besitzen sie also nach dem Zusammendrücken kein Bestreben zum Sichwiederausdehnen, so hört alle Mittheilung oder Veränderung der Bewegung auf, wenn beide Körper bis aufs Maximum zusammengedrückt sind, und es gehen daher auch beide nach dem Stoße mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fort.

Beispiele. 1) Bewegt sich ein unelastischer Körper $B$ von 30 Pfund Gewicht mit 3 Fuß Geschwindigkeit, und trifft ihn ein anderer unelastischer Körper $A$ von 50 Pfund mit 7 Fuß Geschwindigkeit, so gehen beide nach dem Zusammentreffen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{50.7 + 30.3}{50 + 30} = \frac{350 + 90}{80} = \frac{44}{8} = \frac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2} \text{ Fuß}$$

fort.

Digitized by Google

2) Um einen Körper von 120 Pfund Gewicht aus einer Geschwindigkeit $c_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß in eine Geschwindigkeit $v$ von 2 Fuß zu versetzen, läßt man ihn von einem 50 Pfund schweren Körper stoßen; welche Geschwindigkeit muß dieser haben? Hier ist

$$c_1 = v + \frac{(v - c_2)\,M_2}{M_1} = 2 + \frac{(2 - 1{,}5)\,.\,120}{50} = 2 + \frac{6}{5} = 3{,}2 \text{ Fuß}.$$

§. 333

**Elastischer Stoss.** Sind die zum Stoße gelangenden Körper vollkommen elastisch, so dehnen sie sich, nachdem sie sich in der ersten Periode zusammengedrückt haben, in der zweiten Periode der Stoßzeit allmälig wieder aus; und wenn sie am Ende die erste Gestalt wieder angenommen haben, so setzen sie ihre Bewegungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Da aber die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, um einen elastischen Körper zusammenzudrücken, gleich ist der Arbeit, welche derselbe bei seiner Ausdehnung wieder ausgiebt, so findet beim Stoße zwischen elastischen Körpern ein Verlust an lebendiger Kraft nicht statt, und es gilt daher auch für denselben noch folgende zweite Gleichung:

$$\text{II.} \quad M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2, \text{ oder}$$
$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2).$$

Aus den Gleichungen I. und II. lassen sich nun die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ der Körper nach dem Stoße finden. Zuerst folgt durch Division

$$\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2},$$

d. i.:

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \text{ oder } v_2 - v_1 = c_1 - c_2;$$

setzt man nun den sich hieraus ergebenden Werth

$$v_2 = c_1 + v_1 - c_2$$

in die Gleichung I., so folgt:

$$M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2, \text{ oder}$$
$$(M_1 + M_2)\, v_1 = (M_1 + M_2)\, c_1 - 2\, M_2\, (c_1 - c_2),$$

wodurch sich nun herausstellt:

$$v_1 = c_1 - \frac{2\, M_2\, (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und}$$

$$v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2\, M_2\, (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_1 + \frac{2\, M_1\, (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während bei unelastischen Körpern der Verlust an Geschwindigkeit des einen Körpers

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2\, (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

ist, fällt hiernach bei elastischen Körpern derselbe doppelt so groß, nämlich

Digitized by Google

$$c_1 - v_1 = \frac{2\,M_2\,(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

aus, und während bei den unelastischen Körpern der Geschwindigkeitsgewinn des anderen Körpers

$$v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

beträgt, stellt sich bei elastischen Körpern derselbe,

$$v_2 - c_2 = \frac{2\,M_1\,(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

ebenfalls doppelt so groß heraus.

Beispiel. Zwei vollkommen elastische Kugeln, die eine von 10 Pfund, die andere von 16 Pfund Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten 12 Fuß und 6 Fuß gegen einander, welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße? Es ist hier $M_1 = 10$ und $c_1 = 12$ Fuß, sowie $M_2 = 16$ und $c_2 = -6$ Fuß zu setzen, daher ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{2.16\,(12+6)}{10+16} = \frac{2.16.18}{26} = 22{,}154 \text{ Fuß},$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des anderen:

$$v_2 - c_2 = \frac{2.10.18}{26} = 13{,}846 \text{ Fuß};$$

es prallt hiernach der erste Körper nach dem Stoße mit $v_1 = 12 - 22{,}154 = -10{,}154$ Fuß, und der andere Körper mit $-6 + 13{,}846 = 7{,}846$ Fuß Geschwindigkeit zurück. Uebrigens ist das Maß der lebendigen Kraft beider Körper nach dem Stoße

$= M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = 10.10{,}154^2 + 16.7{,}846^2 = 1031 + 985 = 2016$

ebenso groß wie vor dem Stoße, nämlich:

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = 10.12^2 + 16.6^2 = 1440 + 576 = 2016.$$

Wären diese Körper unelastisch, so würde der erste nur $\frac{c_1 - v_1}{2} = 11{,}077$ Fuß an Geschwindigkeit verlieren und der andere $\frac{v_2 - c_2}{2} = 6{,}923$ Fuß gewinnen; es würde also der erste Körper nach dem Stoße noch die Geschwindigkeit $12 - 11{,}077 = 0{,}923$ Fuß behalten, und der zweite die Geschwindigkeit $-6 + 6{,}923 = 0{,}923$ annehmen, übrigens aber der Arbeitsverlust

$[2016 - (10 + 16)\,0{,}923^2] : 2g = (2016 - 22{,}2) \,.\, 0{,}016 = 31{,}9$ Fußpfund entstehen.

§. 334 **Besondere Fälle.** Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln für die Endgeschwindigkeiten des Stoßes gelten natürlich auch dann noch, wenn der eine Körper in Ruhe ist, oder wenn sich beide Körper einander entgegen bewegen, oder wenn eine Masse unendlich groß ist in Hinsicht auf die andere u. s. w. Ist die Masse $M_2$ in Ruhe, so hat man $c_2 = 0$, daher für unelastische Körper:

Digitized by Google

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1.$$

Laufen die Körper einander entgegen, ist also $c_2$ negativ, so folgt für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und } v_2 = - c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind in diesem Falle die Bewegungsmomente einander gleich, ist also $M_1 c_1 = M_2 c_2$, so ist beim unelastischen Stoße, $v = 0$, d. h. die Körper versetzen einander in Ruhe; bei elastischen Körpern ist aber

$$v_1 = c_1 - \frac{2 (M_2 c_1 + M_1 c_1)}{M_1 + M_2} = c_1 - 2 c_1 = - c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = - c_2 + \frac{2 (M_2 c_2 + M_1 c_2)}{M_1 + M_2} = - c_2 + 2 c_2 = + c_2;$$

dann kehren also die Körper nach dem Stoße mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zurück. Sind hingegen die Massen einander gleich, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{c_1 - c_2}{2},$$

dagegen für elastische:

$$v_1 = - c_2 \text{ und } v_2 = c_1,$$

d. h. dann gehen die Massen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Laufen die Massen wieder in gleicher Richtung, und ist die vorausgehende Masse $M_2$ unendlich groß, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2,$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - 2 (c_1 - c_2) = 2 c_2 - c_1, v_2 = c_2 + 0 = c_2;$$

es wird also die Geschwindigkeit der unendlich großen Masse durch den Anstoß der endlichen Masse nicht abgeändert. Ist nun noch die unendlich große Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat man für unelastische Körper:

$$v = 0,$$

und für elastische:

$$v_1 = - c_1, v_2 = 0;$$

dann bleibt also auch die unendlich große Masse in Ruhe, es verliert aber

Digitized by Google

im ersten Falle der anstoßende Körper seine Geschwindigkeit vollständig, und es wird dieselbe im zweiten Falle in die entgegengesetzte verwandelt.

Beispiele. 1) Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper von 8 Pfund an einen ruhenden Körper von 25 Pfund anzustoßen, damit der letztere eine Geschwindigkeit von 2 Fuß annimmt? Wären die Körper unelastisch, so hätte man zu setzen:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

d. i.:

$$2 = \frac{8 \cdot c_1}{8 + 25},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_4 = 8^1/_4 \text{ Fuß}$$

die gesuchte Geschwindigkeit; wären sie aber elastisch, so hätte man:

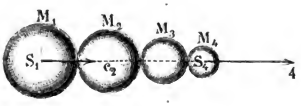
$$v_2 = \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_8 = 4^1/_8 \text{ Fuß}.$$

2) Trifft eine Kugel $M_1$, Fig. 554, die ruhende Masse $M_2 = n M_1$ mit der Geschwindigkeit $c_1$, die zweite Masse eine dritte Masse $M_3 = n M_2 = n^2 M_1$ mit der durch den Stoß erlangten Geschwindigkeit, diese wieder eine Masse $M_4 = n M_3 = n^3 M_1$ u. s. w., so hat man bei vollkommener Elasticität dieser Massen die Geschwindigkeiten:

Fig. 554.




$$v_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + n M_1} c_1 = \frac{2}{1+n} \cdot c_1, \quad v_3 = \frac{2 M_2}{M_2 + n M_2} v_2 = \frac{2}{1+n} \cdot v_2 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 c_1,$$

$$v_4 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^3 c_1 \text{ u. s. w.}$$

Ist z. B. das Gewicht einer jeden Masse nur halb so groß, als das der nächst vorhergehenden, hat man also den Exponenten der von den Massen gebildeten geometrischen Reihe:

$$n = {}^1/_2,$$

so folgt:

$$v_2 = {}^4/_3 c_1, \; v_3 = ({}^4/_3)^2 c_1, \; v_4 = ({}^4/_3)^3 c_1 \ldots, \; v_{10} = ({}^4/_3)^9 c_1 = 13{,}32 \cdot c_1.$$

§. 335 **Arbeitsverlust.** Beim Zusammenstoßen unelastischer Massen findet stets ein Verlust an lebendiger Kraft statt, weshalb die Massen nach dem Stoße nicht so viel Arbeit zu verrichten vermögen, als vor dem Stoße. Vor dem Stoße enthalten die mit den Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ fortgehenden Massen $M_1$ und $M_2$ die lebendige Kraft:

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2,$$

nach dem Stoße haben aber die mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

Digitized by Google

fortgehenden Massen die lebendige Kraft:

$$M_1 v^2 + M_2 v^2;$$

es giebt daher die Subtraction dieser Kräfte den Verlust an lebendiger Kraft durch den Anstoß:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1 + v)(c_1 - v) - M_2 (c_2 + v)(v - c_2), \text{ aber}$$
$$M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2) = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

daher folgt:

$$K = (c_1 + v - c_2 - v)\frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}.$$

Sind die Gewichte der Massen $G_1$ und $G_2$, ist also

$$M_1 = \frac{G_1}{g} \text{ und } M_2 = \frac{G_2}{g},$$

so hat man hiernach den Verlust an mechanischer Arbeit oder Leistung:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Man nennt $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ das harmonische Mittel aus $G_1$ und $G_2$, und kann hiernach behaupten: der Verlust an Leistung, welcher durch den Stoß zweier unelastischen Massen herbeigeführt und auf die Formveränderung derselben verwendet wird, ist gleich dem Producte aus dem harmonischen Mittel beider Massen und aus der Fallhöhe, welche der Differenz der Geschwindigkeiten dieser Massen entspricht.

Ist eine der Massen, z. B. $M_2$, in Ruhe, so hat man diesen Arbeitsverlust:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2},$$

und ist die bewegte Masse $M_1$ sehr groß gegen die ruhende, so verschwindet $G_2$ gegen $G_1$, und es bleibt:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \cdot G_2.$$

Uebrigens läßt sich auch setzen:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1^2 - 2c_1 v + v^2 + 2c_1 v - 2v^2) + M_2 (c_2^2 - 2c_2 v + v^2 + 2c_2 v - 2v_2^2)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + 2 M_1 v (c_1 - v) + M_2 (c_2 - v)^2 + 2 M_2 v (c_2 - v)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + M_2 (c_2 - v)^2,$$

weil $M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2)$ ist.

Hiernach ist also die durch die unelastischen Stöße verlorene lebendige Kraft gleich der Summe von den Producten aus den



Digitized by Google

Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeitsverluste oder Geschwindigkeitsgewinne.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Maschine in jeder Minute 16 Stöße zwischen den unelastischen Massen

$$M_1 = \frac{1000}{g} \text{ Pfd. und } M_2 = \frac{1200}{g} \text{ Pfd.}$$

mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 5$ Fuß und $c_2 = 2$ Fuß erfolgen, so ist ihr Verlust an Leistung in Folge dieser Stöße:

$$A = {}^{16}/_{60} \cdot \frac{(5-2)^2}{2g} \cdot \frac{1000 \cdot 1200}{2200} = {}^{4}/_{15} \cdot 9 \cdot 0{,}016 \cdot {}^{6000}/_{11} = 0{,}576 \cdot {}^{400}/_{11}$$
$$= 20{,}94 \text{ Fußpfund per Secunde.}$$

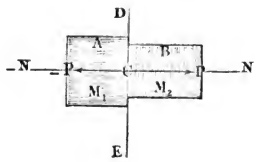
2) Wenn auf einer Eisenbahn zwei Wagenzüge von 120000 Pfund und 160000 Pfund Gewicht mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 15$ Fuß gegen einander stoßen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Locomotive und Wagen verwendeter Arbeitsverlust, welcher bei vollständigem Mangel an Elasticität der zum Stoße gelangenden Theile

$$= \frac{(20+15)^2}{2g} \cdot \frac{120000 \cdot 160000}{280000} = 35^2 \cdot 0{,}016 \cdot \frac{1'920000}{28} = 1'344000 \text{ Fußpfd.}$$

beträgt.

§. 336 **Härte.** Kennt man die Elasticitätsmodel der zum Stoße gelangenden Körper, so kann man auch die Kraft des Zusammendrückens und die Größe desselben finden. Es seien von den Körpern $A$ und $B$, Fig. 555, die Querschnitte $F_1$ und $F_2$, die Längen $l_1$ und $l_2$ und die Elasticitätsmodul $E_1$ und $E_2$. Stoßen beide mit einer Kraft $P$ gegen einander, so sind die bewirkten Zusammendrückungen, nach §. 204:

Fig. 555.




$$\lambda_1 = \frac{P l_1}{F_1 E_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P l_2}{F_2 E_2},$$

und es ist das Verhältniß derselben:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_2 E_2}{F_1 E_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}.$$

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen, $\frac{F_1 E_1}{l_1}$ durch $H_1$, sowie $\frac{F_2 E_2}{l_2}$ durch $H_2$, so erhalten wir:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P}{H_2},$$

sowie:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}.$$

Nennen wir nach dem Beispiele Whewell's (s. The Mechanics of

Digitized by Google

Engineering §. 207) die Größe $\frac{FE}{l}$ die Härte (franz. dureté, raideur; engl. hardness) eines Körpers, so folgt, daß die Tiefen der Zusammendrückungen den Härten umgekehrt proportional sind.

Stößt eine Masse $M = \frac{G}{g}$ mit der Geschwindigkeit $c$ auf eine unbewegliche oder unendlich große Masse, so verwendet sie ihre ganze lebendige Kraft auf das Zusammendrücken, es ist daher (nach §. 206):

$$\tfrac{1}{2} P\sigma = \frac{Mc^2}{2} = \frac{c^2}{2g} G.$$

Nun ist aber der Weg $\sigma$ gleich der Summe von den Zusammendrückungen $\lambda_1$ und $\lambda_2$, und $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$, sowie $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$, es folgt daher:

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot P,$$

sowie umgekehrt:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \sigma,$$

und die Bestimmungsgleichung:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot \sigma^2 = \frac{c^2}{2g} G,$$

also:

$$\sigma = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

woraus sich nun $P$, $\lambda_1$ und $\lambda_2$ berechnen lassen.

Beispiel. Schlägt man einen schmiedeeisernen Hammer von 4 Quadratzoll Basis und 6 Zoll Höhe mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß auf eine Bleiplatte von 2 Quadratzoll Basis und 1 Zoll Dicke, so stellen sich folgende Verhältnisse heraus. Der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ist $E_1 = 29'000\,000$ und der des Bleies, $E_2 = 700000$, daher sind die Härten dieser Körper:

$$H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1} = \frac{4 \,.\, 29'000\,000}{6} = 19'333\,333 \text{ und}$$

$$H_2 = \frac{F_2 E_2}{l_2} = \frac{2 \,.\, 700\,000}{1} = 1'400\,000.$$

Setzt man diese Werthe in die Formel:

$$\sigma = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \,.\, \frac{G}{g}},$$

und führt man das Gewicht des Hammers $= 4 \,.\, 6 \,.\, 0{,}29 = 7$ Pfd., also:

$$\frac{G}{g} = 7 \,.\, 0{,}032 = 0{,}224$$

ein, so erhält man den Weg des Hammers beim Zusammendrücken:

$$\sigma = 50 \sqrt{\frac{20733\,333 \,.\, 0{,}224}{19333\,333 \,.\, 1400000}} = 50 \sqrt{\frac{0{,}46443}{2\,706\,666}} = 0{,}0207 \text{ Zoll} = 0{,}248 \text{ Linien}.$$



Digitized by Google

Hieraus folgt die Stoßkraft:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot \sigma = \frac{19333333 \,.\, 1400000}{20733333} \cdot 0{,}0207 = 27037 \text{ Pfund};$$

ferner die Zusammendrückung des Hammers:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} = \frac{27037}{19333333} = 0{,}0014 \text{ Zoll} = 0{,}016 \text{ Linien},$$

und die der Bleiplatte:

$$\lambda_2 = \frac{P}{H_2} = \frac{27037}{1400000} = 0{,}0193 \text{ Zoll} = 0{,}233 \text{ Linien}.$$

§. 337 **Elastisch-unelastischer Stoss.** Bewegen sich zwei Massen $M_1$ und $M_2$ mit den Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ hinter einander her, so ist im Augenblicke der größten Zusammendrückung die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider, nach §. 332:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und die auf die Zusammendrückung verwendete Arbeit, nach §. 335:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Nun läßt sich diese Arbeit auch

$$= {}^1/_2 \, P \sigma = {}^1/_2 \, P \, (\lambda_1 + \lambda_2) = {}^1/_2 \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \sigma^2$$

setzen, es ergiebt sich folglich die Summe der Zusammendrückungen beider Massen:

$$\sigma = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{G_1 G_2}{g(G_1 + G_2)} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

woraus sich nun die zusammendrückende Kraft $P$ und die Zusammendrückungen der einzelnen Massen, nämlich $\lambda_1$ und $\lambda_2$, finden lassen.

Sind die Massen unelastisch, so bleiben diese Zusammendrückungen auch nach dem Stoße; ist aber nur eine von beiden Massen unelastisch, so dehnt sich die andere Masse in einer zweiten Periode wieder aus, und es erzeugt die daraus erwachsende Arbeit eine neue Geschwindigkeitsveränderung. Ist z. B. die Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ elastisch, so wird in dieser zweiten Periode des Stoßes die Arbeit:

$${}^1/_2 \, P \lambda_1 = {}^1/_2 \cdot \frac{P^2}{H_1} = \frac{1}{2 H_1} \left( \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \right)^2 \sigma^2$$

$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

frei; man hat daher in diesem Falle für die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ nach dem Stoße die Formeln:

Digitized by Google

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 v^2 + M_2 v^2 + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

$$= M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

d. i.:

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2}.$$

Setzt man den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - v_1 = x$, so hat man den Geschwindigkeitsgewinn:

$$v_2 - c_2 = \frac{M_1 x}{M_2},$$

und es nimmt die letzte Gleichung die Form:

$$x(2c_1 - x) - x\left(2c_2 + \frac{M_1 x}{M_2}\right) - (c_1 - c_2)^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0,$$

oder:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} x^2 - 2(c_1 - c_2) x + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \text{ an.}$$

Multiplicirt man dieselbe durch $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ und setzt man

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} = 1 - \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2(c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} x + (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2$$
$$= (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

oder:

$$\left(x - (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 = (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

deren Auflösung den Geschwindigkeitsverlust $x$ des ersten Körpers giebt:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und den Geschwindigkeitsgewinn des anderen Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Beispiel. Wenn man annimmt, daß in dem Beispiele des vorigen Paragraphen der eiserne Hammer vollkommen elastisch und die Bleiplatte ganz unelastisch ist, so erhält man den Geschwindigkeitsverlust des mit 50 Fuß Geschwindigkeit auffallenden 7 Pfund schweren Hammers, da $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$ zu setzen ist:

Digitized by Google

$$c_1 - v_1 = c_1 \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right) = 50 \left(1 + \sqrt{\frac{1400000}{20733333}}\right)$$
$$= 50\ (1 + 0{,}26) = 63 \text{ Fuß},$$

daher die Geschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - 63 = 50 - 63 = -13 \text{ Fuß}.$$

Die Geschwindigkeit der unterstützten Bleiplatte bleibt natürlich Null.

§. 338 **Unvollkommen elastischer Stoss.** Sind die an einander anstoßenden Körper unvollkommen elastisch, so dehnen sich dieselben in der zweiten Periode der Stoßzeit nur zum Theil wieder aus, es wird also auch die beim Comprimiren in der ersten Periode verbrauchte lebendige Kraft in der zweiten Periode nicht vollständig wieder ausgegeben. Sind wieder $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Tiefen der Eindrücke, und ist $P$ die Stoßkraft, so hat man die Arbeitsverluste beim Comprimiren $= {}^1/_2 P\lambda_1$ und ${}^1/_2 P\lambda_2$, und wird nun beim Ausdehnen hiervon das $\mu$fache, oder allgemeiner, beim Ausdehnen des einen Körpers das $\mu_1$- und beim Ausdehnen des zweiten das $\mu_2$fache zurückgegeben, so bleibt der gesammte Arbeitsverlust nach dem Stoße:

$$A = {}^1/_2 P\ [(1 - \mu_1)\ \lambda_1 + (1 - \mu_2)\ \lambda_2],$$

oder $\lambda_1 = \dfrac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \dfrac{P}{H_2}$ gesetzt:

$$A = {}^1/_2 P^2 \left[\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right].$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist aber

$$P = \frac{H_1 H_2 \sigma}{H_1 + H_2} \text{ und } \sigma = (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

daher ergiebt sich dann der in Frage gestellte Arbeitsverlust:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \left(\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right)$$
$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\mu_1 H_2 + \mu_2 H_1}{H_1 + H_2}\right).$$

Um nun die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ nach dem Stoße zu finden, haben wir die Gleichungen:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$
$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$$
$$- (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{(1 - \mu_1) H_2 + (1 - \mu_2) H_1}{H_1 + H_2}$$

mit einander zu verbinden und aufzulösen. Ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

Digitized by Google

und der Geschwindigkeitsgewinn des vorangehenden Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Diese beiden allgemeinen Formeln enthalten auch die Gesetze des vollkommen elastischen und des unelastischen Stoßes. Setzt man in ihnen $\mu_1 = \mu_2 = 1$, so erhält man die schon oben gefundenen Formeln für den Stoß zwischen vollkommen elastischen Körpern, nimmt man aber $\mu_1 = \mu_2 = 0$ an, so erhält man die Formeln des unelastischen Stoßes u. s. w. Sind beide Körper von gleichem Grade der Elasticität, ist also $\mu_1 = \mu_2$, so hat man einfacher:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_2}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu})$$

und

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_1}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu}).$$

Ist noch die Masse $M_2$ in Ruhe und unendlich groß, so folgt:

$$c_1 - v_1 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu}), \text{ d. i.:}$$
$$v_1 = -\,c_1\sqrt{\mu}, \text{ sowie umgekehrt:}$$
$$\mu = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2.$$

Läßt man die Masse $M_1$ von einer Höhe $h$ auf eine fest unterstützte gleichartige Masse $M_2$ herabfallen, und steigt dieselbe nach dem Aufschlagen auf eine Höhe $h_1$ zurück, so kann man aus beiden Höhen den Coefficienten der unvollkommenen Elasticität durch die Formel

$$\mu = \frac{h_1}{h}$$

finden. Schon Newton fand auf diese Weise für Elfenbein:

$$\mu = (8/9)^2 = 64/81 = 0{,}79,$$

für Glas:

$$\mu = (15/16)^2 = 0{,}9375^2 = 0{,}879,$$

für Kork, Stahl, Wolle:

$$\mu = (5/9)^2 = 0{,}555^2 = 0{,}309.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der stoßende oder auffallende Körper die Kugel- und der gestoßene Körper oder die Unterlage eine Plattenform hat.

Der General Morin ließ Geschützkugeln von 6 bis 20 Kilogramm Gewicht auf verschiedene Massen von Thon, Holz, Gußeisen, welche an einem Federdynamometer oder einer Federwage aufgehangen waren, herabfallen, und fand, daß für Thon und für Holzstücke $\mu$ nahe $= 0$,

Digitized by Google

dagegen für Gußeisen $\mu$ nahe $= 1$ ist, daß also der Stoß mit den ersteren Körpern als unelastisch, und der mit dem letzteren als vollkommen elastisch angesehen werden kann (s. A. Morin, Notions fondamentales de Mécanique, Art. 67 — 70).

Beispiel. Welche Geschwindigkeiten nehmen zwei Stahlplatten nach dem Stoße an, wenn dieselben vor dem Stoße die Geschwindigkeiten $c_1 = 10$ und $c_2 = -6$ Fuß besitzen, die eine 30 und die andere 40 Pfund wiegt? Hier ist

$$c_1 - v_1 = (10 + 6) \cdot {}^{40}/_{70} \,(1 + {}^{5}/_{9}) = 16 \cdot {}^{4}/_{7} \cdot {}^{14}/_{9} = \frac{16 \cdot 8}{9} = 14{,}22 \text{ Fuß},$$

daher sind die gesuchten Geschwindigkeiten:

$$v_1 = c_1 - 14{,}22 = 10 - 14{,}22 = -4{,}22 \text{ Fuß}$$

und

$$v_2 = c_2 + 10{,}66 = -6 + 10{,}66 = 4{,}66 \text{ Fuß}.$$

§. 339 **Schiefer Stoss.** Weichen die Bewegungsrichtungen $\overline{S_1 C_1}$ und $\overline{S_2 C_2}$ zweier Körper $A$ und $B$, Fig. 556, von der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene ab, so ist deren Anstoß ein schiefer. Wir führen die Theorie desselben auf die des geraden Stoßes zurück, wenn wir die Geschwindigkeiten $S_1 C_1 = c_1$ und $S_2 C_2 = c_2$ nach der Normale und nach einer Tangentialrichtung zerlegen; die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Normale $N\overline{N}$ geben einen Centralstoß und werden daher auch genau so verändert, wie beim Centralstoß, die mit der Berührungsebene parallelen Geschwindigkeiten hingegen verursachen gar keinen Stoß und bleiben daher unverändert. Vereinigt man die nach den Regeln des Centralstoßes veränderte Normalgeschwindigkeit eines jeden Körpers mit der unverändert gebliebenen Tangentialgeschwindigkeit, so erhält man die resultirenden Geschwindigkeiten dieser Körper nach dem Stoße. Setzen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen mit der Normale einschließen, $\alpha_1$ und $\alpha_2$, also $C_1 S_1 N = \alpha_1$ und $C_2 S_2 N = \alpha_2$, so erhalten wir für die Normalgeschwindigkeiten $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$ die Werthe $c_1 \cos. \alpha_1$ und $c_2 \cos. \alpha_2$, dagegen für die Tangentialgeschwindigkeiten $S_1 F_1$ und $S_2 F_2$, $c_1 \sin. \alpha_1$ und $c_2 \sin. \alpha_2$. Durch den Stoß erleiden aber die ersteren Geschwindigkeiten Veränderungen, und es geht die erste über in:

Fig. 556.

$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und die zweite in:

Digitized by Google

$$v_2 = c_2 \cos.\alpha_2 + (c_1 \cos.\alpha_1 - c_2 \cos.\alpha_2)\,\frac{M_1}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern, wie seither allemal, $M_1$ und $M_2$ die Massen beider Körper bezeichnen.

Aus $v_1$ und $c_1 \sin.\alpha_1$ ergiebt sich die resultirende Geschwindigkeit $S_1 G_1$ des ersten Körpers:

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin.\alpha_1^2},$$

und aus $v_2$ und $c_2 \sin.\alpha_2$ die Geschwindigkeit $S_2 G_2$ des zweiten Körpers:

$$w_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin.\alpha_2^2};$$

auch ergeben sich die Abweichungen der Geschwindigkeitsrichtungen von der Normale durch die Formeln:

$$\text{tang.}\,\beta_1 = \frac{c_1 \sin.\alpha_1}{v_1} \text{ und } \text{tang.}\,\beta_2 = \frac{c_2 \sin.\alpha_2}{v_1},$$

wenn $\beta_1$ den Winkel $G_1 S_1 N$ sowie $\beta_2$ den Winkel $G_2 S_2 N$ bezeichnet.

Beispiel. Zwei Kugeln von 30 und 50 Pfd. Gewicht stoßen sich mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 25$ Fuß, deren Richtungen um die Winkel $\alpha_1 = 21^0\,35'$ und $\alpha_2 = 65^0\,20'$ von der Normale der Berührungsebene abweichen, in welchen Richtungen und mit welchen Geschwindigkeiten gehen diese Massen nach dem Stoße fort? Es sind die unveränderlichen Seitengeschwindigkeiten:

$$c_1 \sin.\alpha_1 = 20 \,.\, \sin.21^0\,35' = 7{,}357 \text{ Fuß und}$$
$$c_2 \sin.\alpha_2 = 25 \,.\, \sin.65^0\,20' = 22{,}719 \text{ Fuß},$$

dagegen die veränderlichen:

$$c_1 \cos.\alpha_1 = 20 \,.\, \cos.21^0\,35' = 18{,}598 \text{ Fuß und}$$
$$c_2 \cos.\alpha_2 = 25 \,.\, \cos.65^0\,20' = 10{,}433 \text{ Fuß}.$$

Sind die Körper unelastisch, so hat man $\mu = 0$, daher die veränderten Normalgeschwindigkeiten:

$v_1 = 18{,}598 - (18{,}598 - 10{,}433) \,.\, {}^{50}/_{80} = 18{,}598 - 5{,}103 = 13{,}495$ Fuß und
$v_2 = 10{,}433 + 8{,}165 \,.\, {}^{3}/_{8} = 10{,}433 + 3{,}062 = 13{,}495$ Fuß.

Die resultirenden Geschwindigkeiten sind nun:

$$w_1 = \sqrt{13{,}495^2 + 7{,}357^2} = \sqrt{236{,}24} = 15{,}37 \text{ Fuß und}$$
$$w_2 = \sqrt{13{,}495^2 + 22{,}719^2} = \sqrt{698{,}27} = 26{,}42 \text{ Fuß};$$

für ihre Richtungen hat man:

$$\text{tang.}\,\beta_1 = \frac{7{,}357}{13{,}495},\ \log.\text{tang.}\,\beta_1 = 0{,}73653 - 1,\ \beta_1 = 28^0\,36' \text{ und}$$

$$\text{tang.}\,\beta_2 = \frac{22{,}719}{13{,}495},\ \log.\text{tang.}\,\beta_2 = 0{,}22622,\ \beta_2 = 59^0\,17'.$$

**Stoss gegen eine unendlich grosse Masse.** Trifft die Masse $A$, §. 340 Fig. 557 (a. f. S.), gegen eine andere unendlich große Masse, oder gegen ein unbewegliches Hinderniß $BB$, hat man also $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$, so folgt:

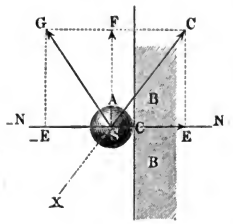
$$v_1 = c_1 \cos.\alpha_1 - c_1 \cos.\alpha_1 (1 + \sqrt{\mu}) = -\,c_1 \cos.\alpha_1 \sqrt{\mu} \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + c_1 \cos.\alpha_1 \cdot \frac{M_1 (1 + \sqrt{\mu})}{\infty} = 0 + 0 = 0;$$

Digitized by Google

ist nun noch $\mu = 0$, so wird auch $v_1 = 0$, ist aber $\mu = 1$, so folgt $v_1 = -c_1 \cos. \alpha_1$, d. h. beim unelastischen Stoße geht die Normalgeschwindigkeit ganz verloren, beim elastischen hingegen wird sie in die entgegengesetzte verwandelt. Für den Winkel, um welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße von der Normale abweicht, ist

Fig. 557.




$$tang. \beta_1 = \frac{c_1 \sin. \alpha_1}{v_1} = -\frac{c_1 \sin. \alpha_1}{c_1 \cos. \alpha_1 \sqrt{\mu}}$$

$$= -tang. \alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\mu}};$$

für unelastische Körper wird also:

$$tang. \beta_1 = -\frac{tang. \alpha_1}{0} = \infty; \text{ d. i. } \beta_1 = 90^0,$$

und für elastische:

$$tang. \beta_1 = -tang. \alpha_1, \text{ d. i. } \beta_1 = -\alpha_1.$$

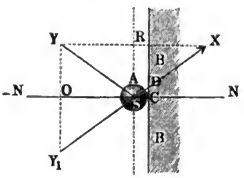
Nach dem Stoße eines unelastischen Körpers gegen ein unelastisches Hinderniß geht also der erstere mit der Tangentialgeschwindigkeit $c_1 \sin. \alpha_1$ in der Richtung $SF$ der Berührungsebene fort, nach dem Stoße eines elastischen Körpers gegen ein elastisches Hinderniß aber geht der Körper mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Richtung $SG$ fort, die mit der Normale $N\overline{N}$ und der anfänglichen Richtung $XS$ in eine Ebene fällt, und mit der Normale denselben Winkel $GS\overline{N}$ einschließt, wie die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit ebenderselben auf der entgegengesetzten Seite. Man nennt den Winkel $XS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit der Normale oder dem Lothe einschließt, den Einfallswinkel (franz. angle d'incidence; engl. angle of incidence) und den Winkel $GS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße ebendamit bildet, den Austritts- oder Reflexionswinkel (franz. angle de réflexion; engl. angle of reflexion), und kann hiernach behaupten: beim vollkommen elastischen Stoße fallen Reflexions- und Einfallswinkel mit dem Einfallslothe in einerlei Ebene und es sind beide Winkel einander gleich.

Beim unvollkommen elastischen Stoße ist das Verhältniß $\sqrt{\mu}$ der Tangenten dieser Winkel gleich dem Verhältnisse der durch die Ausdehnung zurückgegebenen Geschwindigkeit zu der durch die Compression verlorenen Geschwindigkeit. Mit Hülfe dieses Gesetzes läßt sich nun leicht die Richtung finden, in welcher der Körper $A$, Fig. 558, gegen das unbewegliche Hinder-

Digitized by Google

niß $BB$ zu stoßen ist, damit er nach dem Stoße eine gewisse Richtung $SY$ verfolge. Ist der Stoß ein elastischer, so fällen wir von einem Punkte $Y$ der gegebenen Richtung das Perpendikel $YO$ gegen das Einfallsloth $N\overline{N}$, verlängern dasselbe, bis die Verlängerung $OY_1$ dem Perpendikel selbst gleich wird; $SY_1$ ist dann die in Frage stehende Stoßrichtung, denn es ist, dieser Construction zufolge, Winkel $\overline{N}SY_1 = \overline{N}SY$. Ist der Stoß unvollkommen elastisch, so mache man $OY_1 = \sqrt{\mu}.OY$; dann ist $Y_1S$ ebenfalls die gesuchte Anfangsrichtung, da

Fig. 558.




$$\frac{tang.\,\alpha_1}{tang.\,\beta_1} = \frac{OY_1}{OY} = \sqrt{\mu}$$ ausfällt.

Fällt man ein Loth $YR$ gegen die Linie $SR$ parallel zur Berührungsebene und macht man dessen Verlängerung $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\,\overline{RY}$, so bekommt man aus leicht einzusehenden Gründen ebenfalls in $SX$ die gesuchte Einfallsrichtung.

Anmerkung. Die Theorie des schiefen Stoßes findet ihre vorzüglichste Anwendung beim Billardspiel. S. Théorie mathématique des effets du jeu de billard, par Coriolis. Nach Coriolis ist beim Anstoße eines Billardballes gegen die Bande das Verhältniß der zurückgegebenen Geschwindigkeit zur Einfallsgeschwindigkeit, $= 0{,}5$ bis $0{,}6$, also $\mu = 0{,}5^2 = 0{,}25$ bis $0{,}6^2 = 0{,}36$. Mit Hülfe dieses Werthes läßt sich nun auch die Richtung angeben, in welcher ein Ball $A$ gegen eine Bande $BB$ zu stoßen ist, damit er nach einem gegebenen Punkte $Y$ von dieser zurückgeworfen werde. Man fälle von dem gegebenen Punkte $Y$ das Perpendikel $YR$ gegen die mit der Bande parallel laufende Schwerlinie des Balles, verlängere dasselbe um $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}} = {}^{10}/_{6}$ bis ${}^{10}/_{5}$ seines Werthes und ziehe die Gerade $Y_1X$; der sich herausstellende Durchschnitt $D$ ist die Stelle, nach welcher man den Ball $A$ zu stoßen hat, damit er durch Bricol nach $Y$ gelange. Durch die Drehbewegung des Balles wird dieses Verhältniß allerdings noch etwas geändert.

**Stossreibung.** Bei dem schiefen Stoße entsteht auch eine Reibung zwischen den sich stoßenden Körpern, welche die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Berührungsebene abändert. Die Reibung $F$ des Stoßes bestimmt sich wie die Reibung des Druckes; bezeichnet $P$ die Stoßkraft und $\varphi$ den Reibungscoefficienten, so ist sie $F = \varphi P$. Sie unterscheidet sich nur insofern von der Reibung des Druckes, als sie, wie der Stoß selbst, nur während einer sehr kleinen Zeit wirksam ist. Die durch sie hervorgebrachten §. 341

Digitized by Google

Geschwindigkeitsveränderungen sind aber deshalb nicht unmeßbar klein, denn die Stoßkraft $P$, und folglich auch der Theil $\varphi P$ derselben, ist in der Regel sehr groß. Bezeichnet man die stoßende Masse durch $M$ und die durch die Stoßkraft $P$ erzeugte Normalacceleration durch $p$, so hat man:

$$P = Mp, \text{ und daher } F = \varphi Mp,$$

sowie die Zögerung oder negative Acceleration der Reibung während des Stoßes:

$$\frac{F}{M} = \varphi p;$$

d. i. $\varphi$mal so groß, als die der Normalkraft. Nun haben aber die Wirkungen beider Kräfte gleiche Zeitdauer; es ist daher auch die durch die Reibung erzeugte Geschwindigkeitsveränderung $\varphi$mal so groß, als die durch den Stoß bewirkte Veränderung in der Normalgeschwindigkeit.

Fällt eine Masse $M$ auf einen horizontal fortlaufenden Schlitten senkrecht herab, und wird durch diesen Zusammenstoß die Geschwindigkeit $c$ dieser Masse ganz vernichtet, so erleidet die Bewegung des Schlittens, dessen Masse $= M_1$ sein möge, die Retardation

$$\frac{F}{M + M_1} = \frac{\varphi Mp}{M + M_1},$$

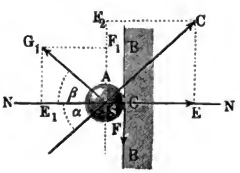
und folglich auch die Geschwindigkeit desselben den Verlust:

$$v = \frac{\varphi M}{M + M_1} c.$$

Die Richtigkeit dieser Theorie hat Morin durch Versuche dargethan (s. dessen Notions fondamentales de Mécanique).

In dem Falle, wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Masse $BB$ unter dem Einfallswinkel $\alpha$, Fig. 559, stößt, ist nach dem vorigen Paragraphen die Veränderung in der Normalgeschwindigkeit:

Fig. 559.




$$w = c \cos. \alpha \left(1 + \sqrt{\mu}\right);$$

daher die durch die Reibung bewirkte Veränderung in der Tangentialgeschwindigkeit:

$$= \varphi w = \varphi c \left(1 + \sqrt{\mu}\right) \cos. \alpha.$$

Es geht also nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit $c \sin. \alpha$ in

$$c \sin. \alpha - \varphi c \left(1 + \sqrt{\mu}\right) \cos. \alpha$$
$$= \left[\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha \left(1 + \sqrt{\mu}\right)\right] c$$

Digitized by Google

über und sie fällt bei vollkommen elastischen Körpern

$$= (sin.\,\alpha - 2\,\varphi\,cos.\,\alpha)\,c,$$

dagegen bei unelastischen Körpern

$$= (sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha)\,c$$

aus.

Durch die Reibung während des Stoßes erhalten die Körper sehr oft eine Drehung um ihren Schwerpunkt, oder es wird, wenn eine Drehbewegung vor dem Stoße schon vorhanden war, dieselbe abgeändert. Ist das Trägheitsmoment des runden Körpers $A$, in Hinsicht auf seinen Schwerpunkt $S$, $= Mk^2$, und der Drehungshalbmesser $SC = a$, so hat man die auf den Berührungspunkt $C$ reducirte Masse des Körpers

$$= \frac{Mk^2}{a^2},$$

daher die durch die Reibung $F$ hervorgebrachte Drehbeschleunigung dieses Punktes:

$$p_1 = \frac{F}{Mk^2 : a^2} = \frac{\varphi\,Mp}{Mk^2 : a^2} = \varphi p \cdot \frac{a^2}{k^2},$$

und die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$w_1 = \varphi\,\frac{a^2}{k^2} \cdot w = \varphi\,\frac{a^2}{k^2}\,(1 + \sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha.$$

Bei einem Cylinder ist $\frac{a^2}{k^2} = 2$, und bei einer Kugel $\frac{a^2}{k^2} = {}^5/_2$, daher folgt für diese runden Körper die durch den Stoß gegen eine Ebene hervorgebrachte Veränderung in der Umdrehungsgeschwindigkeit:

$w_1 = 2\,\varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha$ und $w_1 = {}^5/_2\,\varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha.$

Beispiel. Wenn ein Billardball mit 15 Fuß Geschwindigkeit und unter dem Einfallswinkel $\alpha = 45^0$ gegen die Bande stößt, welche Bewegungen nimmt derselbe nach dem Stoße an? Setzt man für $\sqrt{\mu}$ den mittleren Werth 0,55, so hat man die normale Seitengeschwindigkeit nach dem Stoße

$= -\sqrt{\mu}\,.\,c\,cos.\,\alpha = -0{,}55\,.\,15\,.\,cos.\,45^0 = -\,8{,}25\,.\,\sqrt{1/2} = -\,5{,}833$ Fuß,

und nimmt man mit Coriolis, $\varphi = 0{,}20$ an, so erhält man die Seitengeschwindigkeit parallel zur Bande,

$= c\,sin.\,\alpha - \varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha = (1 - 0{,}20\,.\,1{,}55)\,.\,10{,}607 = 0{,}69\,.\,10{,}607$
$= 7{,}319$ Fuß,

auch folgt für den Reflexionswinkel $\beta$:

$$tang.\,\beta = \frac{7{,}319}{5{,}833} = 1{,}2548,$$

also: $\beta = 51^0\,27'$,

und die Geschwindigkeit nach dem Stoße bleibt

$$= \frac{5{,}833}{cos.\,51^0\,27'} = 9{,}360 \text{ Fuß}.$$

Digitized by Google

Außerdem nimmt der Ball auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$\tfrac{5}{2}\,\varphi\,.\,1{,}55\,.\,10{,}607 = 8{,}220 \text{ Fuß}$$

um seine verticale Schwerlinie an. Da der Ball sich nicht gleitend, sondern wälzend auf dem Billard fortbewegt, so ist anzunehmen, daß er außer der fortschreitenden Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß auch noch eine gleichgroße Umdrehungsgeschwindigkeit besitze und daß sich diese ebenfalls in die Componenten

$$c\cos.\alpha = 10{,}607 \quad \text{und} \quad c\sin.\alpha = 10{,}607$$

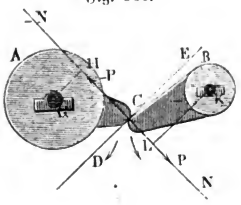
zerlegen lasse. Der erste Component entspricht einer Drehung um eine Axe parallel zur Bandenare und geht in

$$c\cos.\alpha - \tfrac{5}{2}\,\varphi\,(1+\sqrt{\mu})\,c\cos.\alpha = 10{,}607 - 8{,}220 = 2{,}387 \text{ Fuß}$$

über, der andere Component $c\sin.\alpha = 10{,}607$ Fuß entspricht einer Drehung um eine Axe normal zur Bande und bleibt unverändert.

§. 342 **Stoss drehbarer Körper.** Stoßen zwei um feste Axen $G$ und $K$ drehbare Körper $A$ und $B$, Fig. 560, gegen einander, so stellen sich Geschwindigkeitsveränderungen heraus, welche sich aus den Trägheitsmomenten $M_1 k_1^2$ und $M_2 k_2^2$ der Massen dieser Körper hinsichtlich der festen Axen und mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Formeln bestimmen lassen. Sind die Perpendikel $GH$ und $KL$, welche sich von den Drehungsaxen gegen die Stoßlinie fällen lassen, $a_1$ und $a_2$, so hat man die auf die Lothpunkte $H$ und $L$ in der Stoßlinie

Fig. 560.




reducirten trägen Massen $= \dfrac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ und $\dfrac{M_2 k_2^2}{a_2^2}$, und führt man diese Werthe statt $M_1$ und $M_2$ in die Formeln für den freien Centralstoß ein, so bekommt man die Geschwindigkeitsveränderungen der Punkte $H$ und $L$ (§. 338)

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_2 k_2^2 : a_2^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2}\,(1+\sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2)\,\frac{M_2 k_2^2 a_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}\,(1+\sqrt{\mu}), \text{ sowie}$$

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_1 k_1^2 : a_1^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2}\,(1+\sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2)\,\frac{M_1 k_1^2 a_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}\,(1+\sqrt{\mu}),$$

wofern $c_1$ und $c_2$ die Geschwindigkeiten dieser Punkte vor dem Stoße waren.

Führen wir aber die Winkelgeschwindigkeiten ein, bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße durch $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ und die nach dem

Digitized by Google

Stoße durch $\omega_1$ und $\omega_2$, so haben wir $c_1 = a_1 \varepsilon_1$, $c_2 = a_2 \varepsilon_2$, sowie $v_1 = a_1 \omega_1$ und $v_2 = a_2 \omega_2$ zu setzen, und erhalten für den stoßenden Körper den Verlust an Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon_1 - \omega_1 = a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

und für den gestoßenen Körper, den Gewinn an Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 - \varepsilon_2 = a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

folglich die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße selbst:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 - a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Sind beide Körper vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, also:

$$1 + \sqrt{\mu} = 2,$$

und sind sie unelastisch, so hat man $\mu = 0$, also:

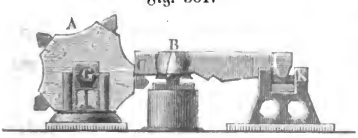
$$1 + \sqrt{\mu} = 1.$$

Im letzteren Falle ist der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebendiger Kraft

$$= (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)^2 \cdot \frac{M_1 k_1^2 . M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Beispiel. Die armirte Welle $AG$, Fig. 561, hat das Trägheitsmoment in Hinsicht auf ihre Umdrehungsare $G$,

Fig. 561.




$= M_1 k_1^2 = 40000 : g$,

und der Stirnhammer $BK$ dasselbe in Hinsicht auf seine Are $K$,

$= 150000 : g$,

der Hebelarm $GC$ der Welle ist 2 Fuß sowie der Hebelarm $KC$ des Hammers 6 Fuß, und die Winkelgeschwindigkeit der Welle im Augenblicke des Stoßes an den Hammer $= 1{,}05$ Fuß. Wie groß ist diese Geschwindigkeit nach dem Stoße und welche Leistung geht durch jeden Stoß verloren, wenn gänzlicher Mangel an Elasticität vorhanden vorausgesetzt wird? Es ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Welle:

$$\omega_1 = 1{,}05 - \frac{4 . 1{,}05 . 150000}{40000 . 36 + 150000 . 4} = 1{,}05 \left(1 - \frac{60}{204}\right) = 1{,}05 . 0{,}706$$

$= 0{,}741$ Fuß,

und die des Hammers,

$$= \frac{2 . 6 . 1{,}05 . 4}{204} \text{ auch } = \omega_1 \cdot \frac{GC}{KC} = 0{,}741 . {}^2/_6, = 0{,}247 \text{ Fuß},$$

d. i. dreimal so klein, als die der Welle. Der Arbeitsverlust bei jedem Anstoße ist

Digitized by Google

$$A = \frac{(2.1{,}05)^2}{2g} \cdot \frac{40000.150000}{40000.36 + 150000.4} = 0{,}016.(2{,}1)^2 \cdot \frac{600000}{144 + 60}$$
$$= 0{,}016.4{,}41 \cdot \frac{150000}{51} = \frac{10584}{51} = 207{,}5 \text{ Fußpfund.}$$

§. 343 **Stoss eines schwingenden Körpers.** Kommt ein freier und in fortschreitender Bewegung befindlicher Körper $A$, Fig. 562, mit einem um eine feste Axe $K$ drehbaren Körper $BCK$ zum Stoße, so findet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen statt $a_1\,\varepsilon_1$ und $a_1\,\omega_1$ die progressiven Geschwindigkeiten $c_1$ und $v_1$, und statt $\frac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ die träge Masse $M_1$ des ersten Körpers einsetzt, die übrigen Bezeichnungen aber unverändert läßt. Es ist hiernach die Geschwindigkeit der ersten Masse nach dem Stoße:

Fig. 562.

$$v_1 = c_1 - (c_1 - a_1\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2 k_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2},$$

und die Winkelgeschwindigkeit der zweiten:

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2\,(c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}.$$

Ist die Masse $M_2$ in Ruhe, also $\varepsilon_2 = 0$, so hat man:

$$v_1 = c_1 - c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2 k_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1 a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}.$$

Ist hingegen $M_1$ in Ruhe, stößt also die oscillirende Masse, so hat man $c_1 = 0$, daher:

$$v_1 = a_2\,\varepsilon_2\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2 k_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \left(1 - (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 a_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}\right).$$

Die Geschwindigkeit, welche einer ruhenden Masse von einer anderen durch den Anstoß ertheilt wird, hängt nicht allein von der Geschwindigkeit des Anstoßes und von den Massen der Körper, sondern auch von dem Abstande $KL = a_2$ ab, um welchen die Stoßrichtung $N\overline{N}$ von der Axe $K$ des drehbaren Körpers absteht. Stößt die freie Masse, so nimmt die drehbare Masse die Winkelgeschwindigkeit

Digitized by Google

$$\omega_2 = c_1 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}$$

an, und trifft die schwingende Masse gegen die freie, so erhält diese die Geschwindigkeit

$$v_1 = \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 k_2^2 . a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2},$$

es werden also beide Geschwindigkeiten um so größer, je größer

$$\frac{a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2} \text{ oder } \frac{1}{M_1 a_2 + \frac{M_2 k_2^2}{a_2}},$$

also je kleiner $M_1 a_2 + M_2 \frac{k_2^2}{a_2}$ ist.

Setzen wir statt $a_2$, $a \pm x$, wo $x$ sehr klein ist, so bekommen wir den Werth des letzteren Ausdruckes:

$$M_1 (a \pm x) + \frac{M_2 k_2^2}{a \pm x} = M_1 a \pm M_1 x + \frac{M_2 k_2^2}{a} \left(1 \mp \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \mp \cdots\right),$$

oder, wegen der Kleinheit der Potenzen von $x$,

$$= M_1 a + \frac{M_2 k_2^2}{a} \pm \left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x + \cdots$$

Soll nun $a$ dem kleinsten aller Werthe von $M_1 a_2 + \frac{M_2 k_2^2}{a_2}$ entsprechen, so muß das Glied $\pm \left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x$ wegfallen, weil dasselbe bei einem Zusatze ($x$) ein anderes Zeichen erhält, als bei einer Abnahme ($-x$).

Es muß also:

Fig. 563.

$$\left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x = \text{Null, d. i.:}$$

$$\frac{M_2 k_2^2}{a^2} = M_1, \text{ folglich}$$

$$a = \sqrt{\frac{M_2 k_2^2}{M_1}} = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

sein.

Wenn man also in diesem Abstande ($a$) den einen Körper gegen den anderen stößt, so nimmt dieser die größte Geschwindigkeit an, und zwar:

1) $\omega_2 = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 k_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 a}$,

in dem Falle, wenn der drehbare Körper gestoßen wird; und

2) $v_1 = {}^1/_2 k_2 \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{\varepsilon_2 a}{2}$,

wenn der freie Körper einen Stoß erhält.



Digitized by Google

Man nennt den in der Stoßlinie befindlichen Endpunkt $L$ des der größten Geschwindigkeit entsprechenden Abstandes oder Hebelarmes $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ zuweilen, jedoch unpassend, Mittelpunkt des Stoßes, angemessener vielleicht Stoßpunkt.

Es ist derselbe nicht mit dem oben (§. 313) gefundenen Mittelpunkte des Stoßes zu verwechseln, dessen Entfernung von der Umdrehungsaxe durch den Ausdruck

$$a = \frac{M_2 k_2^2}{M_2 s} = \frac{k_2^2}{s},$$

worin $s$ den Abstand des Schwerpunktes der Masse $M_2$ von der Umdrehungsaxe bezeichnet, bestimmt ist. Wenn die Richtung $\overline{N}N$ des Zusammenstoßes der Massen $M_1$ und $M_2$ durch den Mittelpunkt des Stoßes geht, so fällt die Reaction auf die Umdrehungsaxe der letzteren Null aus.

Damit z. B. ein Hammer beim Aufschlagen nicht pralle, d. i. auf die Hand, welche ihn hält, oder auf die Hülse, um welche er sich dreht, nicht reagire, ist es nöthig, daß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehe.

Wird der aufgehangene Körper $KB$ im Stoßpunkte, also im Abstande $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ von der Axe $K$, durch eine Masse $M_1$ mit der Kraft $P$ gestoßen, so ist die Reaction auf die Axe:

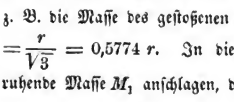
$$P_1 = P + R = P - \varkappa M_2 s \text{ (s. §. 313).}$$

Da $P = \frac{\varkappa M_2 k_2^2}{a}$ ist, so folgt die Winkelacceleration $\varkappa = \frac{Pa}{M_2 k_2^2}$ und $\varkappa M_2 s = \frac{M_2 s a}{M_2 k^2} P$, so daß nun die gesuchte Reaction:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{M_2 s a}{M_2 k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s a}{k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s}{k_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right) \text{ folgt.}$$

Beispiele. 1) Bei einer prismatischen Stange $CA$, Fig. 564, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, steht der Mittelpunkt des Stoßes um

Fig. 564.




$$CO = a = \frac{\frac{1}{3} r^2}{\frac{1}{2} r} = \frac{2}{3} r = \frac{2}{3} CA$$

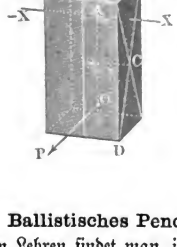
von der Are ab. Wenn man also die Stange an einem Ende festhält, und mit dem in der Entfernung $CO = \frac{2}{3} CA$ befindlichen Punkte auf ein Hinderniß $O$ aufschlägt, so wird man kein Prallen fühlen. Der Stoßpunkt dieser Stange steht dagegen um $r \sqrt{\frac{M_2}{3 M_1}}$ von $C$ ab; ist z. B. die Masse des gestoßenen Körpers, $M_1 = M_2$, so hat man diesen Abstand $= \frac{r}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\, r$. In diesem Abstande muß also die Stange $CA$ an die ruhende Masse $M_1$ anschlagen, damit diese mit der größten Geschwindigkeit fortgeht.

Digitized by Google

2) Bei einem Parallelepipede $BDE$, Fig. 565, welches sich um eine zu vier Seiten desselben parallel gehende und um $SA = s$ vom Schwerpunkt abstehende Axe $X\overline{X}$ dreht, ist der Abstand $AO$ des Stoßmittelpunktes $O$ von der Axe:

$$a = \frac{s^2 + 1/3\, d^2}{s},$$

Fig. 565.




wo $d$ die halbe Diagonale $CD$ der Seitenflächen bezeichnet, durch welche die Axe $X\overline{X}$ hindurchgeht (§. 287). Ginge die Stoßkraft $P$ durch den Stoßpunkt, so hätte man:

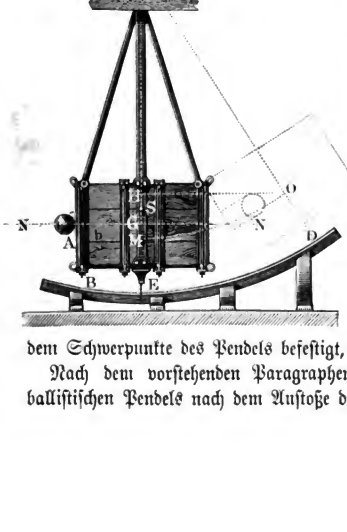
$$a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{(s^2 + 1/3\, d^2)\,\frac{M_2}{M_1}},$$

und daher die Reaction auf die Axe:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{s\,a}{k_2^2}\right)$$
$$= P\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1/3\, d^2}}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right).$$

**Ballistisches Pendel.** Eine Anwendung der im Vorstehenden entwickelten Lehren findet man in der Theorie des ballistischen Pendels oder des Pendels von Robins (franz. pendule ballistique; engl. ballistic pendulum). Dasselbe besteht in einer großen, um eine horizontale Axe $C$ drehbaren Masse $M$, Fig. 566, welche durch gegen sie abgeschossene Geschützkugeln $A$ in Schwingungen versetzt wird und dazu dient, die Geschwindigkeiten derselben zu ermitteln. Damit ein möglichst unelastischer Stoß eintrete, ist in der vorderen Seite, wo die Kugel anschlägt, eine Oeffnung angebracht, die man von Zeit zu Zeit mit frischem Holze oder Thon u. s. w. ausfüllt. Es bleibt dann auch die Kugel nach dem jedesmaligen Schusse in diesen Massen stecken und schwingt mit dem ganzen Körper gemeinschaftlich. Zur Ermittelung der Geschwindigkeit der Kugel ist es nöthig, den Elongationswinkel dieses Pendels zu kennen; deshalb wird noch ein Gradbogen $BD$ angebracht und ein Stift $E$ unter dem Schwerpunkte des Pendels befestigt, der an dem ersteren hingleitet. §. 344

Fig. 566.




Nach dem vorstehenden Paragraphen ist die Winkelgeschwindigkeit des ballistischen Pendels nach dem Anstoße der Kugel:



Digitized by Google

$$\omega = \frac{M_1 a_2 c_1}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2},$$

wenn $M_1$ die Masse der Kugel, $M_2 k_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels, $c_1$ die Geschwindigkeit der Kugel und $a_2$ den Hebelarm $CG$ des Stoßes oder den Abstand der Stoßlinie $N\overline{N}$ von der Drehungsaxe des Pendels bezeichnet. Ist die Entfernung $CM$ des Schwingungspunktes $M$ der ganzen Masse sammt Kugel vom Drehpunkte $C$, d. i. die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem ballistischen gleiche Schwingungsdauer hat, $= r$, und der Elongationswinkel $ECD = \alpha$, so hat man die Steighöhe $MH$ des isochron schwingenden Pendels:

$$h = CM - CH = r - r\cos.\alpha = r\,(1 - \cos.\alpha) = 2r\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

und daher die Geschwindigkeit im untersten Punkte seiner Bahn:

$$v = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}\,\sin.\frac{\alpha}{2},$$

oder die entsprechende Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{v}{r} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Werthe für die Winkelgeschwindigkeit folgt:

$$c_1 = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{M_1 a_2}\cdot 2\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Nun ist aber der Theorie des einfachen Pendels zufolge:

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{(M_1 + M_2)\,s},$$

wenn $s$ den Abstand $CS$ des Schwerpunktes $S$ von der Drehaxe bezeichnet; es folgt daher:

$$M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2 = (M_1 + M_2)\,s\,r \text{ und}$$

$$c_1 = 2\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)\cdot\frac{s}{a_2}\sqrt{gr}\,.\,\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Macht das Pendel in der Minute $n$ Schwingungen, so ist die Schwingungsdauer:

$$\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{60''}{n}, \text{ daher } \sqrt{gr} = \frac{60''.g}{n\pi},$$

und die gesuchte Kugelgeschwindigkeit:

$$c_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1}\cdot\frac{120gs}{n\pi a_2}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Beispiel. Wenn ein ballistisches Pendel von 3000 Pfund Gewicht durch eine angeschossene Kugel von 6 Pfund in Schwingungen versetzt wird, deren Elongation $15^0$ mißt, wenn ferner der Abstand $s$ des Schwerpunktes von der Axe, $= 5$ Fuß und der Abstand der Schußlinie von eben dieser Axe, $= 5\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, und

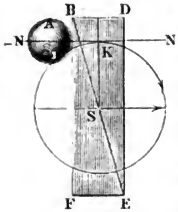
Digitized by Google

endlich die Zahl der Schwingungen in einer Minute $n = 40$ ausfällt, so ist nach obiger Formel die Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke des Anstoßes:

$$c = \frac{3006}{6} \cdot \frac{120 \,.\, 31{,}25 \,.\, 5}{40 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 5{,}5} \; sin.\, 7\tfrac{1}{2}{}^0 = \frac{501 \,.\, 3750 \,.\, sin.\, 7^0\, 30'}{44 \,.\, 3{,}1416} = 1774 \text{ Fuß.}$$

**Excentrischer Stoss.** Untersuchen wir endlich noch einen einfachen §. 345
Fall des excentrischen Stoßes, wenn beide Massen vollkommen frei sind. Wenn zwei Körper $A$ und $BE$, Fig. 567, so zusammenstoßen,

Fig. 567.




daß die Richtung $N\overline{N}$ des Stoßes durch den Schwerpunkt $S_1$ des einen Körpers hindurch und vor dem Schwerpunkt $S$ des anderen Körpers vorbeigeht, so ist der Stoß in Hinsicht auf den ersten Körper centrisch und in Hinsicht auf den anderen excentrisch. Die Wirkungen dieses excentrischen Stoßes lassen sich aber nach dem Lehrsatze in §. 281 finden, wenn man annimmt: erstens, der zweite Körper sei frei und die Stoßrichtung gehe durch den Schwerpunkt $S$ selbst, und zweitens, dieser Körper werde im Schwerpunkte festgehalten und die Stoßkraft wirke als eine Umdrehungskraft. Ist nun $c_1$ die anfängliche Geschwindigkeit von $A$, $c$ die des Schwerpunktes von $BE$, und gehen beide Geschwindigkeiten durch den Stoß in $v_1$ und $v$ über, so bleibt, wie in §. 332, $M_1 v_1 + Mv = M_1 c_1 + Mc$. Ist ferner $\varepsilon$ die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers $BE$ bei seiner Umdrehung um die Axe durch den Schwerpunkt und senkrecht gegen die Ebene $N\overline{N}S$, geht diese Geschwindigkeit durch den Stoß in $\omega$ über, und bezeichnet man das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf $S$ durch $Mk^2$, und die Excentricität oder den Abstand $SK$ des Schwerpunktes $S$ von der Stoßrichtung durch $s$, so hat man auch

$$M_1 v_1 + \frac{Mk^2}{s^2} \cdot s\,\omega = M_1 c_1 + \frac{Mk^2}{s^2}\, s\,\varepsilon.$$

Sind beide Körper unelastisch, so haben die Berührungspunkte beider am Ende des Stoßes gleiche Geschwindigkeit, es ist also noch $v_1 = v + s\,\omega$. Bestimmt man aus den vorigen Gleichungen $v$ und $\omega$ durch $v_1$ und setzt man die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$v_1 = \frac{M_1\,(c_1 - v_1)}{M} + c + \frac{M_1 s^2\,(c_1 - v_1)}{Mk^2} + s\,\varepsilon,$$

und hieraus bestimmt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{Mk^2\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2},$$

der Gewinn an progressiver Geschwindigkeit des zweiten:

$$v - c = \frac{M_1 k^2\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2},$$

Digitized by Google

und der Gewinn an Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega - \varepsilon = \frac{M_1 s\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2}.$$

Beim vollkommen elastischen Stoße sind diese Werthe doppelt und beim unvollkommen elastischen Stoße $(1 + \sqrt{\mu})$ mal so groß.

Beispiel. Trifft eine eiserne Kugel $A$ von 65 Pfund Gewicht das anfänglich in Ruhe befindliche Parallelepiped $BE$, Fig. 567, aus Tannenholz mit 36 Fuß Geschwindigkeit, ist die Länge dieses Körpers 5 Fuß, die Breite 3 Fuß und die Dicke 2 Fuß, und weicht die Stoßrichtung $N\overline{N}$ um $SK = s = 1\frac{3}{4}$ Fuß von dem Schwerpunkte $S$ ab, so ergeben sich folgende Geschwindigkeitswerthe nach dem Stoße. Das specifische Gewicht des Tannenholzes, $= 0{,}45$ angenommen, folgt das Gewicht des parallelepipedischen Körpers, $= 5 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 61{,}75 \,.\, 0{,}45 = 833{,}6$ Pfund. Das Quadrat der halben Diagonale $BS$ der Seitenfläche $BDF$ parallel zur Stoßrichtung ist:

$$(5/2)^2 + (3/2)^2 = 7{,}25,$$

daher folgt (nach §. 287):

$$k^2 = 1/3 \,.\, 7{,}25 = 2{,}416 \ldots,$$

ferner

$$g\,M k^2 = 833{,}6 \,.\, 2{,}416 \ldots = 2014{,}0$$

und

$$g\,(M_1 + M)\,k^2 = 898{,}6 \,.\, 2{,}416 \ldots = 2171{,}1,$$

und es ist nun die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - \frac{M k^2 c_1}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2} = 36\left(1 - \frac{2014{,}0}{2171{,}1 + 65 \,.\, 1{,}75^2}\right)$$

$$= 36\left(1 - \frac{2014{,}0}{2370{,}2}\right) = 36 \,.\, 0{,}1503 = 5{,}410 \text{ Fuß},$$

ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des gestoßenen Körpers:

$$v = \frac{M_1 k^2 c_1}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2} = \frac{157{,}08 \,.\, 36}{2370{,}2} = 2{,}386 \text{ Fuß},$$

und endlich die Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega = \frac{M_1 s c_1}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2} = \frac{113{,}75 \,.\, 36}{2370{,}2} = 1{,}728 \text{ Fuß}.$$

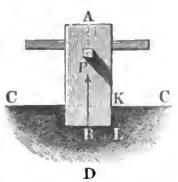
§. 346 **Benutzung der Stosskraft.** Während das Gewicht eines Körpers eine nur von der Masse desselben abhängige und mit derselben gleichmäßig wachsende Kraft ist, hat man es dagegen bei dem Stoße mit einer Kraft zu thun, welche nicht allein mit der Masse, sondern auch mit der Geschwindigkeit und mit der Härte der zusammenstoßenden Körper wächst (s. §. 336 und §. 338) und daher auch beliebig gesteigert werden kann. Deshalb ist auch der Stoß ein vorzügliches Mittel zur Erzeugung größerer Kräfte mit Hülfe kleinerer Massen oder Gewichte, von welchen z. B. beim Zerschlagen oder Zerpochen der Steine, beim Schneiden und Zusammendrücken der Metalle, beim Einschlagen der Nägel, Einrammen der Pfähle u. s. w. vielfacher Gebrauch gemacht wird. Auf der anderen Seite ist aber auch der Stoß ein Mittel, wodurch nicht allein mechanisches Arbeitsvermögen aufgezehrt, sondern auch ein stärkeres Abführen oder Abnutzen der Maschinentheile herbeigeführt und überhaupt die Haltbarkeit

Digitized by Google

und Dauerhaftigkeit der Maschinen und Bauwerke beeinträchtigt wird, so daß es daher nöthig wird, denselben stärkere Dimensionen zu geben, als wenn sie Züge und Drücke, Gewichte u. s. w. ohne Stöße aufzunehmen hätten.

Schlägt ein fester Körper $AB$, Fig. 568, auf eine unbegrenzte weiche Masse $CDC$ auf, so drückt er dieselbe mit einer gewissen Kraft zusammen, deren mittlerer Werth $P$ sich mittels der Tiefe $KL = s$ der Eindringung bestimmen läßt, wenn man die Arbeit $Ps$ des Eindringens gleich dem Arbeitsvermögen der trägen Masse des Körpers setzt. Ist $M$ die Masse oder $G = gM$ das Gewicht dieses Körpers $(AB)$ und $v$ die Geschwindigkeit, mit welcher er auf $CDC$ aufschlägt, so beträgt das Arbeitsvermögen seiner trägen Masse

Fig. 568.




$$\tfrac{1}{2} Mv^2 = \frac{v^2}{2g} G,$$

und es ist daher die gesuchte Kraft, mit welcher die weiche Masse zusammengedrückt wird:

$$P = \tfrac{1}{2} \frac{Mv^2}{s} = \frac{v^2}{2gs} G.$$

Wenn man diese Kraft durch den Querschnitt $F$ des Körpers dividirt, so erhält man die Kraft, mit welcher jede Flächeneinheit der lockeren Masse zusammengedrückt ist, und welche folglich auch eine solche Einheit, ohne nachzugeben, tragen kann:

$$p = \frac{P}{F} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{Fs}.$$

Der Sicherheit wegen belastet man jedoch eine solche Masse nur mit einem kleinen Theil von $p$, z. B. mit dem zehnten Theile $\left(\frac{p}{10}\right)$.

Die Geschwindigkeit $v$ erhält der Körper $M$ dadurch, daß man ihn von einer Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ frei herabfallen läßt. Führt man diese Höhe statt $\frac{v^2}{2g}$ in die vorige Formel ein, so erhält man einfach den Widerstand der weichen Masse:

$$P = \frac{Gh}{s}, \text{ also für die Flächeneinheit: } p = \frac{Gh}{Fs}.$$

Die Kraft oder der Widerstand $P$, welchen die lockere oder weiche Masse dem Eindringen eines starren Körpers $AB$ entgegensetzt, ist in der Regel nicht constant, sondern wächst mit der Tiefe $s$ des Eindringens. In vielen Fällen kann man annehmen, daß sie mit $s$ gleichmäßig wächst, und zwar anfangs Null und am Ende des Eindringens doppelt so groß ist als im

Digitized by Google

Mittel. Da nun in den gefundenen Formeln $P$ den mittleren Kraftwerth angiebt, so hat man folglich dann den Widerstand der weichen Masse oder die Tragkraft $P_1$ derselben doppelt so groß, als diese Formeln angeben, d. i.

$$P_1 = 2\,P = \frac{2\,G\,h}{s}$$

zu setzen.

Beispiel. Wenn eine Handramme $AB$, Fig. 568, deren Gewicht $G = 120$ Pfund ist, von einer Höhe $h = 4$ Fuß auf eine Erdmasse herabfällt, und diese beim letzten Schlage noch $^1/_4$ Zoll zusammendrückt, so ist die Tragkraft dieser Masse auf eine dem Querschnitt der Ramme gleiche Fläche:

$$P = \frac{G\,h}{s} = \frac{120.4}{^1/_{48}} = 23040 \text{ Pfund.}$$

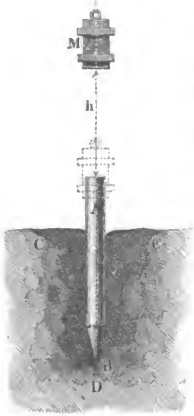
Wäre nun noch der Querschnitt $F$ der Ramme, $^5/_4$ Quadratfuß, so würde folglich das Tragvermögen der Erdmasse pr. Quadratfuß

$$p = \frac{P}{F} = \frac{23040}{1{,}15} = 18432 \text{ Pfund}$$

betragen, wofür jedoch der Sicherheit wegen, vielleicht nur $^1/_{10}\,P_1 = 1843{,}2$ Pfund anzunehmen ist.

§. 347 **Einrammen der Pfähle.** Durch Einrammen von Pfählen wie $AB$, Fig. 569, erhält der Erdboden $CDC$ oder eine andere lockere Masse noch eine größere Tragfähigkeit als durch bloßes Zusammenstampfen. Solche Pfähle (franz. pieux; engl. piles) sind 10 bis 30 Fuß lang, 8 bis 20 Zoll dick, und erhalten einen zugespitzten eisernen Schuh $B$. Der Körper $M$, der sogenannte Rammklotz, Rammbär oder Hoyer (franz. mouton; engl. battering ram), welchen man 3 bis 30 Fuß hoch herabfallen und auf den Kopf des Pfahles aufschlagen läßt, besteht in der Regel aus Gußeisen, seltener aus Eichenholz, und wiegt 5 bis 20 Ctr.

Fig. 569.




Fällt der Rammbär von der senkrechten Höhe $h$ herab, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er auf den Pfahl aufschlägt,

$$c = \sqrt{2\,g\,h},$$

und ist das Gewicht desselben, $= G$, das des Pfahles aber, $= G_1$, so hat man unter der Voraussetzung, daß beide Körper unelastisch sind, die Geschwindigkeit derselben am Ende des Stoßes (s. §. 332):

$$v = \frac{Gc}{G + G_1},$$

Digitized by Google

daher die entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 h.$$

Sinkt nun der Pfahl beim letzten Schlage um die Tiefe $s$ ein, so ist der Widerstand des Erdreichs, und also auch die Tragfähigkeit des Pfahles:

$$P = \frac{v^2}{2gs}(G + G_1) = \frac{h}{s} \cdot \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder vielmehr, da auch das Gewicht $G + G_1$ des Pfahles sammt Rammbär dem Widerstande des Erdreiches entgegenwirkt:

$$P = \frac{h}{s} \cdot \frac{G^2}{G + G_1} + (G + G_1).$$

In den meisten Fällen ist $G + G_1$ so klein gegen $P$, daß der letzte Theil der Formel unbeachtet bleiben kann.

Ist das Gewicht $G_1$ des Pfahles viel kleiner als das Gewicht $G$ des Rammbäres, so kann man

$$v = \frac{Gc}{G + G_1} = c$$

und einfach,

$$P = \frac{h}{s} G \text{ setzen.}$$

Die vorstehende Theorie reicht in der praktischen Anwendung nur dann aus, wenn der Widerstand $P$ ein mäßiger und folglich die Tiefe $s$ des Eindringens nicht sehr klein ist, so daß die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. außer Acht gelassen werden kann. Ist hingegen der Widerstand $P$ sehr groß, und folglich die Tiefe $s$ des Eindringens bei einem Schlage sehr klein, so läßt sich die Zusammendrückung $\sigma$ des Pfahles nicht mehr als Null ansehen und muß daher mit in Betracht gezogen werden.

Der Pfahl fängt natürlich nicht eher an zu sinken, als bis die Kraft des Stoßes dem Widerstande $P$ des Erdreichs gleich geworden ist. Sind nun $H = \frac{FE}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ die Härten des Rammbäres und des Pfahles (im Sinne des §. 336), so beträgt bei der Stoßkraft $P$ die Summe der Zusammendrückungen beider Körper zusammen:

$$\sigma = \frac{P}{H} + \frac{P}{H_1} = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) P,$$

und es ist daher die auf diese Zusammendrückungen verwendete mechanische Arbeit:

$$L = P\sigma = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}.$$

Wird nun durch diesen ersten Zusammenstoß die Geschwindigkeit $c$ des

Digitized by Google

Rammbäres in die Geschwindigkeit $v$ ungeändert, so verrichtet Masse $M = \frac{G}{g}$ desselben die mechanische Arbeit

$$L = {}^1/_2 M c^2 - {}^1/_2 M v^2 = (c^2 - v^2) \frac{M}{2} = \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) G;$$

wir können folglich

$$\left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) G = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

setzen, und erhalten

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} - \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2G},$$

folglich die Geschwindigkeit des Rammbäres im Augenblicke, wenn der Pfahl einzudringen anfängt:

$$v = \sqrt{c^2 - 2g \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2G}}.$$

Es ist hiernach zu ermessen, daß dieses Eindringen des Pfahles (und ebenso auch eines Bolzens oder Nagels in eine Wand) nur dann vor sich gehen kann, wenn

$$\frac{c^2}{2g} G > \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

ist, wenn also das Gewicht des Rammbäres und die Geschwindigkeit desselben eine dem Widerstande des Erdreiches angemessene Größe haben.

Während der Pfahl eindringt, nimmt die Stoßkraft und folglich auch die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. so lange zu, als die Geschwindigkeit des Rammbäres noch größer ist als die des Pfahles; nachdem aber beide Körper eine gleiche Geschwindigkeit $v_1$ erlangt haben und die Stoßkraft ihr Maximum erreicht hat, fangen die Körper an, sich allmälig wieder auszudehnen. Bei diesem Ausdehnen geht nicht allein die Geschwindigkeit des Pfahles, sondern auch die des Rammbäres allmälig in Null, sowie auch der Druck zwischen beiden Körpern wieder in $P$ über, und es ist folglich in dem Augenblicke, wenn das weitere Eindringen des Pfahles aufhört, das ganze mechanische Arbeitsvermögen $\frac{c^2}{2g} G$ des Rammbäres durch die Arbeit

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

zum Zusammendrücken, und durch die Arbeit

$$Ps$$

zum Eintreiben des Pfahles um die Tiefe $s$, verbraucht.

Es ist also hiernach:

$$\frac{c^2}{2g} G = G h = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2} + Ps,$$

Digitized by Google

und daher die der Eindringungstiefe $s$ entsprechende Tragkraft:

$$P = \left(\frac{H H_1}{H + H_1}\right)\left(\sqrt{2\left(\frac{H + H_1}{H H_1}\right)\frac{c^2}{2g}\,G + s^2} - s\right).$$

Wäre die Zusammendrückung $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2}$ bedeutend kleiner als der Weg $s$ des Pfahles, so könnte man einfach

$$P = \frac{c^2}{2g}\,\frac{G}{s} = \frac{G h}{s} \text{ oder schärfer,}$$

$$P = \frac{G h}{s + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{G h}{2 s}} \text{ setzen.}$$

Vergleicht man die Arbeit

$$P s = \frac{G h}{1 + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2 s}}$$

des eindringenden Pfahles mit der Arbeit $G h$, welche das Aufheben des Rammbäres erfordert, so sieht man, daß sich dieselbe der letzteren um so mehr nähert, je kleiner $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2 s}$ ausfällt, je größer also die Härten $H = \frac{F E}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ des Rammbäres und des Pfahles, d. i. je größer die Querschnitte $F$ und $F_1$ sowie die Elasticitätsmodel $E$ und $E_1$, und je kleiner die Längen $l$ und $l_1$ dieser Körper sind.

Die Wirkungen dieser beiden Körper durch ihre Gewichte kann man ganz außer Acht lassen, da die letzteren in der Regel nur einen kleinen Theil von dem Widerstande $P$ ausmachen. Ebenso läßt sich das Arbeitsvermögen beider Körper, welches dieselben in Folge ihrer, wenn auch nur unvollkommenen Elasticität besitzen, nachdem der Pfahl wieder zur Ruhe übergegangen ist, vernachlässigen, da der durch die weitere Ausdehnung der Körper zurückgeworfene Körper beim Zurückfallen und Wiederaufschlagen auf den Pfahl in der Regel nicht im Stande ist, $P$ zu überwinden und den Pfahl in Bewegung zu setzen. Der Sicherheit wegen belastet man die eingerammten Pfähle nur mit $^1/_{10}$ des gefundenen Widerstandes $P$, oder nach Befinden noch schwächer. Nach neuerlich angestellten Versuchen vom Herrn Major John Sanders im Fort Delaware (briefliche Mittheilung) läßt sich der Widerstand annähernd einfach

$$P = \frac{G h}{3 s} \text{ setzen.}$$

Beispiel. Ein Pfahl von 1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll Querschnitt, 25 Fuß = 25 . 12 = 300 Zoll Länge und 1200 Pfund Gewicht, ist durch einen 6 Fuß = 72 Zoll hoch herabfallenden Rammbär von 2000 Pfund Gewicht bei der

Digitized by Google

letzten Hitze von 10 Schlägen noch 2 Zoll tiefer eingetrieben worden, welche Größe hat der Widerstand des Erdreiches? Sieht man von der unbedeutenden Zusammendrückung des gußeisernen Rammbärs ganz ab, und setzt man (nach §. 212) den Elasticitätsmodul des Holzes $E_1 = 1'500000$ Pfund, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) = 0 + \frac{l_1}{2 F_1 E_1} = \frac{300}{2 . 144 . 1'500000} = \frac{1}{1440000};$$

da nun noch $Gh = 2000 . 72 = 144000$ Zollpfund und die Tiefe des Eindringens nach einem Schlage, $s = \frac{2}{10} = 0{,}2$ Zoll ist, so erhält man zur Bestimmung des Widerstandes $P$ folgende Gleichung:

$$\frac{P^2}{1440000} + 0{,}2\,P = 144000, \text{ oder } P^2 + 288000\,P = 207360000000.$$

Die Auflösung derselben giebt:

$$P = -144000 + \sqrt{228096000000} = 333590 \text{ Pfund.}$$

Nach der Sanders'schen Formel ist:

$$P = \frac{Gh}{3s} = \frac{144000}{0{,}6} = 290000 \text{ Pfund,}$$

wogegen der alten Formel zufolge,

$$P = \frac{G^2 h}{(G + G_1)s} = \frac{G}{G + G_1} \cdot \frac{Gh}{s} = \frac{2000}{3200} \cdot \frac{144000}{0{,}2} = \tfrac{5}{8} . 720000$$
$$= 450000 \text{ Pfund}$$

sein müßte.

Aus $P = 333590$ Pfund ergiebt sich

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2} = 77269 \text{ Zollpfund,}$$

und daher die Höhe, von welcher der 2000 Pfund schwere Rammbär herabfallen muß, um den Pfahl bewegen zu können:

$$h = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2G} = \frac{77269}{2000} = 38{,}6 \text{ Zoll.}$$

§. 348 **Absolute Stossfestigkeit.** Mit Hülfe der Arbeitsmodel der Elasticität und Festigkeit (s. §. 206) kann man nun auch leicht berechnen, unter welchen Bedingungen ein prismatischer Körper $AB$, Fig. 570, durch einen in der Axenrichtung geführten Stoß bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder, nach Befinden, zerrissen werden kann. Ist $G$ das Gewicht und $c$ die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers, so hat man die Arbeit, welche derselbe beim Aufschlagen auf den prismatischen Körper, dessen Gewicht wir mit $G_1$ bezeichnen wollen, entwickelt:

Fig. 570.

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder einfacher, wenn man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch $h$ bezeichnet,

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Digitized by Google

Diese Arbeit wird vorzüglich auf die Ausdehnung der Stange $AB$, woran der zweite Körper hängt, aufgewendet; ist daher $H$ die Härte, $l$ die Länge, $F$ der Querschnitt und $E$ der Elasticitätsmodul, sowie $P$ die Stoßkraft und $\lambda$ die durch dieselbe hervorgebrachte Ausdehnung dieser Stange, so hat man:

$$L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2}{2H} = {}^1/_2 H\lambda^2 = \frac{FE}{2l}\lambda^2;$$

folglich:

$$\frac{FE}{2l}\lambda^2 = \frac{G^2 h}{G + G_1},$$

und es ist hiernach die durch dieses Zusammenstoßen bewirkte Ausdehnung $\lambda$ der Stange leicht zu berechnen.

Soll die Stange hierbei nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden, so hat man, wenn $A$ den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze bezeichnet (s. §. 206),

$$L = AV = AFl,$$

und daher

$$AFl = \frac{G^2 h}{G + G_1}$$

zu setzen, und es ist daher die Stoßgeschwindigkeit $c = \sqrt{2gh}$, bei welcher die Grenze der Elasticität eintritt, durch ihre Höhe

$$h = \frac{G + G_1}{G^2} \cdot AFl$$

bestimmt.

Kommt es darauf an, die Bedingung des Zerreißens der Stange zu finden, so hat man den Arbeitsmodul $A$ der Elasticitätsgrenze durch den Arbeitsmodul $B$ des Zerreißens zu ersetzen.

Man ersieht aus diesen Formeln, daß die Stange um so größere Stöße aushalten kann, je größer ihre Masse ist. Hieraus folgt die wichtige Regel, daß man den Stößen ausgesetzten Körpern möglichst große Massen geben soll.

Da $G$ und $G_1$ während des Stoßes noch um $\lambda$ sinken, so ist richtiger

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1} + (G + G_1)\lambda,$$

also für den Fall, daß durch den Stoß die Elasticitätsgrenze erreicht wird,

$$AF = \frac{G^2}{G + G_1} \cdot \frac{h}{l} + (G + G_1)\frac{\lambda}{l},$$

wobei $\frac{\lambda}{l} = \sigma$ die dieser Grenze entsprechende Ausdehnung bedeutet.

Will man endlich noch die Masse und das Gewicht $G_2$ der Stange mit in Betracht ziehen, so hat man, da der Schwerpunkt derselben nur um ${}^1/_2\,\lambda$ sinkt,

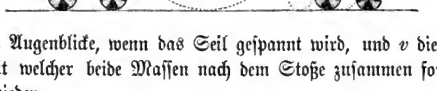
Digitized by Google

$$AF = \frac{G^2}{G + G_1 + G_2} \cdot \frac{h}{l} + (G + G_1 + {}^1/_2\, G_2)\,\sigma$$

zu setzen.

Ein ähnlicher Fall der Stoßwirkung kommt dann vor, wenn eine bewegte Masse $M = \frac{G}{g}$, Fig. 571, mittels einer Kette oder eines Seiles $AB$ eine andere Masse $M_1 = \frac{G}{g}$ in Bewegung setzt. Ist $c$ die Geschwindigkeit von

Fig. 571.




$M$, in dem Augenblicke, wenn das Seil gespannt wird, und $v$ die Geschwindigkeit, mit welcher beide Massen nach dem Stoße zusammen fortgehen, so hat man wieder:

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1},$$

dagegen aber die Arbeit, welche auf die Ausdehnung der Kette verwendet wird:

$$L = {}^1/_2\, Mc^2 - {}^1/_2\,(M + M_1)\,v^2 = \left(M - \frac{M^2}{M + M_1}\right)\frac{c^2}{2}$$

$$= \frac{MM_1}{M + M_1} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{G\,G_1}{G + G_1} \cdot h.$$

Wenn daher die Kette u. s. w. bei diesem Zusammenstoßen nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll, so läßt sich

$$AFl = \frac{G\,G_1}{G + G_1} h$$

setzen, wobei $F$ den Querschnitt und $l$ die Länge der Kette bezeichnen.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Kettenbrücke zwei gegenüber befindliche Hängestangen zusammen ein constantes Gewicht von 5000 Pfund tragen und durch einen darüber wegfahrenden Wagen noch mit 6000 Pfund belastet werden, wenn ferner der Arbeitsmodul $A$ der Elasticitätsgrenze des Schmiedeeisens, 7 Zollpfund, die Länge einer Hängestange, 200 Zoll, und der Querschnitt derselben, 1,5 Quadratzoll beträgt, so hat man die gefährliche Fallhöhe:

$$h = \frac{AFl\,(G + G_1)}{G^2} = \frac{7 \,.\, 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 200 \,.\, 11000}{36000000} = \frac{7.11}{60} = {}^{77}/_{60} = 1{,}28 \text{ Zoll}.$$

Rollt hiernach der Wagen über ein Hinderniß von 1,3 Zoll Höhe weg, so werden die Hängestangen schon Gefahr laufen, über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt zu werden.

2) Wenn das gefüllte Fördergefäß oder die sogenannte Treibetonne in einem Schachte nicht allmälig aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird, sondern mittels des vorher schlaff herabhängenden Seiles plötzlich von dem umlaufenden Korbe in eine gewisse Geschwindigkeit versetzt wird, so dehnt sich dadurch das Seil oft bis

Digitized by Google

über die Elasticitätsgrenze aus und es wird dasselbe zuweilen auch ganz zerrissen. Ist z. B. die träge Masse der armirten Korbwelle, reducirt auf den Umfang derselben: $M = \frac{G}{g} = \frac{100000}{g}$, das Gewicht der gefüllten Tonne, $G_1 = 2000$ Pfund, das Gewicht des Treibeseiles, $= 400$ Pfund, das Gewicht eines Cubikzolles Seil, $= 0{,}3$ Pfund, folglich das Volumen dieses Seiles:

$$Fl = \frac{G_1}{\gamma} = \frac{400}{0{,}3} = \frac{4000}{3} \text{ Pfund},$$

und endlich der Arbeitsmodul für das Zerreißen desselben: $B = 350$ Pfund, so hat man die dem Zerreißen des Seiles entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$h = BFl \cdot \frac{G + G_1}{G\,G_1} = 350 \cdot \frac{4000}{3} \cdot \frac{100000 + 2000}{100000 \,.\, 2000} = \frac{1'400000}{3} \cdot \frac{102}{200000}$$

$= 238$ Zoll $= 19{,}83$ Fuß,

und daher die Geschwindigkeit des Seiles bei Beginn des Anspannens:

$$c = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{62{,}5 \,.\, 19{,}83} = 35{,}2 \text{ Fuß}.$$

**Relative Stossfestigkeit.** Die vorstehende Theorie findet auch ihre Anwendung, wenn ein an beiden Enden unterstützter prismatischer Körper $BB$, Fig. 572, in seiner Mitte $C$ den Schlag eines von einer Höhe $AC = h$ niederfallenden Körpers $A$ aufnehmen muß. Ist $\frac{G}{g} = M$ die träge Masse des fallenden Körpers und $M_1$ die nach der Mitte $C$ reducirte träge Masse des Körpers $BB$, so hat man wieder das Arbeitsvermögen, welches beide Körper nach dem Auffschlagen besitzen: §. 349

$$L = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{M^2}{M + M_1} = \frac{c^2}{2\,g} \cdot \frac{M}{M + M_1} \cdot Mg = \frac{M}{M + M_1} G\,h.$$

Fig. 572.

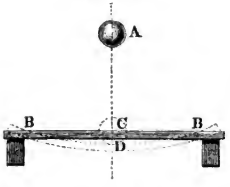
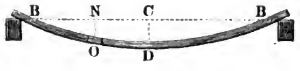



Fig. 573.




Die träge Masse $M_1$ des Balkens $BB_1$ ist auf folgende Weise zu ermitteln. Es sei $G_1$ das Gewicht dieses Balkens, $l$ die halbe Länge $BD$, Fig. 573, derselben, $x$ eine Abscisse $BN$ und $y$ die entsprechende Ordinate $NO$ der von $BB$ im Augenblicke der größten Biegung gebildeten Curve; endlich bezeichne noch $a$ die größte Bogenhöhe $CD$ dieser Curve. Denken wir uns $BC$ in $n$ (unendlich viele) Theile zerlegt, so erhalten wir ein Element $O$ des Stangengewichtes, $= \frac{G_1}{n}$, und daher ein Element der trägen Stangenmasse von $N$ nach $D$ reducirt:

Digitized by Google

$$= \frac{G_1}{n g} \cdot \left(\frac{N O}{C D}\right)^2 = \frac{G_1 y^2}{n g a^2}.$$

Nun ist aber nach §. 217:

$$y = \frac{P x}{2 W E}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right), \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{P^2 x^2}{4 W^2 E^2}\left(l^4 - {}^2/_3 l^2 x^2 + \frac{x^4}{9}\right), \text{ und } a^2 = \frac{P^2 l^6}{9 W^2 E^2},$$

daher folgt das gesuchte Element der trägen Stange:

$$= \frac{9 G_1 x^2\left(l^4 - {}^2/_3 l^2 x^2 + \frac{x^4}{9}\right)}{4 n g l^6}.$$

Wenn man nun statt $x$ nach und nach $\frac{l}{n}$, $2\frac{l}{n}$, $3\frac{l}{n} \cdots \frac{nl}{n}$ einführt, und die dadurch erhaltenen Werthe addirt, u. s. w., so erhält man die nach der Mitte $C$ reducirte träge Masse der Stange $BB$:

$$M_1 = \frac{9 G_1}{4 g l^6}\left(l^4 \cdot \frac{l^2}{3} - {}^2/_3 l^2 \cdot \frac{l^4}{5} + {}^1/_9 \frac{l^6}{7}\right) = {}^{17}/_{35} \cdot \frac{G_1}{g}.$$

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Arbeit des Stoßes

$$L = \frac{M}{M + M_1} \cdot G h = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1}$$

setzen, und erhalten so die Bedingung des Ausbiegens bis zur Elasticitätsgrenze (s. §. 235):

$$A \cdot \frac{W l}{3 e^2} = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1},$$

also, wenn der Balken eine parallelepipedische Form hat,

$${}^1/_9 A V_1 = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1},$$

und daher

$$h = \frac{A V_1 (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 G^2}, \text{ oder } V_1 = \frac{G_1}{\gamma} \text{ gesetzt,}$$

$$h = \frac{A G_1 (G + {}^{17}/_{35} G)}{9 \gamma G^2}.$$

Führt man $B$ statt $A$ ein, so giebt der Ausdruck

$$h = \frac{B G_1 (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 \gamma G^2}$$

die Höhe an, von welcher das Gewicht $G$ herabfallen muß, um den parallelepipedischen Stab zu zerbrechen.

Beispiel. Wie hoch muß ein eisernes Gewicht $G$ von 200 Pfund herabfallen, um eine an beiden Enden aufliegende Gußeisenplatte von 36 Zoll Länge, 12 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke in ihrer Mitte zu zerschlagen?

Digitized by Google

Es ist hier der Arbeitsmodul der Festigkeit des Zerreißens

$$B = 14{,}2 \text{ Zollpfund}$$

zu setzen (s. §. 211), ferner das Volumen der Platte:

$$V_1 = b\,h\,l = 12 \,.\, 3 \,.\, 36 = 1296 \text{ Cubikzoll},$$

und da ein Cubikzoll Gußeisen, $\gamma = 0{,}259$ Pfund wiegt, ihr Gewicht:

$$G_1 = 1296 \,.\, 0{,}259 = 335{,}7 \text{ Pfund};$$

daher folgt die fragliche Höhe:

$$h = \frac{14{,}2 \,.\, 335{,}7\,(200 + {}^{17}/_{35} \,.\, 356{,}4)}{9 \,.\, 0{,}275 \,.\, 40000} = 18 \text{ Zoll}.$$

**Arbeit der Torsionsfestigkeit.** Es lassen sich auch noch die Wirkungen des Stoßes auf die Torsion der Wellen untersuchen. Nach §. 262 ist die mechanische Leistung, welche die Torsion $\alpha$ einer Welle von der Länge $l$ und dem Drehungsmomente $W$ erfordert: §. 350

$$L = \frac{P\alpha\,a}{2} = \frac{\alpha^2 \,.\, W\,C}{2\,l} = \frac{P^2 a^2 l}{2\,W\,C},$$

auch läßt sich setzen

$$L = \frac{S^2}{2\,C}\,\frac{Wl}{e^2} \text{ (s. §. 264)},$$

wenn $e$ den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe und $S$ die Spannung dieser Faser bezeichnet.

Führt man statt $S$ den Tragmodul $T$, und statt $\frac{T^2}{2\,C} = \frac{\sigma\,T}{2}$ den Arbeitsmodul $A$ der Elasticität ein, so erhält man die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die äußersten Fasern bis zur Elasticitätsgrenze zu spannen:

$$L = A \cdot \frac{Wl}{e^2},$$

und die mechanische Arbeit zum Abwürgen der Welle, wenn man den Arbeitsmodul $A$ durch den Arbeitsmodul $B$ des Abdrehens ersetzt:

$$L_1 = B \cdot \frac{Wl}{e^2}.$$

Für eine cylindrische Welle ist $W = \frac{\pi r^4}{2}$ und $e = r$, daher

$$L = \frac{A}{2} \cdot \pi r^2 l = \frac{A}{2}\,V \text{ und } L_1 = \frac{B}{2} \cdot \pi r^2 l = \frac{B}{2}\,V,$$

wobei $V = \pi r^2 l$, das Volumen dieser Welle bezeichnet.

Für eine Welle mit quadratischem Querschnitte ist dagegen bei der Seitenlänge $b$ dieses Querschnittes:



Digitized by Google

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e = b\sqrt{1/2},$$

folglich:

$$L = \frac{A}{3} b^2 l = \frac{A}{3} V, \text{ und } L_1 = \frac{B}{3} V.$$

Stößt eine umlaufende Radwelle, deren auf den Angriffspunkt des Stoßes reducirte Masse $M = \frac{G}{g}$ ist, an eine ruhende Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$, mit der Geschwindigkeit $c$, so daß sich beide nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1}$$

fortbewegen (s. §. 334), so geht hierbei die Arbeit

$$L = \frac{G G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2g}$$

verloren (s. §. 335), welche auf die Torsion der Welle und Biegung der Radarme u. s. w. verwendet wird.

Nun ist aber auch $L$ die Summe der Arbeiten, welche auf die Torsion der Welle und Biegung der Radarme verwendet wird, d. i.:

$$L = A \cdot \frac{Wl}{e^2} + A_1 \frac{W_1 l}{e_1^2},$$

wobei $A_1$ den Arbeitsmodul, $W_1$ das Maß des Biegungsmomentes und $e_1$ den Abstand der äußersten Fasern von der neutralen Axe bezeichnet (s. §. 235), daher läßt sich setzen:

$$\frac{A\,W l}{e^2} + \frac{A_1\,W_1\,l_1}{3\,e_1^2} = \frac{G\,G_1}{G + G_1} \frac{c^2}{2\,g}.$$

Ist die Welle cylindrisch, so hat man $\frac{Wl}{e^2} = \frac{V}{2}$, ist dagegen sie vierkantig, so hat man $\frac{Wl}{e^2} = \frac{V}{3}$, wenn $V$ das Volumen derselben bezeichnet; für die vierkantigen Arme ist $\frac{W_1 l_1}{3 e_1^2} = \frac{V_1}{9}$, wenn $V_1$ das Volumen der Arme bezeichnet.

Hiernach folgt für eine cylindrische Welle:

$$\frac{A}{2} V + \frac{A_1}{9} V_1 = \frac{G G_1}{G + G_1} \frac{c^2}{2g},$$

Digitized by Google

und dagegen für eine **vierkantige Welle**:

$$\frac{A}{3}\,V + \frac{A_1}{9}\,V_1 = \frac{G\,G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2\,g}.$$

Die Volumina $V$ und $V_1$ stehen wieder in einem gewissen Zusammenhange mit einander, welcher dadurch ausgedrückt wird, daß das Biegungsmoment der Arme gleich dem Torsionsmomente der Welle ist.

Hiernach hat man also:

$$\frac{W\,T}{e} = \frac{W_1\,T_1}{e_1}, \text{ also:}$$

$$1)\quad \frac{\pi\,d^3}{16}\,T = \frac{b^3\,T}{3\,\sqrt{2}} = \frac{b_1\,h_1^2\,T_1}{6},$$

wenn $T$ und $T_1$ die Tragmodul für Torsion und Biegung, sowie $d$ den Durchmesser einer runden, und $b$ die Seitenlänge einer vierkantigen Welle, dagegen $h_1$ die Dicke und $b_1$ die Summe aller Breiten der Radarme bezeichnen.

Nun ist aber noch $V = \frac{\pi\,d^2}{4}\,l = b^2\,l$ und $V_1 = b_1\,h_1\,l_1$, daher hat man auch:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi\,d^2\,l\,A}{8} + \dfrac{b_1\,h_1\,l_1\,A_1}{9} = \dfrac{G\,G_1}{G_1 + G_1}\,\dfrac{c^2}{2\,g} \text{ oder, nach Befinden} \\ {}^1/_3\,b^2\,l\,A + \dfrac{b_1\,h_1\,l_1\,A_1}{9} = \dfrac{G\,G_1}{G + G_1}\cdot\dfrac{c^2}{2\,g}. \end{cases}$$

Giebt man nun noch das Dimensionsverhältniß $\nu = \frac{b_1}{h_1}$, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) die Stärke $d$ oder $h$ der Welle, sowie auch die Stärke $h_1$ und Breite $b_1$ der Arme berechnen.

Hierbei ist in Rechnung zu bringen:

1) für Gußeisen:

$$A_1 = 3{,}04 \text{ und } A = \frac{T^2}{2\,C} = \frac{1833^2}{2.2'700000} = 0{,}622 \text{ Zollpfund},$$

2) für Schmiedeeisen:

$$A_1 = 6{,}08 \text{ und } A = \frac{T^2}{2\,C} = \frac{5746^2}{2.8'60000} = 1{,}92 \text{ Zollpfund, und}$$

3) für Holz, im Mittel:

$$A_1 = 2{,}08 \text{ und } A = \frac{T^2}{2\,C} = \frac{380^2}{2.570000} = 0{,}127 \text{ Zollpfund}.$$



Digitized by Google

Beispiel. Die auf den Angriffspunkt des Daumens reducirte Masse eines Hammerrades ist $M = \frac{200000}{g}$ Pfund, und die auf denselben Angriffspunkt reducirte Masse des Hammers, $M_1 = \frac{25000}{g}$ Pfund, ferner das Stück der Wellenlänge zwischen dem Rade und dem Daumenkranze, $l = 15$ Fuß $= 225$ Zoll, und die Länge der Radarme, $l_1 = 10$ Fuß $= 120$ Zoll. Wenn nun der Hammer bei jedem Anhube von den Welldaumen mit 2 Fuß Geschwindigkeit ergriffen wird, welche Stärken sind der Welle und den Radarmen zu geben, damit diese die Stöße bei dem Ergreifen des Hammers ohne Nachtheile aushalten. Sind die Well- und Radarme aus Holz, so hat man zunächst

$$380\,\frac{\pi d^3}{16} = 1000\,\frac{b_1 h_1^2}{6}$$

zu setzen, oder wenn die Anzahl der Radarme, $n = 16$ ist, und deshalb

$$b_1 = \nu . n\, h_1 = 0{,}707 . 16\, h_1 = 11{,}3\, h_1$$

angenommen wird,

$$d = h_1 \sqrt[3]{\frac{1600 . 11{,}3}{6 . 38}} = h_1 \sqrt[3]{79{,}3} = 4{,}3\, h_1.$$

Nun ist noch

$$\frac{\pi}{8}\, A\, l = 0{,}127 . 225 \cdot \frac{\pi}{8} = 11{,}22,$$

ferner

$$1/9\, A_1\, l_1 = 1/9 . 2{,}08 . 120 = 27{,}73$$

und

$$\frac{G\, G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2\, g} = 12 . 0{,}016 . 4 \cdot \frac{200000 . 25000}{200000 + 25000} = 0{,}768 \cdot \frac{5000000}{225}$$
$$= 17067 \text{ Zollpfund},$$

daher folgt die Bestimmungsgleichung:

$$(4{,}3)^2 . 11{,}22\, h_1^2 + 11{,}3 . 27{,}73\, h_1^2 = 17067, \text{ d. i.:}$$
$$207{,}5\, h_1^2 + 313{,}3\, h_1^2 = 17067,$$

wonach die gesuchte Armdicke

$$h_1 = \sqrt{\frac{17067}{520{,}8}} = 5{,}72 \text{ Zoll},$$

die Armbreite

$$b_1 = 0{,}707 . h_1 = 4{,}04 \text{ Zoll},$$

und die Wellendicke

$$d = 4{,}3\, h_1 = 24{,}6 \text{ Zoll folgt.}$$

Der Sicherheit wegen sind diese Dimensionen noch ansehnlich größer zu machen.

Anmerkung. Der Stoßfestigkeit ist erst in neuerer Zeit mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden. Wir finden über sie nur Einiges mitgetheilt in Tredgold's Werk über die Stärke des Gußeisens u. s. w. (Strength of cast iron), in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle und in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik und Geostatik. Letzteres Werk bezieht sich vorzüglich auf die Versuche Hodgkinson's über die Festigkeit prismatischer Körper gegen den

Digitized by Google

Stoß, worüber ein besonderer Artikel in dem ersten Bande der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem „Ingenieur") von Bornemann u. s. w. handelt.

Die Versuche Hodgkinson's stimmen im Wesentlichen mit der vorstehenden Theorie über die Stoßfestigkeit überein; sie erstrecken sich vorzüglich auf die relative Festigkeit, und sind in der Art ausgeführt worden, daß pendelartig aufgehangene Gewichte horizontal gegen verticale, an den Enden unterstützte Stäbe schlugen. Es bestätigte sich hierbei die Richtigkeit der Formel $L = \frac{G^2 h}{G + \frac{1}{2} G_1}$, welche unter der Voraussetzung gefunden wird, daß der Stoß ein unelastischer ist, vollständig; es hing die Leistung $L$ gar nicht von der materiellen Beschaffenheit des stoßenden Körpers ab. Gleich schwere Körper aus verschiedenen Stoffen (Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall, Blei) brachten bei gleicher Fallhöhe an einem und demselben Stabe (aus Gußeisen oder Gußstahl) gleiche Durchbiegungen hervor; auch waren diese fast genau dieselben, welche die Theorie unter der Voraussetzung findet, daß der Stab vollständig elastisch ist.

Schlußanmerkung. Zum Studium der Mechanik starrer Körper ist außer den älteren Werken von Euler, Poisson, Poinsot, Poncelet, Navier und Coriolis, sowie von Whewell, Mosely, Eytelwein und Gerstner zu empfehlen:

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, in deutscher Uebersetzung von Wagner, Braunschweig 1853; sowie von Eggers und Schlömilch, Leipzig 1853. Sohnke, analytische Theorie der Statik und Dynamik, Halle 1854; Broch's Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1854; Morin, Leçons de Mécanique pratique, Paris 1855 etc. Delaunay, Traité de Mécanique rationelle, Paris 1856; Rankine, a Manual of applied Mechanics, second edition, London 1861. Ein werthvolles, in England viel zu wenig geschätztes Werk. Eine neue Monographie über den Stoß von Poinsot ist im 3. Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik übersetzt.

Digitized by Google

## Sechster Abschnitt.

# Statik flüssiger Körper.

---

### Erstes Capitel.

### Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

§. 351 **Flüssigkeit.** Wir betrachten die flüssigen Körper als Verbindungen materieller Punkte, deren Zusammenhang unter einander so schwach ist, daß die kleinsten Kräfte hinreichen, sie durch Verschieben von einander zu trennen (§. 62). Manche der in der Natur vorkommenden Körper, wie z. B. die Luft, das Wasser u. s. w., besitzen diese Eigenschaft der Flüssigkeit in hohem Grade, andere Körper hingegen, wie z. B. Oel, Schmiere, aufgeweichte Erde u. s. w., sind in minderem Grade flüssig. Man nennt jene vollkommen, diese aber unvollkommen flüssige Körper. Gewisse Körper, wie z. B. die Teige, stehen den festen Massen ebenso nahe als den flüssigen.

Vollkommen flüssige Körper, von welchen in der Folge nur die Rede sein wird, sind auch zugleich vollkommen elastisch, d. h. sie lassen sich durch äußere Kräfte zusammendrücken und nehmen nach Wegnahme dieser Kräfte das erste Volumen vollkommen wieder an. Nur ist die Größe der einem gewissen Drucke entsprechenden Volumenveränderung bei verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden; während sich dieselbe bei den tropfbar-flüssigen Körpern höchst unbedeutend zeigt, fällt sie bei den luftförmigen Körpern, die man deshalb auch elastische Flüssigkeiten nennt, sehr groß aus. Dieser geringe Grad von Zusammendrückbarkeit der tropfbar-flüssigen Körper ist der Grund, weswegen man bei den meisten Untersuchungen der Hydrostatik (§. 66) dieselben als incompressibele oder unelastische Flüssigkeiten ansieht und behandelt. Da das Wasser unter allen tropfbar-flüssigen Körpern am meisten verbreitet ist und im Leben am häufigsten angewendet

Digitized by Google

wird, ſo ſieht man es als den Repräſentanten aller dieſer Flüſſigkeiten an und ſpricht bei den Unterſuchungen in der Mechanik des Flüſſigen immer nur vom Waſſer, indem man ſtillſchweigend vorausſetzt, daß die mechaniſchen Verhältniſſe anderer tropfbaren Flüſſigkeiten dieſelben ſind wie die des Waſſers.

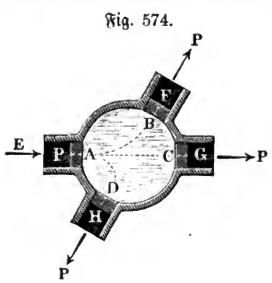
Aus denſelben Gründen iſt in der Mechanik der elaſtiſch-flüſſigen Körper meiſt nur von der gemeinen atmoſphäriſchen Luft die Rede.

Anmerkung. Eine Waſſerſäule von 1 Quadratzoll Querſchnitt wird durch ein Gewicht von 14 Pfund, welches dem Drucke der Atmoſphäre entſpricht, um ungefähr 0,00005 oder 50 Milliontel ihres Volumens zuſammengedrückt, wogegen eine Luftſäule unter dem Drucke dieſer Kraft nur die Hälfte ihres anfänglichen Volumens einnimmt. Siehe Aimé: „Ueber die Zuſammendrückung der Flüſſigkeiten", in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband (zu Band 72), 1848. Nach der Formel $P = \frac{\lambda}{l} FE$ (§. 204) folgt, wenn man $P = 14$ Pfund, $F = 1$ Quadratzoll und $\frac{\lambda}{l} = \frac{5}{100000} = \frac{1}{20000}$ ſetzt, der Elaſticitätsmodul des Waſſers

$$E = \frac{Pl}{F\lambda} = 14.20000 = 280000 \text{ Pfund.}$$

**Princip des gleichen Druckes.** Die charakteriſtiſche Eigenſchaft §. 352
der Flüſſigkeiten, wodurch ſich dieſelben weſentlich von den feſten Körpern unterſcheiden, und welche der Lehre vom Gleichgewichte flüſſiger Körper zur Baſis dient, iſt die Fähigkeit, den Druck, welcher auf einen Theil der Oberfläche der Flüſſigkeit ausgeübt wird, nach allen Richtungen hin unverändert fortzupflanzen. Bei den feſten Körpern pflanzt ſich der Druck nur in ſeiner eigenen Richtung fort (§. 86); wird dagegen das Waſſer von einer Seite her gedrückt, ſo entſteht in der ganzen Maſſe derſelben eine Spannung, die ſich nach allen Seiten hin äußert und daher an allen Stellen der Oberfläche deſſelben wahrzunehmen iſt. Um ſich von der Richtigkeit dieſes Geſetzes zu überzeugen, kann man einen mit Waſſer gefüllten Apparat anwenden, wie ihn Fig. 574 im horizontalen Durchſchnitt repräſentirt. Die gleich weiten und in gleicher Höhe über dem horizontalen Fußboden befindlichen Röhren $AE$, $BF$ u. ſ. w. ſind durch vollkommen bewegliche und genau abſchließende Kolben verſchloſſen; das Waſſer drückt deshalb auch durch ſein Gewicht auf den einen Kolben genau ſo ſtark wie auf den anderen. Sehen wir aber von dieſem Drucke ab, oder nehmen wir das Waſſer gewichtslos an. Drücken wir dagegen den einen Kolben $A$ mit einer gewiſſen Kraft $P$

Fig. 574.




Digitized by Google

gegen das Wasser, so pflanzt sich diese durch das Wasser hindurch bis zu den übrigen Kolben $B$, $C$, $D$ fort und es ist zur Herstellung des Gleichgewichtes, oder um das Zurückgehen dieser Kolben zu verhindern, nöthig, auf jeden dieser Kolben eine gleich große Gegenkraft $P$ (Fig. 575) wirken zu lassen. Wir sind daher berechtigt, anzunehmen, daß die auf einen Theil $A$ der Oberfläche der Wassermasse wirkende Kraft $P$ eine Spannung in dieser erzeugt, und sich dadurch nicht nur in der geraden Linie $AC$, sondern auch in jeder anderen Richtung $BF$, $DH$ u. s. w. auf andere gleich große Oberflächentheile $C$, $B$, $D$ fortpflanzt.

Fig. 575.

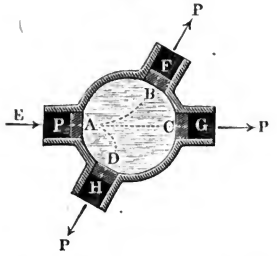
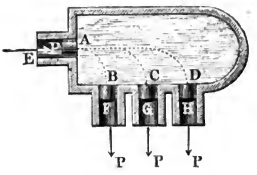



Fig. 576.




Sind die Axen der Röhren $BF$, $CG$ u. s. w., Fig. 576, unter sich parallel, so lassen sich die Kräfte, welche auf ihre Kolben wirken, durch Addition zu einer einzigen Kraft vereinigen; ist $n$ die Anzahl dieser gleich großen Kolben, so beträgt daher der Gesammtdruck auf dieselben:

$$P_1 = nP,$$

und in dem von der Figur repräsentirten Falle:

$$P_1 = 3P.$$

Nun ist aber der Inbegriff $F_1$ der gedrückten Flächen $B$, $C$, $D$ ebenfalls $= n$ mal gedrückte Fläche $F$ des einen Kolbens, es läßt sich daher $n$ nicht nur $= \frac{P_1}{P}$, sondern auch $= \frac{F_1}{F}$, also überhaupt

$$\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F} \text{ und } P_1 = \frac{F_1}{F} P \text{ setzen.}$$

Rücken wir nun noch die Röhren $B$, $C$, $D$ u. s. w. so zusammen, daß sie, wie in Fig. 577, eine einzige ausmachen, und verschließen wir sie durch einen einzigen Kolben, so geht $F_1$ in eine einzige Fläche über und es ist $P_1$ die auf sie wirkende Kraft; es folgt daher das allgemeinere Gesetz: **die Drücke, welche ein flüssiger Körper auf verschiedene Theile der Gefäßwand ausübt, sind den Inhalten dieser Theile proportional.**

Digitized by Google

Dieſes Geſetz entſpricht auch dem Principe der virtuellen Geſchwindigkeiten. Bewegt ſich der Kolben $AD = F$, Fig. 578, um den Weg $AA_1 = s$ einwärts, ſo drückt er das Waſſerprisma $Fs$ aus ſeiner Röhre, und geht der Kolben $BE = F_1$ um den Weg $BB_1 = s_1$ auswärts, ſo läßt er den prismatiſchen Raum $F_1 s_1$ zurück. Da wir aber vorausgeſetzt haben, daß ſich die Waſſermaſſe weder ausdehnen noch zuſammendrücken läßt, ſo muß das Volumen derſelben bei dieſen Kolbenbewegungen unverändert bleiben, alſo der Zuſatz $Fs$ dem Abgange $F_1 s_1$ gleich ſein. Die Gleichung $F_1 s_1 = Fs$ giebt aber:

Fig. 577.

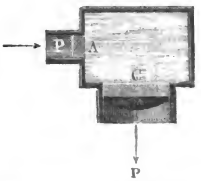
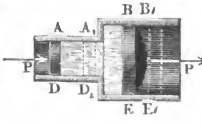



Fig. 578.




$$\frac{F_1}{F} = \frac{s}{s_1},$$

und aus der Verbindung dieſer Proportion mit der Proportion $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ folgt:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{s}{s_1};$$

es iſt daher auch Arbeit $P_1 s_1$ = Arbeit $Ps$ (ſ. §. 83).

Beiſpiel. Wenn der Kolben $AD$ einen Durchmeſſer von $1\frac{1}{2}$ Zoll dagegen der Kolben $BE$ einen ſolchen von 10 Zoll hat, und jener mit einer Kraft $P$ von 36 Pfund auf das Waſſer gedrückt wird, ſo übt dieſer Kolben eine Kraft

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P = \frac{10^2}{1{,}5^2} \cdot 36 = \frac{400}{9} \cdot 36 = 1600 \text{ Pfund}$$

aus. Wird der erſte Kolben um 6 Zoll fortgeſchoben, ſo geht der zweite nur um

$$s_1 = \frac{F}{F_1} s = \frac{9 \cdot 6}{400} = {}^{27}/_{200} = 0{,}135 \text{ Zoll}$$

fort.

Anmerkung. Vielfache Anwendungen dieſes Geſetzes kommen in der Folge vor: bei der hydrauliſchen Preſſe, der Waſſerſäulenmaſchine, bei den Pumpen u. ſ. w.

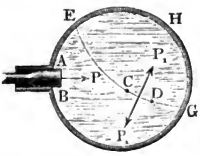
**Druck im Waſſer.** Der Druck, welchen die Waſſertheile gegen einander ausüben, iſt genau ſo zu beurtheilen wie der Druck des Waſſers gegen die Gefäßwände. Eine beliebige Fläche $ECG$, welche das Waſſer in einem Gefäße $BGH$, Fig. 579, in zwei Theile theilt, wird im Gleichgewichtszuſtande von der einen Seite her eben ſo ſtark gedrückt als von der anderen. Da nun ein ſtarrer Körper alle gegen ſeine Oberfläche rechtwinkelig gerichteten Kräfte §. 353

Fig. 579.

Digitized by Google

aufnimmt, so wird auch das Gleichgewicht des Wassers im Gefäße nicht gestört, wenn die eine Flüssigkeitshälfte $EGH$ erstarrt, und daher ihre Begrenzungsfläche $ECG$ gleichsam zu einer Gefäßwand wird. Drückt die flüssige Hälfte $EBG$ in einem Theile $CD = F_1$ der imaginären Trennungsfläche $ECG$ mit einer Kraft $P_1$ auf die erstarrte Hälfte $EGH$, so nimmt daher letztere diese Kraft vollständig auf und übt dabei eine gleiche Gegenkraft $(-P_1)$ auf $CD = F_1$ aus. Da nun aber das Gleichgewichtsverhältniß durch das Flüssigwerden von dieser Wassermasse $EGH$ nicht gestört wird, so drückt dieselbe mit einer gleichen Kraft $(-P_1)$ auf die Wassermasse $EBG$ zurück, und es ist folglich der Druck des Wassers auf beiden Seiten einer Fläche $\overline{CD} = F_1$, ebenfalls durch die Proportion

Fig. 580.



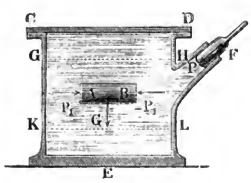

$$\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$$

bestimmt, wofern das ganze Wasser wieder in einer Fläche $\overline{AB} = F$ von einer Kraft $P$ gedrückt wird. Hiernach ist der Druck auf die Fläche $F_1$ bei jeder beliebigen Lage:

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P.$$

Das durch die letzte Proportion ausgesprochene Gesetz von der Fortpflanzung des Druckes im Wasser kommt dem letzteren nur als Flüssigkeit ohne Schwere zu, und erfordert daher noch eine Ergänzung, wenn es sich darum handelt, auch den aus dem Gewichte des Wassers hervorgehenden Druck zu ermitteln. Denkt man sich von dem Wasser in einem Gefäße $CDE$, Fig. 581, einen Theil erstarrt, welcher die Form eines unendlich dünnen horizontalen Prismas $AB$ hat, so sieht man leicht ein, daß sich die Kräfte, welche das flüssig bleibende Wasser rund herum auf die Seitenflächen des erstarrten Theiles ausübt, mit dem Gewichte $G$ dieses Theiles ins Gleichgewicht setzen, und daß sich die Horizontaldrücke, mit welchen es gegen die verticalen Grundflächen $A$ und $B$ dieses Theiles wirkt, gegenseitig aufheben. Es müssen also auch diese Drücke ($P_1$ und $-P_1$) einander gleich und entgegengesetzt sein. Da nun das Gleichgewicht sich nicht ändert, wenn $AB$ wieder in den Flüssigkeitszustand zurückkehrt, so folgt, daß die Pressungen des Wassers gegen gleiche verticale Flächenelemente $A$ und $B$ in einer und derselben Horizon-

Fig. 581.




Digitized by Google

talebene einander gleich sein müssen, und da sich ferner der Druck auf ein Flächenelement nicht ändert, wenn dasselbe eine andere Neigung oder Richtung annimmt, so folgt, daß überhaupt das Wasser in einer horizontalen Schicht, wie z. B. $GH$, $KL$ u. s. w. an allen Stellen und nach allen Richtungen hin einen und denselben Druck ausübt.

Denken wir uns hingegen in der Wassermasse $CHK$, Fig. 582, ein verticales Prisma $AB$ von unendlich kleinem Querschnitt erstarrt, so können wir aus dem Gleichtgewichtszustande desselben mit der übrigen Flüssigkeit folgern, daß sich die Drücke, mit welchen die letzteren auf die verticalen Seitenflächen dieses Prismas wirken, gegenseitig aufheben, und daß sich das Gewicht $G$ des letzteren Körpers mit dem Ueberschusse $P_1 - P$ des Druckes $P_1$ auf die untere Grundfläche $B$ über den Druck $P$ auf die obere Grundfläche $A$ im Gleichgewichte befindet. Es ist also hiernach $P_1 - P = G$, d. i. der Druck $P_1$ des Wassers auf irgend ein Flächenelement $B$ gleich dem Drucke $P$ desselben auf ein höher liegendes Flächenstück $A$ von gleicher Größe plus dem Gewichte $G$ einer Wassersäule $AB$, welche das eine oder andere Flächenelement zur Basis, und den Verticalabstand zwischen beiden Elementen zur Höhe hat. Dieser Satz gilt, dem Obigen zufolge, nicht nur für zwei senkrecht über einander befindliche Elemente, sondern auch für zwei gleiche Flächenelemente überhaupt, und findet auch seine Anwendung bei der Bestimmung des Druckes auf die Gefäßwand, da sich die Drücke $P$ und $P_1$ in den Horizontalebenen $GH$ und $KL$ unverändert fortpflanzen. Der Druck $P_1$ auf ein Flächenelement $B$, $K$ oder $L$ der Horizontalebene $KL$ ist hiernach gleich dem Drucke $P$ auf ein gleich großes Element $A$, $G$ oder $H$ in einer höheren Horizontalebene plus dem Gewichte der Wassersäule, welche dieses Element $F$ zur Basis und den Abstand $AB = h$ der beiden Horizontalschichten $GH$ und $KL$ von einander zur Höhe hat. Ist $\gamma$ die Dichtigkeit des Wassers, so beträgt dieses Gewicht:

Fig. 582.

$$G = Fh\gamma, \text{ und daher } P_1 = P + G = P + Fh\gamma.$$

Sind die Inhalte der Flächenelemente nicht gleich, hat z. B. das obere (in $GH$) den Inhalt $F$ und das untere (in $KL$) den Inhalt $F_1$, so ist der Druck auf letzteres

$$P_1 = \frac{F_1}{F}(P + Fh\gamma) = \frac{F_1}{F}P + F_1h\gamma.$$

Durch dieselbe Formel läßt sich auch der Druck $P$ auf ein Flächenelement

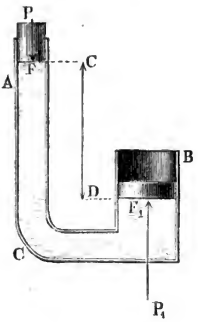
Digitized by Google

$F$ in einer Horizontalschicht $GH$ bestimmen, wenn der äußere Druck $P_0$ eines Flächenelementes $CD = F_0$ bekannt ist, welches sich um die Höhe $h$ über oder unter $GH$ befindet. Es ist

$$P = \frac{F}{F_0} P_0 \pm F h \gamma.$$

Da die Druckkräfte gegen gleiche Flächentheile in einer Horizontalebene einander gleich sind, so folgt, daß vorstehende Formel auch auf horizontale Flächen ($F$, $F_0$ und $F_1$) von endlicher Ausdehnung, z. B. auf den Fall anwendbar ist, wo das Wasser dazu dient, die Kraft $P$ einer horizontalen Kolbenfläche $F$, Fig. 583, auf eine andere horizontale Kolbenfläche $F_1$ überzutragen. Die Formel

Fig. 583.




$$P_1 = \frac{F_1}{F} P + F_1 h \gamma$$

$$= F_1 \left( \frac{P}{F} + h \gamma \right)$$

giebt den Druck $P_1$ auf diese Fläche unmittelbar an, wenn $h$ den senkrechten Abstand $CD$ zwischen beiden Kolbenflächen bedeutet.

Bezeichnet man die Drücke $\frac{P}{F}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ auf die Flächeneinheiten durch $p$ und $p_1$, so hat man noch einfacher

$$p_1 = p + h \gamma.$$

Beispiel. Wenn die beiden Kolbenflächen $F$ und $F_1$ einer hydrostatischen Presse $ACB$, Fig. 583, die Durchmesser $d = 2\frac{1}{2}$ und $d_1 = 9$ Zoll haben und um die senkrechte Höhe $CD = h = 60$ Zoll von einander abstehen, und es soll durch den großen Kolben derselben eine Kraft $P_1 = 1600$ Pfund ausgeübt werden, so ist die erforderliche Kraft des kleinen Kolbens:

$$P = \frac{F}{F_1} P_1 - F h \gamma = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 P - \frac{\pi d^2}{4} h \gamma$$

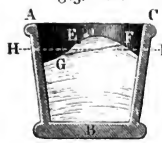
$$= \left(\frac{5}{18}\right)^2 . 1600 - \frac{\pi}{4} . {}^{25}/_{4} . \frac{60 . 61{,}75}{1728} = 123{,}46 - 10{,}53 = 112{,}93 \text{ Pfd.}$$

§. 354 **Wasserspiegel.** Die dem Wasser innewohnende Schwerkraft macht, daß sich alle Elemente desselben abwärts zu bewegen suchen und sich auch wirklich so bewegen, wenn sie nicht daran verhindert werden. Um eine zusammenhängende Wassermasse zu erhalten, ist es deshalb nöthig, das Wasser in Gefäßen einzuschließen. Das in einem Gefäße $ABC$, Fig. 584, befindliche Wasser ist aber nur dann im Gleichgewichte, wenn die noch freie Ober-

Digitized by Google

fläche $HR$ desselben rechtwinkelig auf der Richtung der Schwerkraft, also horizontal ist; denn so lange diese Oberfläche noch krumm oder gegen den Horizont geneigt ist, so lange giebt es auch noch höher liegende Wasserelemente, wie z. B. $E$, welche wegen ihrer großen Beweglichkeit und in Folge ihrer Schwere über den darunter befindlichen, wie auf einer schiefen Ebene $FG$, herabgleiten.

Fig. 584.

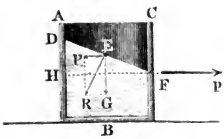



Da bei größeren Entfernungen die Schwerrichtungen nicht mehr als parallele Linien angesehen werden können, so hat man die freie Oberfläche oder den Spiegel des Wassers in einem großen Gefäße, wie z. B. in einem größeren See, nicht mehr als eine Ebene, sondern als einen Kugeloberflächentheil zu betrachten.

Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft auf die Wasserelemente, so steht im Gleichgewichtszustande die Oberfläche des Wassers winkelrecht auf der Richtung der aus der Schwere und der hinzutretenden Kraft entspringenden Mittelkraft.

Wird ein Gefäß $ABC$, Fig. 585, mit der unveränderlichen Acceleration $p$ horizontal fortbewegt, so bildet die freie Oberfläche des Wassers in demselben eine schiefe Ebene $DF$; denn da in diesem Falle jedes Element $E$ dieser Oberfläche von seinem Gewichte $G$ abwärts und von seiner Trägheit $P = \frac{p}{g} G$ horizontal getrieben wird, so entspringt in jedem eine Mittelkraft $R$, welche von der Richtung der Schwere um einen unveränderlichen Winkel $REG = \alpha$ abweicht. Dieser Winkel ist auch zugleich der Winkel $DFH$, um welchen der auf $B$ normal stehende Wasserspiegel von dem Horizonte abweicht. Er ist bestimmt durch

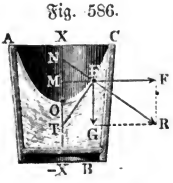
Fig. 585.




$$tang.\,\alpha = \frac{P}{G} = \frac{p}{g}.$$

Wird dagegen ein Gefäß $ABC$, Fig. 586, gleichförmig um seine verticale Axe $X\overline{X}$ gedreht, so bildet der Spiegel des mit umlaufenden Wassers in demselben eine hohle Fläche $AOC$ mit paraboliſchen Axendurchſchnitten. Iſt $\omega$ die Winkelgeſchwindigkeit des Gefäßes und des darin befindlichen Waſſers, $G$ das Gewicht eines Waſſerelementes $E$ und $y$ der Abſtand $ME$ deſſelben von der verticalen Axe, ſo hat man für die Centrifugalkraft dieſes Elementes:

Fig. 586.



$$F = \omega^2 \frac{Gy}{g} \text{ (§. 302),}$$

und daher für den Winkel $REG = TEM = \varphi$, welchen die Mittelkraft $R$ mit der Verticalen, oder die Tangente $ET$ des Wasserprofiles mit der Horizontalen $ME$ einschließt:

$$tang.\,\varphi = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2 y}{g}.$$

Hiernach ist also die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Ordinate einschließt, der Ordinate proportional. Da diese Eigenschaft der gemeinen Parabel zukommt (s. §. 157), so ist auch der verticale Durchschnitt $AOC$ des Wasserspiegels eine Parabel, deren Axe mit der Drehungsaxe $X\overline{X}$ zusammenfällt.

Wäre die Umdrehungsgeschwindigkeit des Wassers im Gefäße $ABD$, Fig. 588, constant und $= c$, so würde $F = \frac{c^2 G}{g y}$, daher $tang.\,\varphi = \frac{c^2}{gy}$

Fig. 587.

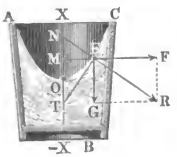



Fig. 588.

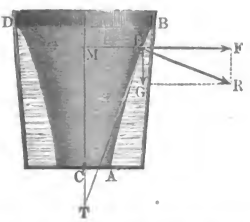
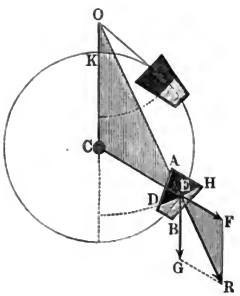



Fig. 589.




und die Subtangente der Durchschnittscurve $AEB$ der Oberfläche des Wassers, $MT = m = \frac{c^2}{g}$, also constant ausfallen. Nach Artikel 20 der analytischen Hülfslehren ist die Gleichung einer solchen Curve:

$$y = re^{\frac{x}{m}} = re^{gxc^{-2}},$$

wobei $r$ die Ordinate $CA$ des Anfangspunktes $A$ bezeichnet.

Digitized by Google

Bewegt man ein Gefäß $ABH$, Fig. 589, in einem Verticalkreise um eine Horizontalaxe $C$ gleichförmig herum, so bildet die Oberfläche des Wassers in demselben eine cylindrische Fläche mit kreisförmigem Querschnitte $DEH$. Verlängern wir die Richtung der aus dem Gewichte $G$ und der Centrifugalkraft $F$ eines Elementes $E$ entstehenden Mittelkraft $R$ bis zum Durchschnitte $O$ mit der Verticalen $CK$ durch den Drehpunkt, so erhalten wir die ähnlichen Dreiecke $ECO$ und $EFR$, für welche gilt:

$$\frac{CO}{EC} = \frac{FR}{EF} = \frac{G}{F};$$

nun ist aber, wenn man den Drehungshalbmesser $EC = y$ setzt, und die letzte Bezeichnung beibehält, $F = \frac{\omega^2 G y}{g}$, es folgt daher die Linie:

$$CO = \frac{g}{\omega^2} = g\left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß} = \frac{894{,}6}{u^2} \text{ Meter},$$

wobei $u$ die Zahl der Umdrehungen pr. Minute bezeichnet. Da dieser Werth von $CO$ für alle Wasserelemente einer und derselbe ist, so folgt, daß die Mittelkräfte aller den Durchschnitt $DEH$ bildenden Wasserelemente nach $O$ gerichtet sind, und daß daher der auf den Richtungen dieser Kräfte rechtwinkelig stehende Durchschnitt ein aus $O$ beschriebener Kreis ist. Diesem zufolge bilden die Wasserspiegel in den Zellen eines oberschlägigen Wasserrades lauter einer und derselben Horizontalaxe entsprechende cylindrische Flächen.

**Bodendruck.** Der Druck des Wassers in einem Gefäße $ABCD$, §. 355 Fig. 590, ist unmittelbar unter dem Wasserspiegel am kleinsten, wird mit der Tiefe immer größer und größer und ist unmittelbar über dem Boden am größten. Dies ist zwar schon aus §. 353 zu folgern, läßt sich aber auch auf folgendem Wege beweisen. Nehmen wir an, daß der Wasserspiegel $H_0 R_0$, dessen Inhalt $F_0$ sein möge, von einer Kraft $P_0$, z. B. durch die darüber stehende Atmosphäre oder durch einen Kolben gleichförmig gedrückt werde, und denken uns die ganze Wassermasse durch viele Horizontalebenen wie $H_1 R_1$, $H_2 R_2$ u. s. w. in lauter gleich dicke Wasserschichten zerlegt. Ist $F_1$ der Inhalt des ersten Querschnittes $H_1 R_1$, $\lambda$ die Dicke einer Wasserschicht und $\gamma$ die Dichtigkeit des Wassers, so hat man das Gewicht der ersten Wasserschicht, $G_1 = F_1 \lambda \gamma$, und denjenigen Theil des

Fig. 590.

Digitized by Google

Druckes in $H_1 R_1$, welcher aus dem Drucke $P_0$ des Wasserspiegels $H_0 R_0$ entspringt, nach dem Principe in §. 352:

$$= \frac{P_0 F_1}{F_0}.$$

Addirt man nun beide Kräfte, so erhält man den Druck im Horizontalschnitte $H_1 R_1$:

$$P_1 = \frac{P_0 F_1}{F_0} + F_1 \lambda \gamma.$$

Dividirt man durch $F_1$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_0}{F_0} + \lambda \gamma,$$

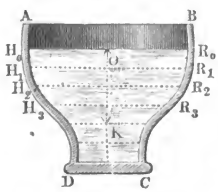
oder, da $\frac{P_0}{F_0}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke $p_0$ und $p_1$ in $H_0 R_0$ und $H_1 R_1$ bezeichnen:

$$p_1 = p_0 + \lambda \gamma.$$

Der Druck in dem folgenden Horizontalschnitte $H_2 R_2$ bestimmt sich genau so wie der Druck in der Schicht $H_1 R_1$, wenn man berücksichtigt, daß hier der anfängliche Druck auf die Einheit schon $p_1 = p_0 + \lambda \gamma$ ist, während er dort nur $p_0$ war. Es folgt der Druck in der Horizontalschicht $H_2 R_2$:

$$p_2 = p_1 + \lambda \gamma = p_0 + \lambda \gamma + \lambda \gamma = p_0 + 2 \lambda \gamma;$$

Fig. 591.




ebenso der Druck in der dritten Schicht $H_3 R_3$:

$$= p + 3 \lambda \gamma,$$

in der vierten:

$$= p_0 + 4 \lambda \gamma$$

und in der $n$ten:

$$= p_0 + n \lambda \gamma.$$

Nun ist aber $n \lambda$ die Tiefe $\overline{OK} = h$ dieser $n$ten Schicht unter dem Wasserspiegel, es läßt sich daher der Druck auf jede Flächeneinheit in der $n$ten Horizontalschicht setzen:

$$p = p_0 + h \gamma \text{ (vergl. §. 353).}$$

Man nennt die Tiefe $h$ eines Flächenelementes unter dem Wasserspiegel die Druckhöhe (franz. charge d'eau; engl. height of water) desselben und findet hernach den Druck des Wassers auf irgend eine Flächeneinheit, wenn man den von außen wirkenden Druck um das Gewicht einer Wassersäule vermehrt, deren Basis diese Einheit und deren Höhe die Druckhöhe ist.

Bei einer horizontalen Fläche, wie z. B. am Boden $CD$ (Fig. 591), ist die Druckhöhe $h$ an allen Stellen eine und dieselbe, ist daher der Inhalt derselben $= F$, so folgt der Druck des Wassers gegen dieselbe:

$$P = (p_0 + h \gamma) F = F p_0 + F h \gamma = P_0 + F h \gamma,$$

oder, wenn man vom äußeren Drucke abstrahirt: $P = F h \gamma$.

Digitized by Google

Der Druck des Waſſers gegen eine horizontale Fläche iſt alſo gleich dem Gewichte der über ihr ſtehenden Waſſerſäule $Fh$.

Dieſer Druck des Waſſers gegen eine horizontale Fläche, z. B. gegen den horizontalen Boden oder gegen einen horizontalen Theil der Seitenwand iſt von der Form des Gefäßes unabhängig; ob alſo das Gefäß $AC$, Fig. 592, prismatiſch wie $a$, oder oben weiter als unten, wie $b$, oder unten weiter als oben, wie $c$, oder ſchief wie $d$, oder ob es bauchig wie $e$ iſt u. ſ. w., immer bleibt der Druck gegen den Boden gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, deren Baſis der Boden und deren Höhe die Tiefe des Bodens unter dem Waſſerſpiegel iſt. Da ſich der Druck des Waſſers nach allen Seiten fortpflanzt, ſo findet dieſes Geſetz auch dann noch ſeine Anwendung, wenn die Fläche, wie z. B. $BC$ in Fig. 593, von unten nach oben gedrückt wird. Jede Flächeneinheit in der an $BC$ anliegenden Waſſerſchicht $BK$ wird durch eine Waſſerſäule von der Höhe $HB = RK = h$ gedrückt, es iſt folglich auch der Druck gegen die Fläche $CB$, $= Fh\gamma$, wenn $F$ den Inhalt dieſer Fläche bezeichnet.

Fig. 592.

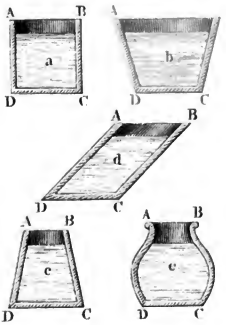



Fig. 593.

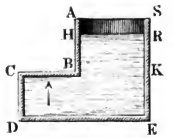
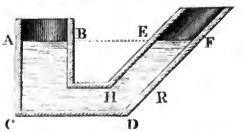



Fig. 594.



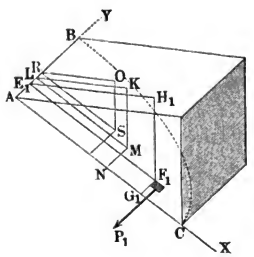

Es folgt auch hieraus noch, daß das Waſſer in communicirenden Röhren $ABC$ und $DEF$, Fig. 594, im Zuſtande des Gleichgewichtes gleich hoch ſteht, oder daß die Spiegel $AB$ und $EF$ deſſelben in eine und dieſelbe Horizontalebene fallen. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes iſt es nöthig, daß die Waſſerſchicht $HR$ durch die über ihr ſtehende Waſſerſäule $ER$ ebenſo ſtark nach unten gedrückt wird, als durch die unter ihr befindliche Waſſermaſſe von unten nach oben. Da aber in beiden Fällen die gedrückte Fläche eine und dieſelbe iſt, ſo muß daher auch die Druckhöhe in beiden Fällen eine und dieſelbe ſein, es muß alſo der Waſſerſpiegel $AB$ ebenſo hoch über $HR$ ſtehen als der Waſſerſpiegel $EF$.



Digitized by Google

§. 356 **Seitendruck.** Das soeben gefundene Gesetz von dem Wasserdrucke gegen eine Horizontalfläche läßt sich nicht unmittelbar auf eine gegen den Horizont geneigte ebene Fläche anwenden, da bei dieser die Druckhöhen an verschiedenen Stellen verschieden sind. Der Druck $p = h\gamma$ auf jede Flächeneinheit innerhalb der horizontalen Wasserschicht, welche um die Tiefe $h$ unter dem Wasserspiegel steht, wirkt nach allen Richtungen (§. 352) und folglich auch rechtwinkelig gegen die festen Seitenwände des Gefäßes, die (nach §. 138) denselben vollkommen aufnehmen. Ist nun $F_1$ der Inhalt eines Elementes von einer Seitenfläche $ABC$, Fig. 595, und $h_1$ dessen Druckhöhe $F_1 H_1$, so hat man den Normaldruck des Wassers gegen dasselbe:

Fig. 595.




$$P_1 = F_1 . h_1 \gamma;$$

ist ebenso $F_2$ ein zweites Flächenelement, und $h_2$ dessen Druckhöhe, so hat man den Normaldruck auf dasselbe:

$$P_2 = F_2 h_2 \gamma;$$

ebenso für ein drittes Element:

$$P_3 = F_3 h_3 \gamma \text{ u. s. w.}$$

Diese Normaldrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft $P$ die Summe dieser Drücke, also

$$P = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)\gamma$$

ist. Nun ist aber noch

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$$

die Summe der statischen Momente von $F_1$, $F_2$ u. s. w. hinsichtlich der Oberfläche $AOB$ des Wassers, und $= Fh$, wenn $F$ der Inhalt der ganzen Fläche und $h$ die Tiefe $SO$ ihres Schwerpunktes $S$ unter dem Wasserspiegel bezeichnet; es folgt daher der gesammte Normaldruck gegen die ebene Fläche:

$$P = Fh\gamma.$$

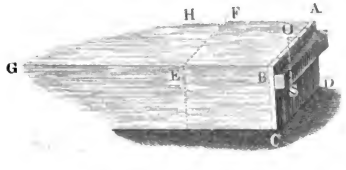
Versteht man hier unter Druckhöhe einer Fläche die Tiefe $SO$ ihres Schwerpunktes $S$ unter dem Wasserspiegel, so gilt also allgemein die Regel: der Druck des Wassers gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Fläche und deren Höhe die Druckhöhe der Fläche ist.

Uebrigens ist noch hervorzuheben, daß dieser Wasserdruck nicht von der Wassermenge, welche über oder vor der gedrückten Fläche steht, abhängt, daß also z. B. unter übrigens gleichen Umständen eine Spundwand $ABCD$, Fig 596, denselben Druck auszuhalten hat, sie mag das Wasser einer schmalen Schleuse $ACEF$, oder das eines größeren Teiches $ACGH$, oder das eines großen Sees abdämmen. Aus der Breite $AB = CD = b$ und

Digitized by Google

Höhe $AD = BC = a$ einer rectangulären Spundwand folgt die Fläche derſelben: $F = ab$

Fig. 596.




und die Druckhöhe: $SO = \frac{a}{2}$, daher der Waſſerdruck:

$$P = ab \cdot \frac{a}{2}\gamma = {}^1/_2 a^2 b \gamma.$$

Es wächſt alſo dieſer Druck wie die Breite und wie das Quadrat der Höhe der gedrückten Fläche.

Beiſpiel. Wenn vor einem 4 Fuß breiten, 5 Fuß hohen und $2^1/_2$ Zoll dicken Schutzbrete aus Eichenholz das Waſſer $3^1/_2$ Fuß hoch ſteht, wie groß iſt die Kraft zum Aufziehen deſſelben?

Das Volumen des Bretes iſt:

$$4 \,.\, 5 \,.\, {}^5/_{24} = {}^{25}/_6 \text{ Cubikfuß.}$$

Nimmt man nun die Dichtigkeit des mit Waſſer geſchwängerten Eichenholzes nach §. 61, zu 61,75 . 1,11 = 73,26 Pfund an, ſo folgt das Gewicht dieſes Bretes:

$$G = {}^{25}/_6 \,.\, 73{,}26 = 25 \,.\, 12{,}21 = 305{,}25 \text{ Pfund.}$$

Der Druck des Waſſers gegen das Schutzbret und auch der Druck deſſelben gegen ſeine Führung iſt:

$$P = {}^1/_2 \,.\, ({}^7/_2)^2 \,.\, 4 \,.\, 61{,}75 = 49 \,.\, 30{,}875 = 1513 \text{ Pfund;}$$

ſetzt man nun den Coefficienten der Reibung für naſſes Holz nach §. 174, $\varphi = 0{,}68$, ſo folgt die Reibung dieſes Bretes in ſeiner Leitung:

$$F = \varphi P = 0{,}68 \,.\, 1513 = 1028{,}8 \text{ Pfund.}$$

Addirt man hierzu das Gewicht des Bretes, ſo erhält man die Kraft zum Aufziehen deſſelben:

$$= 1028{,}8 + 305{,}25 = 1334{,}05 \text{ Pfund.}$$

**Mittelpunkt des Waſſerdruckes.** Die Mittelkraft $P = Fh\gamma$ aus §. 357
ſämmtlichen Elementarpreſſungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. ſ. w. hat, wie jede andere Mittelkraft eines Syſtemes von Parallelkräften, einen beſtimmten Angriffspunkt, den man den Mittelpunkt des Druckes nennt. Durch Unterſtützung dieſes Punktes wird dem ganzen Waſſerdrucke einer Fläche das Gleichgewicht gehalten. Die ſtatiſchen Momente der Elementarpreſſungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. ſ. w. hinſichtlich der Ebene des Waſſerſpiegels $AB\,O$, Fig. 595, ſind:

$$F_1 h_1 \gamma \,.\, h_1 = F_1 h_1^2 \gamma, \; F_2 h_2 \gamma \,.\, h_2 = F_2 h_2^2 \gamma \text{ u. ſ. w.;}$$

es iſt alſo das ſtatiſche Moment des ganzen Waſſerdruckes in Hinſicht auf dieſe Ebene:

$$(F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots)\,\gamma.$$

Bezeichnet man nun den Abſtand $KM$ des Mittelpunktes $M$ dieſes Druckes vom Waſſerſpiegel durch $z$, ſo hat man das Moment des Waſſerdruckes auch:



Digitized by Google

$$P z = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) z \gamma,$$

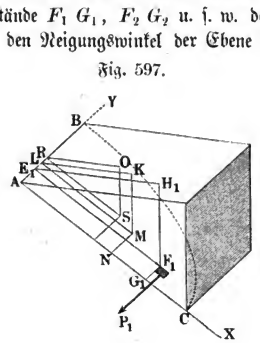
und es folgt nun durch Gleichsetzen beider Momente die in Frage stehende Tiefe des **Mittelpunktes** $M$ unter dem Wasserspiegel:

1) $$z = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F h},$$

wenn, wie oben, $F$ den Inhalt der ganzen Fläche und $h$ die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ausdrücken.

Um diesen Druckpunkt vollständig zu bestimmen, hat man noch dessen Abstand von einer anderen Ebene oder Linie anzugeben. Setzt man die Abstände $F_1 G_1$, $F_2 G_2$ u. s. w. der Flächenelemente $F_1$, $F_2$ u. s. w. von der den Neigungswinkel der Ebene bestimmenden Falllinie $A C$, $= y_1$, $y_2$ u. s. w., so hat man die Momente der Elementardrücke in Hinsicht auf diese Falllinie:

Fig. 597.




$= F_1 h_1 y_1 \gamma$, $F_2 h_2 y_2 \gamma$ u. s. w., also das Moment der ganzen Fläche $= (F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots) \gamma$; und bezeichnet man den Abstand $MN$ des Mittelpunktes $M$ von eben dieser Linie durch $v$, so hat man dieses Moment auch $= (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) v \gamma$; setzt man endlich beide Momente einander gleich, so erhält man die zweite Ordinate:

2) $$v = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F h}.$$

Ist $\alpha$ der Neigungswinkel der Ebene $ABC$ gegen den Horizont, sind ferner $x_1$, $x_2$ u. s. w. die Entfernungen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w. der Elemente $F_1$, $F_2$ u. s. w., und ist $u$ der Abstand $LM$ des Druckmittelpunktes $M$ von der Durchschnittslinie $AB$ der Ebene mit dem Wasserspiegel, so hat man $h_1 = x_1 \sin. \alpha$, $h_2 = x_2 \sin. \alpha$ u. s. w., sowie $z = u \sin. \alpha$; und führt man diese Werthe in den Ausdrücken für $z$ und $v$ ein, so ergiebt sich:

$$u = \frac{F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$

$$v = \frac{F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

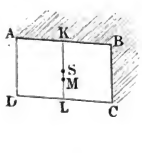
Man findet also die Abstände $u$ und $v$ des Druckmittelpunktes von der horizontalen Axe $AY$ und von der durch die Falllinie gebildeten Axe $AX$, wenn man das statische Moment der Fläche in Hinsicht auf die erste Axe

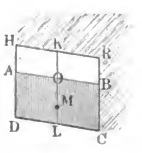
Digitized by Google

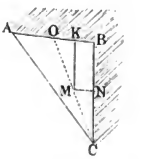
einmal in das Trägheitsmoment derselben in Hinsicht auf dieselbe Axe und ein zweites Mal in das Centrifugalkraftmoment derselben in Hinsicht auf beide Axen dividirt. Auch ist der erste Abstand zugleich die Entfernung des Schwingungspunktes von der Durchschnittslinie mit dem Wasserspiegel (§. 327). Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß der Mittelpunkt des Wasserdruckes mit dem in §. 313 bestimmten Mittelpunkte des Stoßes vollkommen zusammenfällt, wenn die Durchschnittslinie $AY$ der Fläche mit dem Wasserspiegel als Drehaxe angesehen wird.

**Wasserdruck gegen Rechtecke und Dreiecke.** Ist die gedrückte Fläche ein Rechteck $ACD$, Fig. 598, mit horizontaler Grundlinie $CD$, so befindet sich der Mittelpunkt $M$ des Druckes in der die Grundlinien halbirenden Fallinie $KL$ und steht um $^2/_3$ dieser Linie von der Seite $AB$ im Wasserspiegel ab. Reicht dieses Rechteck nicht bis zum Wasserspiegel, wie in Fig. 599, ist vielmehr der Abstand $KL$ der unteren Basis $CD$ vom §. 358

Fig. 598. Fig. 599. Fig. 600.




Wasserspiegel, $= l_1$ und der Abstand $KO$ der oberen Basis $AB$, $= l_2$, so hat man den Abstand $KM$ des Druckmittelpunktes vom Wasserspiegel $HR$:

$$u = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}.$$

Für ein rechtwinkeliges Dreieck $ABC$, Fig. 600, dessen eine Kathete $AB$ im Wasserspiegel liegt, ist der Abstand $KM$ des Druckmittelpunktes $M$ von $AB$ (Beispiel §. 313):

$$u = \frac{{}^1/_6 F.l^2}{{}^1/_3 F.l} = {}^1/_2 l,$$

wenn $l$ die Höhe $BC$ des Dreieckes bezeichnet.

Der Abstand dieses Punktes $M$ von der anderen Kathete $BC$ ist, da dieser Punkt jedenfalls in der das Dreieck halbirenden Linie $CO$ liegt, welche von der Spitze $O$ nach dem Mittelpunkte der Grundlinie geht, $NM = v = {}^1/_4 b$, wo $b$ die Grundlinie $AB$ bezeichnet.

Liegt die Spitze $C$ im Wasserspiegel, wie Fig. 601 (a. f. S.) angiebt, befindet sich also die Kathete $AB$ unter der Spitze, so hat man:

$$KM = u = \frac{{}^1/_2 Fl^2}{{}^2/_3 Fl} = {}^3/_4 l \text{ und}$$

Digitized by Google

$$NM = v = {}^3/_4 \cdot \frac{b}{2} = {}^3/_8\, b.$$

Befindet sich das ganze Dreieck $ABC$, Fig. 602, unter Wasser, steht die Grundlinie $AB$ um $AH = l_2$ und die Spitze $C$ um $CH = l_1$ vom Wasserspiegel $HR$ ab, so hat man den Abstand $MK$ des Druckmittelpunktes $M$ vom Wasserspiegel $HR$:

Fig. 601.

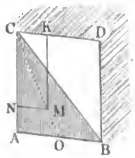
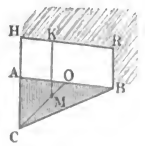



Fig. 602.



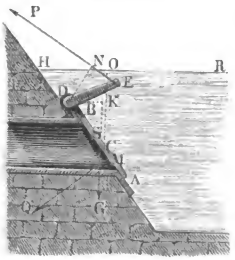

$$u = \frac{{}^1/_{18}\, F\,(l_1 - l_2)^2 + F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)^2}{F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)}$$

$$= \frac{{}^1/_{18}\,(l_1 - l_2)^2 + {}^1/_9\,(2\,l_2 + l_1)^2}{{}^1/_3\,(2\,l_2 + l_1)} = \frac{l_1^2 + 2\,l_1\,l_2 + 3\,l_2^2}{2\,(l_1 + 2\,l_2)}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Druckmittelpunkte von anderen ebenen Figuren bestimmen.

**Beispiel.** Welche Kraft $P$ ist aufzuwenden, um die um eine horizontale Are $D$ drehbare kreisrunde Klappe $AB$, Fig. 603, aufzuziehen? Es sei die Länge $DA$ dieser Klappe, $= 1{}^1/_2$ Fuß, ihr Durchmesser $AB = 1{}^1/_4$ Fuß, der Abstand ihres Schwerpunktes $S$ von der Are $D$, $DS = 0{,}75$ Fuß, und das Gewicht derselben, $G = 35$ Pfd.; ferner sei der Abstand $DH$ der Drehare $D$ von dem Wasserspiegel $HR$, in der Ebene der Klappe gemessen, $= 1$ Fuß und der Neigungswinkel dieser Ebene gegen den Horizont, $\alpha = 68^0$.

Fig. 603.




Die gedrückte Fläche ist:

$$F = \pi\, r^2 = \frac{\pi\, d^2}{4} = 0{,}7854 \cdot \frac{25}{16}$$

$$= 1{,}2272 \text{ Quadratfuß},$$

und die Druckhöhe oder die Tiefe ihres Mittelpunktes $C$ unter dem Wasserspiegel:

$$OC = h = HC\, sin.\, \alpha = (HD + DC)\, sin.\, \alpha = (HD + DB + BC)\, sin.\, \alpha$$
$$= (1 + 0{,}25 + 0{,}625)\, sin.\, 68^0 = 1{,}875 \,.\, 0{,}9272 = 1{,}7385 \text{ Fuß},$$

und daher der Druck des Wassers auf die Fläche $AB = F$:

$$Q = F\,h\,\gamma = 1{,}2272 \,.\, 1{,}7385 \,.\, 61{,}75 = 131{,}73 \text{ Pfund}.$$

Der Hebelarm $b$ dieser Kraft in Hinsicht auf die Drehare $D$ ist der Abstand $DM$ des Druckmittelpunktes $M$ von derselben, also:

$$b = HM - HD.$$

Digitized by Google

Nun iſt aber

$$HM = HC + \frac{r^2}{4HC} = 1{,}875 + \frac{1}{4 \,.\, 1{,}875} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1{,}9271 \text{ Fuß},$$

daher folgt:

$$b = 1{,}9271 - 1{,}0000 = 0{,}9271 \text{ Fuß},$$

und das geſuchte ſtatiſche Moment des Waſſerdruckes:

$$Q\,b = 131{,}73 \,.\, 0{,}9271 = 122{,}13 \text{ Fußpfund}.$$

Der Hebelarm des Gewichtes der Drehklappe iſt

$$DK = \overline{DS}\cos.\alpha = 0{,}75 \,.\, \cos.68^\circ = 0{,}75 \,.\, 0{,}3746 = 0{,}2810 \text{ Fuß},$$

und daher das ſtatiſche Moment dieſes Gewichtes

$$= 35 \,.\, 0{,}2810 = 9{,}84 \text{ Fußpfund}.$$

Durch Addition beider Momente erhält man das ganze Moment zum Aufziehen der Klappe

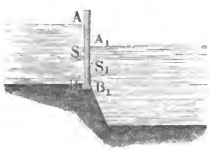
$$Pa = 122{,}13 + 9{,}84 = 131{,}97 \text{ Fußpfund},$$

und wirkt nun die Kraft zum Aufziehen an dem Hebelarme $DN = a = 0{,}75$ Fuß, ſo folgt die Größe derſelben:

$$P = \frac{131{,}97}{0{,}75} = 175{,}96 \text{ Pfund}.$$

**Druck auf beiden Seiten einer Fläche.** Wird eine ebene Fläche §. 359
$AB$, Fig. 604, zu beiden Seiten vom Waſſer gedrückt, ſo reſultirt aus den beiden Seiten entſprechenden Mittelkräften eine neue Mittelkraft, die ſich durch Subtraction derſelben von einander ergiebt, weil beide einander entgegen wirken.

Fig. 604.




Iſt $F$ der Inhalt des gedrückten Theiles auf der einen Seite der Fläche $AB$, und $h$ die Tiefe $AS$ ſeines Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel, ferner $F_1$ der Inhalt des Theiles $A_1B_1$ auf der anderen Seite der Fläche, und $h_1$ die Tiefe $A_1S_1$ ſeines Schwerpunktes unter dem entſprechenden Waſſerſpiegel, ſo fällt die geſuchte Mittelkraft:

$$P = Fh\gamma - F_1 h_1 \gamma = (Fh - F_1 h_1)\,\gamma \text{ aus}.$$

Iſt das Trägheitsmoment des erſten Flächentheiles in Hinſicht auf die Linie, in welcher die Ebene der Fläche den erſten Waſſerſpiegel ſchneidet, $= Fk^2$, ſo hat man das ſtatiſche Moment des Waſſerdruckes von der einen Seite

$$= Fk^2 \,.\, \gamma;$$

und iſt das Trägheitsmoment des zweiten Flächentheiles in Hinſicht auf die Durchſchnittslinie mit dem zweiten Waſſerſpiegel, $= F_1 k_1^2$, ſo hat man

Digitized by Google

ebenso das statische Moment des Wasserdruckes von der anderen Seite in Hinsicht auf die Axe im zweiten Wasserspiegel

$$= F_1 k_1^2 \gamma.$$

Setzen wir nun den Abstand $A A_1$ der Wasserspiegel von einander, $= a$, so erhalten wir die Vergrößerung des letzten Momentes beim Uebergange von der Axe $A_1$ auf die Axe $A$,

$$= F_1 h_1 a \gamma,$$

und daher das statische Moment des Wasserdruckes $F_1 h_1 \gamma$ in Hinsicht auf die Axe $A$ im ersten Wasserspiegel

$$= F_1 k_1^2 \gamma + F_1 h_1 . a . \gamma = (F_1 k_1^2 + F_1 a h_1) \gamma.$$

Hiernach folgt dann das statische Moment der Differenz beider Mitteldrücke

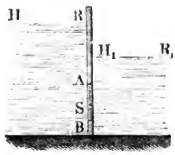
$$= (F k^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1) \gamma,$$

und der Hebelarm dieser Kraftdifferenz, oder der Abstand des Druckmittelpunktes von der Axe im ersten Wasserspiegel:

$$u = \frac{F k^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1}{F h - F_1 h_1}.$$

Sind die gedrückten Flächentheile einander gleich, welcher Fall eintritt, wenn, wie Fig. 605 repräsentirt, die ganze Fläche $A B = F$ unter Wasser ist, so hat man einfacher:

Fig. 605.




$$P = F (h - h_1) \gamma,$$

und da $k^2 = k_1^2 + 2 a h_1 + a^2$ (s. §. 224) und $h - h_1 = a$ ist,

$$u = \frac{k^2 - k_1^2 - a h_1}{h - h_1} = \frac{a h_1 + a^2}{a}$$

$$= h_1 + a = h.$$

In dem letzten Falle ist also der Druck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe der Höhenabstand $R H_1$ zwischen beiden Wasserspiegeln ist, und es fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte $S$ der Fläche zusammen. Dieses Gesetz ist auch noch dann richtig, wenn beide Wasserspiegel außerdem noch durch gleiche Kräfte, z. B. durch Kolben, oder durch die Atmosphäre gedrückt werden. Denn ist dieser Druck auf jede Flächeneinheit $= p$, und also die entsprechende Wassersäulenhöhe $l = \frac{p}{\gamma}$ (§. 355), so hat man statt $h$, $h + l$ und statt $h_1$, $h_1 + l$ zu setzen, und es läßt die Subtraction die Kraft

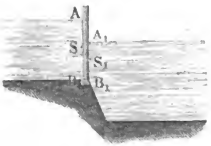
$$P = (h + l - [h_1 + l]) F \gamma = (h - h_1) F \gamma$$

übrig. Aus diesem Grunde läßt man denn auch in der Regel bei hydrostatischen Untersuchungen den Atmosphärendruck außer Acht.

Digitized by Google

Beiſpiel. Die Höhe $AB$ des Oberwaſſers bei einer Schifffahrtsſchleuſe, Fig. 606, beträgt 7 Fuß, das Waſſer in der Kammer ſteht am Schleuſenthore 4 Fuß hoch, und die Breite des Canals und der Kammer mißt 7,5 Fuß, welchen Mitteldruck hat das Schleuſenthor auszuhalten?

Fig. 606.




Es iſt

$$F = 7 . 7{,}5 = 52{,}5 \text{ und}$$

$$F_1 = 4 . 7{,}5 = 30 \text{ Quadratfuß, ferner:}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2} \text{ und } h_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ Fuß},$$

$$a = 7 - 4 = 3 \text{ Fuß},$$

$$k^2 = \frac{1}{3} \cdot 7^2 = \frac{49}{3} \text{ und } k_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 4^2 = \frac{16}{3},$$

daher folgt der geſuchte Mitteldruck:

$$P = (Fh - F_1 h_1)\gamma = \left(52{,}5 \cdot \frac{7}{2} - 30 \cdot 2\right) \cdot 61{,}75 = 123{,}75 . 61{,}75$$

$$= 7641{,}7 \text{ Pfd.},$$

und die Tiefe ſeines Angriffspunktes unter dem Oberwaſſerſpiegel:

$$u = \frac{52{,}5 \cdot \frac{49}{3} - 30 \cdot \frac{16}{3} - 3 . 60}{52{,}5 \cdot \frac{7}{2} - 60} = \frac{517{,}5}{123{,}75} = 4{,}182 \text{ Fuß}.$$

**Druck nach einer bestimmten Richtung.** In vielen Fällen iſt §. 360
es wichtig, nur einen, nach einer beſtimmten Richtung wirkenden Theil des Waſſerdruckes auf eine Fläche zu kennen. Um einen ſolchen Componenten zu finden, zerlegen wir den normalen Waſſerdruck $\overline{MP} = P$ der Fläche $\overline{AB} = F$, Fig. 607, nach der gegebenen Richtung $MX$ und nach der Richtung $MY$ winkelrecht gegen dieſelbe in zwei Seitenkräfte:

Fig. 607.

$MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$.

Iſt nun $\alpha$ der Winkel $PMX$, um welchen die Normalkraft von der gegebenen Richtung $MX$ der Seitenkraft abweicht, ſo erhält man für die Componenten:

$P_1 = P \cos. \alpha$ und $P_2 = P \sin. \alpha$.

Entwirft man von der Fläche $AB$ in einer winkelrecht auf der gegebenen Richtung $MX$ ſtehenden Ebene die Projection $BC$, ſo hat man für deren Inhalt $F_1$ die Formel:

$$F_1 = F . \cos. ABC,$$

oder, da der Neigungswinkel $ABC$ der Fläche zu ihrer Projection gleich iſt dem Winkel $PMX = \alpha$ zwiſchen der Normalkraft $P$ und ihrem Componenten $P_1$, ſo hat man:

$$F_1 = F \cos. \alpha, \text{ oder umgekehrt:}$$

Digitized by Google

$$cos.\ \alpha = \frac{F_1}{F},$$

und daher die gesuchte Seitenkraft:

$$P_1 = P \cdot \frac{F_1}{F}.$$

Da noch der Normaldruck die Größe $P = Fh\gamma$ hat, so folgt endlich:

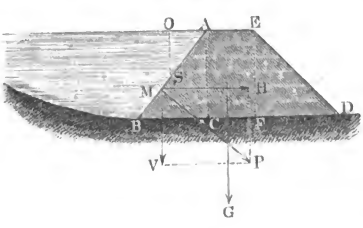
$$P_1 = F_1 h \gamma,$$

d. h. der Druck, womit das Wasser auf eine Fläche nach irgend einer Richtung drückt, ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Projection der Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung und zur Höhe die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Wasserspiegel hat.

In den meisten Fällen der Anwendung ist es wichtig, nur den verticalen oder einen horizontalen Componenten vom Drucke des Wassers gegen eine Fläche zu kennen. Da die Projection winkelrecht zur Verticalrichtung, die Horizontal- und die Projection winkelrecht zu einer Horizontalrichtung eine Verticalprojection ist, so findet man den Verticaldruck des Wassers gegen eine Fläche, wenn man die Horizontalprojection oder den Grundriß derselben als gedrückte Fläche, und dagegen den Horizontaldruck des Wassers nach irgend einer Richtung, wenn man die Verticalprojection oder den Aufriß der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung als gedrückte Fläche behandelt, in beiden Fällen aber die Tiefe $OS$ des Schwerpunktes $S$ der Fläche unter dem Wasserspiegel als Druckhöhe ansieht.

Bei einem prismatischen Teichdamm $ABDE$, Fig. 608, hat man hiernach für die Horizontalgewalt des Wassers das verticale Längenprofil $AC$ und für die Verticalkraft die Horizontalprojection $BC$ der Wasserfläche $AB$ als gedrückte Fläche anzusehen. Setzt man daher die Länge des Dammes, $= l$, die Höhe $AC = h$ und die vordere Böschung $BC = a$, so folgt die Horizontalkraft des Wassers

Fig. 608.




$$H = lh \cdot \frac{h}{2}\gamma = {}^1/_2 h^2 l \gamma,$$

und der Verticaldruck desselben:

$$V = a\,l \cdot \frac{h}{2}\,\gamma = {}^1/_2\,a\,l\,h\,\gamma.$$

Iſt nun noch die obere oder Dammkappenbreite $AE = b$, die hintere Böſchung $DF = a_1$, und die Dichtigkeit der Dammmaſſe, $= \gamma_1$, ſo hat man das Gewicht des Dammes:

$$G = \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) h\,l\,\gamma_1,$$

und den ganzen Verticaldruck des Dammes gegen den horizontalen Boden:

$$V + G = {}^1/_2\,a\,l\,h\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) h\,l\,\gamma_1 = \left[{}^1/_2\,a\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] h\,l.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten $= \varphi$, ſo folgt nun die Reibung oder Kraft zum Fortſchieben des Dammes:

$$F = \varphi\,(V + G) = \left[{}^1/_2\,a\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] \varphi\,h\,l.$$

In dem Falle, wenn der Horizontaldruck des Waſſers dieſes Fortſchieben bewirken ſoll, iſt daher zu ſetzen:

$${}^1/_2\,h^2\,l\,\gamma = \left[{}^1/_2\,\gamma\,a + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] . \varphi\,h\,l,$$

oder einfacher:

$$h = \varphi\left(a + (2\,b + a + a_1)\,\frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Damit alſo der Damm vom Waſſer nicht fortgeſchoben werde, muß ſein:

$$h < \varphi\left(a + (2\,b + a + a_1)\,\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \text{ oder}$$

$$b > {}^1/_2\left[\left(\frac{h}{\varphi} - a\right)\frac{\gamma}{\gamma_1} - (a + a_1)\right].$$

Der Sicherheit wegen nimmt man wohl an, daß der Grund des Dammes größtentheils durchwaſchen ſei, weshalb äußerſtenfalls noch ein Gegendruck von unten nach oben, $= (b + a + a_1)\,l\,h\,\gamma$ in Abzug zu bringen und

$$h < \varphi\left[(2\,b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right]$$

zu ſetzen iſt.

Beiſpiel. Die Dichtigkeit der Lehmdammmaſſe iſt nahe doppelt ſo groß, als die des Waſſers, alſo:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 2 \text{ und } \frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 = 1;$$

es läßt ſich daher für einen Lehmdamm einfach

$$h < \varphi\,(2\,b + a)$$

ſetzen. Erfahrungen zufolge widerſteht ein Damm hinlänglich, wenn die Höhe,

Digitized by Google

Böschung und Kappenbreite desselben einander gleich sind; setzt man hiernach in der letzten Formel:

$$h = b = a, \text{ so ergiebt sich:}$$
$$\varphi = 1/3, \text{ weshalb man in anderen Fällen:}$$
$$h = 1/3\left[(2\,b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right],$$

und insbesondere bei Lehmdämmen:

$$h = 1/3\,(2\,b + a), \text{ daher umgekehrt:}$$
$$b = \frac{3\,h - a}{2}$$

zu setzen hat.

Beträgt die Dammhöhe 20 Fuß und der Böschungswinkel $\alpha = 36^0$, so ist die Böschung:

$$a = h\,cotg.\,\alpha = 20\,.\,cotg.\,36^0 = 20\,.\,1{,}3764 = 27{,}53 \text{ Fuß},$$

und daher die obere Damm- oder Kappenbreite:

$$b = \frac{60 - 27{,}53}{2} = 16{,}24 \text{ Fuß zu machen.}$$

§. 361 **Druck auf krumme Flächen.** Das im letzten Paragraphen gefundene Gesetz über den Druck des Wassers nach einer bestimmten Richtung gilt nur für ebene Flächen und für die einzelnen Elemente krummer Flächen, nicht aber für krumme Flächen überhaupt. Die Normaldrücke auf die einzelnen Elemente einer krummen Fläche lassen sich in Seitenkräfte parallel zu einer gegebenen Richtung und in andere, gegen erstere winkelrecht wirkend, zerlegen. Jene Seitendrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft den Druck in der gegebenen Richtung angiebt, und diese Seitenkräfte lassen sich ebenfalls auf eine Mittelkraft zurückführen, beide Mittelkräfte gestatten aber keine weitere Vereinigung, wenn ihre Richtungen nicht zum Durchschnitte gelangen (§. 97). Im Allgemeinen ist es also nicht möglich, die sämmtlichen Wasserdrücke gegen die Elemente einer krummen Fläche auf eine einzige Kraft zurückzuführen; es kommen jedoch einzelne Fälle vor, wo diese Vereinigung möglich ist.

Sind $G_1$, $G_2$, $G_3$ u. s. w. die Projectionen und $h_1$, $h_2$, $h_3$ u. s. w. die Druckhöhen von den Elementen $F_1$, $F_2$, $F_3$ u. s. w. einer krummen Fläche, so hat man den Druck des Wassers nach der Richtung winkelrecht zur Projectionsebene:

$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \cdots)\,\gamma,$$

und das Moment desselben in Hinsicht auf die Ebene des Wasserspiegels:

$$P u = (G_1 h_1^2 + G_2 h_2^2 + G_3 h_3^2 + \cdots)\,\gamma.$$

Kann man die gedrückte krumme Fläche in Elemente zerlegen, die zu ihren Projectionen ein unveränderliches Verhältniß haben, läßt sich also

$$\frac{G_1}{F_1} = \frac{G_2}{F_2} = \frac{G_3}{F_3} \text{ u. s. w. } = n \text{ setzen, so hat man:}$$

Digitized by Google

$$G_1 = \frac{F_1}{n},\quad G_2 = \frac{F_2}{n} \text{ u. ſ. w., daher:}$$

$$P = \left(\frac{F_1 h_1}{n} + \frac{F_2 h_2}{n} + \cdots\right)\gamma = \left(\frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots}{n}\right)\gamma = \frac{F h}{n}\,\gamma.$$

wo $F$ den Inhalt der ganzen Fläche und $h$ die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel bezeichnet. Nun hat man aber

$$F = F_1 + F_2 + \cdots = n G_1 + n G_2 + \cdots = n(G_1 + G_2 + \cdots) = n G,$$

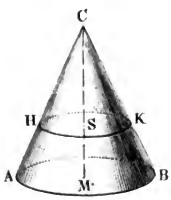
wenn $G$ den Inhalt der Projection der ganzen Fläche ausdrückt, es iſt daher:

$$P = \frac{F h}{n}\,\gamma = G h \gamma;$$

alſo wie bei jeder ebenen Fläche, der Waſſerdruck nach einer Richtung gleich dem Gewichte eines Waſſerprismas, deſſen Grundfläche der Projection der krummen Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung und deſſen Höhe der Tiefe des Schwerpunktes der krummen Fläche unter dem Waſſerſpiegel gleich kommt.

So iſt z. B. der Verticaldruck des Waſſers gegen den Mantel eines mit Waſſer gefüllten, kegelförmigen Gefäßes $ACB$, Fig. 609, gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die Bodenfläche zur Baſis und zwei Drittel der Axenlänge $CM$ zur Höhe hat, weil ſich die von der Bodenfläche gebildete Horizontalprojection des geraden Kegelmantels ebenſo wie der Mantel in lauter gleiche trianguläre Elemente zerlegen läßt, und weil der Schwerpunkt $S$ des Kegelmantels um zwei Drittel der Höhe des Kegels von der Spitze abſteht (§. 116). Iſt $r$ der Halbmeſſer der Baſis und $h$ die Höhe des Kegels, ſo hat man den Druck gegen den Boden, $= \pi r^2 h \gamma$, und den Verticaldruck gegen den Mantel, $= {}^2/_3\,\pi r^2 h \gamma$; da aber der Boden mit der Seitenwand feſt verbunden iſt, und beide Drücke einander entgegen wirken, ſo folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß durch das Waſſer abwärts gedrückt wird,

Fig. 609.




$$= (1 - {}^2/_3)\,\pi r^2 h \gamma = {}^1/_3\,\pi r^2 h \gamma$$

= dem Gewichte der ganzen Waſſermaſſe. Hätte man den Boden durch einen feinen Schnitt vom Mantel getrennt, ſo würde derſelbe mit ſeiner vollen Kraft $\pi r^2 h \gamma$ nach unten, oder auf ſeine Unterlage drücken, dagegen wäre aber auch noch der Mantel mit einer Kraft ${}^2/_3\,\pi r^2 h \gamma$ niederzuhalten, um das Abheben deſſelben durch das Waſſer zu verhindern.

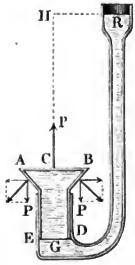
Digitized by Google

Anmerkung. Es ist hiernach die Kraft, welche der Dampf einer Dampfmaschine oder das Wasser einer Wassersäulenmaschine auf den Kolben ausübt, unabhängig von der Form des Kolbens. Wie auch die Druckfläche durch Aushöhlung oder Abrundung vergrößert sein möge, immer bleibt der Druck, mit welchem der Dampf oder das Wasser den Kolben fortschiebt, gleich dem Producte aus dem Querschnitte oder der Horizontalprojection des Kolbens und aus dem Drucke auf die Flächeneinheit. Bei dem trichterförmigen Kolben $AB$, Fig. 610, dessen größerer Halbmesser $CA = CB = r$ und dessen kleinerer Halbmesser $GD = GE = r_1$ ist, mißt der Druck auf die Grundfläche, $= \pi r^2 p$ und die Reaction auf den Mantel, $= \pi (r^2 - r_1^2) p$; es ist daher der übrigbleibende wirksame Druck:

$$P = \pi r^2 p - \pi (r^2 - r_1^2) p = \pi r_1^2 p$$

= Querschnitt des Cylinders mal Druck auf die Flächeneinheit.

Fig. 610.




§. 362 **Horizontal- und Verticaldruck.** Wie auch eine krumme Fläche $AB$, Fig. 611, geformt sein möge, immer ist der Horizontaldruck des Wassers gegen dieselbe gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Verticalprojection $A_0 B_0$ der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Druckrichtung und zur Druckhöhe die Tiefe $OS$ des Schwerpunktes $S$ dieser Projection unter dem Wasserspiegel hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Formel

$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots) \gamma$$

sogleich, wenn man berücksichtigt, daß die Druckhöhen $h_1$, $h_2$ u. s. w. der Flächenelemente auch zugleich die Druckhöhen ihrer Projectionen sind, daß also

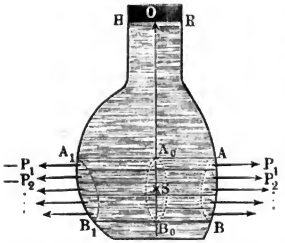
$$G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

das statische Moment der ganzen Projection, d. i. das Product $Gh$ aus der Verticalprojection $G$ und der Tiefe $h$ ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ist. Man hat also hier wieder

$$P = G h \gamma$$

zu setzen, aber nicht außer Acht zu lassen, daß $h$ die Druckhöhe der Verticalprojection ist.

Fig. 611.



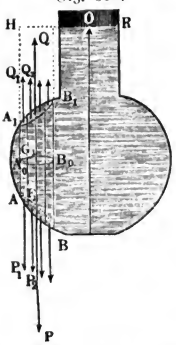

Der Verticalschnitt, wodurch man ein Gefäß mit dem darin befindlichen Wasser in zwei gleiche oder ungleiche Theile theilt, ist zugleich die Verticalprojection von beiden Theilen, der Horizontaldruck auf einen Theil der Gefäßwand ist aber dem Producte aus der Verticalprojection desselben und der Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel proportional; folglich

Digitized by Google

ist auch der Horizontaldruck des Wassers auf einen Theil $AB$ der Gefäßwand genau so groß, als der entgegengesetzt wirkende Horizontaldruck auf den gegenüber liegenden Theil $A_1 B_1$ derselben, und es heben sich beide Kräfte im Gefäße gegenseitig auf. Das ganze Gefäß wird also von dem eingeschlossenen Wasser nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gepreßt.

Der Verticaldruck $P_1 = G_1 h_1 \gamma$ des Wassers gegen ein Element $F_1$, Fig. 612, der Gefäßwand ist, da die Horizontalprojection $G_1$ des Elementes als Querschnitt und die Druckhöhe $h_1$ als Höhe und also $G_1 h_1$ als das Volumen eines Prismas angesehen werden kann, gleich dem Gewichte einer über dem Elemente stehenden und bis zur Ebene $HR$ des Wasserspiegels reichenden Wassersäule $HF_1$. Die einen endlichen Theil $AB$ des Bodens oder der Gefäßwand ausmachenden Flächenelemente erleiden daher auch einen Verticaldruck, welcher dem Gewichte sämmtlicher darüberstehenden Wassersäulen, d. i. dem Gewichte der über dem ganzen Stücke stehenden Wassersäule gleich ist. Setzen wir dieses Volumen $V_1$, so erhalten wir hiernach für den verticalen Wasserdruck:

Fig. 612.




$$P = V_1 \gamma.$$

Für einen anderen Theil $A_1 B_1$ der Gefäßwand, welcher senkrecht über dem vorigen liegt und das Volumen $A_1 B_1 H = V_2$ begrenzt, hat man den entgegengesetzten Verticaldruck:

$$Q = V_2 \gamma;$$

sind aber beide Theile fest mit einander verbunden, so resultirt aus beiden Kräften die vertical abwärts wirkende Kraft:

$$R = P - Q = (V_1 - V_2)\gamma = V\gamma$$

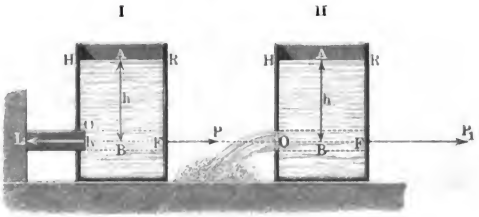
= dem Gewichte der zwischen beiden Flächentheilen enthaltenen Wassersäule. Wendet man endlich dieses Gesetz auf das ganze Gefäß an, so folgt, daß der gesammte Verticaldruck des Wassers gegen das Gefäß gleich ist dem Gewichte der eingeschlossenen Wassermasse.

Macht man eine Oeffnung $O$ in die Seitenwand eines Gefäßes $HBR$, Fig. 613, I. u. II. (a. f. S.), so fällt der Theil des Druckes, welcher dem Querschnitte dieser Oeffnung entspricht, weg, und es bleibt daher der Druck auf das gegenüber liegende Flächenstück $F$ übrig. Wird nun die Oeffnung wie in I., durch einen Stöpsel $K$ verschlossen, dessen Zurückgehen ein Widerstand $L$ von außen verhindert, so findet eine gleichmäßige Vertheilung des Horizontaldruckes auf die Gefäßwand nicht mehr statt, sondern es wird das Gefäß mit einer Kraft $P = Fh\gamma$ fortgeschoben, welche der Stöpsel in entgegengesetzter Richtung aufnimmt. Gelangt nach dem Entstöpseln der Mün-

Digitized by Google

dung das Wasser $O$ zum Ausfluß, wie II. darstellt, so steigert sich in Folge

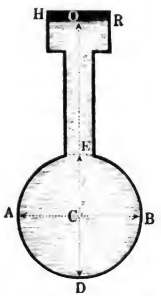
Fig. 613.




der Reaction des ausfließenden Wassers dieser Druck $P$ von $F h \gamma$ auf $P_1 = 2 F h \gamma$, wie in der Folge gezeigt werden wird.

*Beispiel* Der Verticaldruck $P_1$ des Wassers auf die untere Halbkugelfläche $ADB$, Fig. 614, ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche eben von der Ebene des Wasserspiegels $HR$ und unten von dieser Halbkugelfläche begrenzt wird. Ist $r$ der Halbmesser $CA = CD$ dieser Fläche, und $h$ die Höhe $CO$ des Wasserspiegels $HR$ über der horizontalen Begrenzungsebene $AB$ derselben, so hat man das Volumen der Halbkugel $ADB$, $V_1 = \frac{2}{3} \pi r^3$, und das des Cylinders über $AB$, $V_2 = \pi r^2 h$, daher:

Fig. 614.




$$P_1 = (V_1 + V_2)\gamma = (\tfrac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h)\gamma$$
$$= (h + \tfrac{2}{3} r) \pi r^2 \gamma.$$

Der nach oben gerichtete Verticaldruck auf die obere Halbkugelfläche $AEB$ ist dagegen:

$$P_2 = (V_2 - V_1)\gamma = (h - \tfrac{2}{3} r) \pi r^2 \gamma;$$

daher folgt der gesammte Verticaldruck:

$$P = P_1 - P_2 = 2 V_2 = \tfrac{4}{3} \pi r^3 \gamma$$

= dem Gewichte des Wassers in der ganzen Kugel.

Der horizontale Druck auf eine der Halbkugeln $DAE$ und $DBE$, welche in der Verticalebene $DCE$ zusammenstoßen, wird dagegen durch das Gewicht des Prismas von der Grundfläche $DCE = \pi r^2$ und der Höhe $CO = h$ gemessen, ist folglich:

$$R = \pi r^2 h \gamma.$$

§. 363 **Röhrenstärke.** Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Lehre vom Wasserdrucke auf Röhren, Kessel u. s. w. Damit diese Gefäße dem Wasserdrucke hinreichend widerstehen und durch denselben nicht zersprengt werden, hat man ihnen eine gewisse, der Druckhöhe und der inneren Weite entsprechende Wandstärke zu geben. Das Zersprengen einer Röhre kann

Digitized by Google

entweder in Quer- oder in Längenriſſen vor ſich gehen. Die letzteren entſtehen jedoch leichter als die erſteren, wie aus Folgendem erhellen wird.

Iſt die Druckhöhe des Waſſers in einer Röhre, $= h$, alſo der Druck deſſelben auf die Flächeneinheit, $p = h\gamma$, ferner die Weite dieſer Röhre, $MN = 2\,CM = 2r$, Fig. 615, alſo der Querſchnitt des Waſſerkörpers in derſelben, $F = \pi r^2$, ſo beträgt der auf die Endflächen der Röhre ausgeübte und von dem Querſchnitte der Röhrenmaſſe aufzunehmende Waſſerdruck:

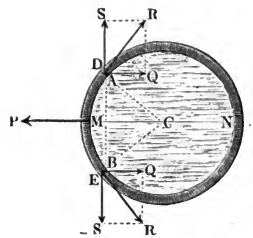
$$P = Fp = \pi r^2 h\gamma = \pi r^2 p.$$

Hat nun die Röhrenwand eine Dicke $AD = BE = e$, ſo iſt der Querſchnitt derſelben

$$= \pi(r+e)^2 - \pi r^2 = 2\pi re + e^2 = 2\pi re\left(1 + \frac{e}{2r}\right),$$

und bezeichnet man endlich den Tragmodul des Röhrenmaterials durch $T$, ſo läßt ſich die Tragkraft der ganzen Röhre in der Axenrichtung,

Fig. 615.




$$P = \left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2\pi re\,T$$

ſetzen, ſo daß nun die Gleichung

$$\left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2\pi re\,T = \pi r^2 p \quad \text{oder}$$

$$\left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2e\,T = rp \text{ (ſ. §. 205)}$$

aufgeſtellt werden kann, deren Auflöſung die geſuchte Röhrenſtärke

$$e = \frac{rp}{2\left(1 + \frac{e}{2r}\right)T},$$

oder meiſt genau genug,

$$e = \frac{rp}{2T} = \frac{rh\gamma}{2T} \text{ giebt.}$$

Der mittlere Druck, welchen das Waſſer auf ein Wandſtück $AMB$ ausübt, deſſen Länge $= l$, und Centriwinkel $ACB = 2\alpha^0$ iſt, beträgt, da die Projection dieſes Stückes rechtwinkelig gegen die Mittellinie $CM$ ein Rechteck vom Inhalte $\overline{AB}.l = 2rl\sin.\alpha$ iſt,

$$P = 2rl\sin.\alpha.\,p = 2rlh\sin.\alpha.\,\gamma.$$

Dieſer Kraft wird durch die Cohäſionskräfte $R$, $R$ in den Querſchnitten $\overline{AD}.l$ und $\overline{BE}.l = el$ der Röhrenwand das Gleichgewicht gehalten; ſie iſt daher der Summe $2Q$ derjenigen Componenten $\overline{DQ} = Q$ und $\overline{EQ} = Q$ der letzteren Kräfte gleich zu ſetzen, welche mit der Mittellinie $CM$ parallel gerichtet ſind. Setzen wir nun $R = el\,T$, ſo erhalten wir:



Digitized by Google

$$Q = R \sin. ARQ = R \sin. ACM = el T \sin. \alpha,$$

und daher:

$$2 el T \sin. \alpha = 2 rlp \sin. \alpha, \text{ d. i. } eT = rp,$$

und es ist hiernach die gesuchte Röhrenstärke:

$$e = \frac{rp}{T} = \frac{rh\gamma}{T},$$

also ganz unabhängig von der Lage und Länge der Risse.

Da die erste Entwickelung $e$ nur $= \frac{rp}{2T}$ giebt, so folgt, daß zur Verhinderung der Entstehung von Längenrissen die Wandstärke noch einmal so groß zu machen ist, als zur Verhinderung der Bildung eines Querrisses.

Aus der gefundenen Formel

$$e = \frac{rp}{T} = \frac{rh\gamma}{T}$$

folgt, daß sich die Stärken gleichartiger Röhren wie die Weiten und wie die Druckhöhen oder Drücke auf die Flächeneinheit verhalten müssen. Eine Röhre, welche dreimal so weit ist, als eine andere, und einen fünfmal so großen Druck auf jede Flächeneinheit auszuhalten hat, als diese, muß eine fünfzehnmal so starke Wand erhalten.

Hohlen Kugeln, welche von innen einen Druck $p$ auf jede Flächeneinheit aushalten müssen, hat man die Stärke

$$e = \frac{rp}{2T}$$

zu geben, weil hier die Projection der Druckfläche der größte Kreis $\pi r^2$, und die Trennungsfläche der Ring $2\pi re\left(1 + \frac{e}{2r}\right)$, oder annähernd, bei kleinerer Dicke, $= 2\pi re$ ist.

Die gefundenen Formeln geben für $p = 0$ auch $e = 0$, deshalb müßten also Röhren, welche keinen inneren Druck auszuhalten haben, unendlich dünn gemacht werden; da aber jede Röhre schon in Folge ihres eigenen Gewichtes einen gewissen Druck aushalten und auch eine gewisse Dicke erhalten muß, damit sie wasserdicht wird, so hat man zu der gefundenen Größe noch eine gewisse Dicke $e_1$ hinzuzufügen, um die Stärke einer unter allen Umständen widerstehenden Röhre zu erhalten. Es ist solchem nach für cylindrische Röhren oder Kessel zu setzen:

$$e = e_1 + \frac{rh\gamma}{T},$$

oder einfacher, wenn $d$ die ganze innere Röhrenweite, $p$ den Druck in

Digitized by Google

Atmoſphären, jede einer 33 Fuß hohen Waſſerſäule entſprechend, und $\mu$ eine Erfahrungszahl bezeichnet:

$$e = e_1 + \mu p d.$$

Gemachten Erfahrungen zufolge iſt anzunehmen für Röhren von:

| | | |
|---|---|---|
| Eiſenblech . . . . . | $e = 0{,}00086\,pd + 0{,}12$ | Zoll |
| Gußeiſen . . . . . | $e = 0{,}00238\,pd + 0{,}33$ | „ |
| Kupfer . . . . . | $e = 0{,}00148\,pd + 0{,}16$ | „ |
| Blei . . . . . | $e = 0{,}00507\,pd + 0{,}20$ | „ |
| Zink . . . . . | $e = 0{,}00242\,pd + 0{,}16$ | „ |
| Holz . . . . . | $e = 0{,}0323\ pd + 1{,}04$ | „ |
| natürlichen Steinen . . | $e = 0{,}0369\ pd + 1{,}15$ | „ |
| künſtlichen Steinen . . | $e = 0{,}0538\ pd + 1{,}53$ | „ |

Beiſpiel. Wenn eine Waſſerſäulenmaſchine ſenkrecht ſtehende, im Inneren 10 Zoll weite Einfallröhren aus Gußeiſen hat, wie ſtark müſſen dieſelben bei 100, 200 und 300 Fuß Tiefe ſein? Nach der Formel iſt bei 100 Fuß Druck dieſe Stärke $= 0{,}00238 \,.\, {}^{100}/_{33} \,.\, 10 + 0{,}33 = 0{,}07 + 0{,}33 = 0{,}40$ Zoll; bei 200 Fuß $= 0{,}14 + 0{,}33 = 0{,}47$ Zoll, und bei 300 Fuß Druck $= 0{,}22 + 0{,}33 = 0{,}55$ Zoll. Gewöhnlich prüft man gußeiſerne Leitungsröhren auf 10 Atmoſphären, weshalb hiernach

$$e = 0{,}0238\,.\,d + 0{,}33 \text{ Zoll},$$

alſo für Röhren von 10 Zoll Weite die Stärke:

$$e = 0{,}24 + 0{,}33 = 0{,}57 \text{ Zoll}$$

anzuwenden iſt.

Anmerkung 1. Im zweiten Theile werden die Wandſtärken der Röhren auch für den Fall ermittelt, wo die Röhren nicht bloß hydroſtatiſchen Druck, ſondern auch hydrauliſche Stöße auszuhalten haben. (S. „Ingenieur" S. 422.)

Anmerkung 2. Von den Stärken der Dampfkeſſelwände wird im zweiten Theile gehandelt. Ueber die Theorie der Rohrenſtärke iſt eine Abhandlung von Herrn geh. Regierungsrath Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 1834, ſowie Wiebes Lehre von den einfachen Maſchinentheilen, Band I., nachzuleſen. Ebenſo Rankine's Manuel of applied Mechanics, S. 289, und Scheffler's Monographien über die Gitter- und Bogenträger, und über die Feſtigkeit der Gefäßwände. Von den techniſchen Verhältniſſen und von den Prüfungen der Röhren wird gehandelt in Hagen's Handbuch der Waſſerbaukunſt, Theil I., ferner in Genieys Essai sur les moyens de conduire etc. les eaux, und im Traité théoretique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux, par Dupuit, Paris 1854.



Digitized by Google

## Zweites Capitel

### Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

§. 364 **Auftrieb.** Ein unter das Wasser getauchter Körper wird durch das Wasser von allen Seiten her gedrückt, und es entsteht nun die Frage nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte der Mittelkraft aus allen diesen Pressungen. Denken wir uns diese Mittelkraft aus einem verticalen und zwei horizontalen Componenten bestehend, und bestimmen wir diese Kräfte nach den Regeln des §. 362. Der Horizontaldruck des Wassers gegen eine Fläche ist gleich dem Horizontaldrucke gegen ihre Verticalprojection nun ist aber jede Projection eines Körpers $A\,C$, Fig. 616, Projection vom Hintertheil $A\,D\,C$ und Vordertheil $A\,B\,C$ seiner Oberfläche zugleich, es fällt daher auch der horizontale Wasserdruck $P$ gegen den Hintertheil der Oberfläche eines Körpers eben so groß aus als der Druck — $P$ gegen den Vordertheil, und es ist in Folge der entgegengesetzten Richtungen dieser Drücke, die Mittelkraft derselben gleich Null. Da dieses Verhältniß bei jeder beliebigen Horizontalrichtung und dieser entsprechenden Verticalprojection stattfindet, so folgt, daß die Resultirende aus allen Horizontalpressungen Null ist, daß also der unter dem Wasser befindliche Körper $A\,C$ nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt wird und deshalb kein Bestreben hat, sich in einer Horizontalrichtung fortzubewegen.

Fig. 616.

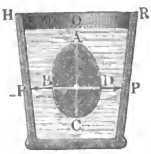
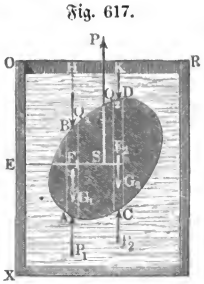



Fig. 617.




Um den Verticaldruck des Wassers gegen den eingetauchten Körper $A\,B\,D$, Fig. 617, zu finden, denken wir uns denselben in verticale Elemen-

Digitized by Google

tarprismen $AB$, $CD$ u. s. w. zerlegt, und bestimmen die Verticaldrücke auf die Endflächen $A$ und $B$, $C$ und $D$ derselben u. s. w. Sind die Längen dieser Säulen $l_1$, $l_2$ u. s. w., die Tiefen $HB$, $KD$ ihrer oberen Enden $B$, $D$ unter dem Wasserspiegel $OR$, $h_1$, $h_2$ u. s. w., und ihre horizontalen Querschnitte $F_1$, $F_2$ u. s. w., so hat man die von oben nach unten wirkenden Verticaldrücke gegen die Enden $B$, $D$ u. s. w.

$$Q_1,\ Q_2 \text{ u. s. w.} = F_1 h_1 \gamma,\ F_2 h_2 \gamma \text{ u. s. w.},$$

und dagegen die von unten nach oben und gegen die Enden $A$, $C$ u. s. w. wirkenden Drücke

$$P_1,\ P_2 \text{ u. s. w.} = F_1 (h_1 + l_1)\ \gamma,\ F_2 (h_2 + l_2)\ \gamma \text{ u. s. w.};$$

und es folgt nun durch Vereinigung dieser Parallelkräfte die Mittelkraft:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \cdots - (Q_1 + Q_2 + \cdots) \\ &= F_1 (h_1 + l_1)\gamma + F_2 (h_2 + l_2)\gamma + \cdots - F_1 h_1 \gamma - F_2 h_2 \gamma - \cdots \\ &= (F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots)\gamma = V\gamma, \end{aligned}$$

wenn $V$ das Volumen des eingetauchten Körpers oder des verdrängten Wassers bezeichnet.

Hiernach ist also der Auftrieb, oder die Kraft, mit welcher das Wasser einen darin eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben sucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers oder einer Wassermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.

Um endlich noch den Angriffspunkt dieser Mittelkraft zu finden, setzen wir die Abstände $EF_1$, $EF_2$ u. s. w. der Elementarsäulen $AB$, $CD$ u. s. w. von einer Verticalebene $OX$, $a_1$, $a_2$ u. s. w. und bestimmen die Momente der Kräfte in Hinsicht auf diese Ebene. Ist nun $S$ der Angriffspunkt des Auftriebes und $ES = x$ der Abstand desselben von jener Grundebene, so hat man:

$$V\gamma . x = F_1 l_1 \gamma . a_1 + F_2 l_2 \gamma . a_2 + \cdots,$$

und daher:

$$x = \frac{F_1 l_1 a_1 + F_2 l_2 a_2 + \cdots}{F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots} = \frac{V_1 a_1 + V_2 a_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

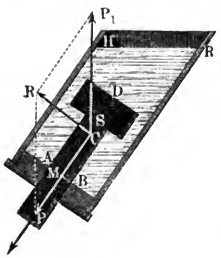
wenn $V_1$, $V_2$ u. s. w. die Inhalte der säulenförmigen Elemente bezeichnen. Da sich (nach §. 105) der Schwerpunkt des Körpers genau nach derselben Formel bestimmt, so folgt, daß der Angriffspunkt $S$ des Auftriebes mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers zusammenfällt.

**Auftrieb bei theilweiser Umgebung mit Wasser.** Wenn §. 365 ein Körper, wie $ABD$, Fig. 618 (a. f. S.), nicht vollständig vom Wasser $AHR$ umgeben ist, sondern mit der Gefäßwand in einer ebenen Fläche $\overline{AB}$ vom Inhalte $F$ zusammenhängt, oder die Gefäßwand mit dem Querschnitte $\overline{AB} = F$ durchdringt, so fällt von der Wirkung des Wassers

Digitized by Google

auf den Körper die Kraft weg, welche dieselbe auf die Fläche $AB$ ausüben würde, wenn letztere frei, also ebenfalls mit dem Wasser in Berührung wäre.

Fig. 618.




Bezeichnet nun $h$ die Druckhöhe auf $AB$, d. i. die Tiefe des Schwerpunktes dieser Fläche unter dem Wasserspiegel $HR$, so wäre der Wasserdruck auf $AB$, $P = Fh\gamma$ und giebt $V_1$ das Volumen des von $ABD$ verdrängten Wassers an, so ist der Auftrieb des Wassers, welcher den Körper senkrecht aufwärts zu bewegen suchen würde, wenn er ganz frei wäre, $P_1 = V_1\gamma$.

Da nun aber der Druck auf $AB$ wegfällt, so ist die Gesammtwirkung des Wassers auf den Körper nur die Mittelkraft $R$ aus $P_1 = V_1\gamma$ und $-P = -Fh\gamma$. Um diese Mittelkraft zu bestimmen, hat man die verticale Schwerlinie des verdrängten Wasserkörpers und die durch den Mittelpunkt $M$ des Druckes auf $AB$ winkelrecht stehende Gerade bis zum Durchschnitt $C$ zu verlängern, die Kräfte $P_1$ und $-P$ in diesem Punkte angreifend anzunehmen, und dieselben mittels des Parallelogrammes der Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CR} = R$ zu vereinigen.

Ist die Neigung der Fläche $AB$ gegen den Horizont, sowie die Abweichung der Kraft $P_1$ von der Verticalen, $= \alpha$, so hat man folglich den Winkel, welchen die Richtungen der Kräfte $P$ und $-P_1$ zwischen sich einschließen, $MCP_1 = 180^0 - \alpha$, und daher die Größe der den gesammten Wasserdruck auf den Körper $ABD$ messenden Mittelkraft

$$R = \sqrt{P_1^2 + P^2 - 2PP_1\cos.\alpha}$$
$$= \gamma\sqrt{V_1^2 + (Fh)^2 - 2V_1Fh\cos.\alpha}.$$

Dem Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung entsprechend, findet natürlich auch eine gleiche Reaction $-R$ des Körpers auf das Wasser statt. Ist $V_0$ das Volumen des Wassers im Gefäße, also $V_0\gamma$ das Gewicht $G$ desselben, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß vertical abwärts gedrückt wird,

$$Q = V_0\gamma + P_1 = (V_0 + V_1)\gamma \text{ d. i. } Q = V\gamma,$$

wenn $V = V_0 + V_1$ das Volumen des vom Wasser und vom Körper $ABD$ zugleich eingenommenen Raumes bezeichnet.

Vereinigt man nun noch hiermit den Druck $P = Fh\gamma$, so folgt die Gesammtkraft, welche das Gefäß aufzunehmen hat,

$$R_1 = \sqrt{Q^2 + P^2 - 2QP\cos.\alpha}$$
$$= \gamma\sqrt{V^2 + (Fh)^2 - 2VFh\cos.\alpha}.$$

Digitized by Google

Wäre die Fläche $AB$ horizontal, alſo $\alpha =$ Null, ſo hätte man

$$R = (V_1 - Fh)\gamma \text{ und } R_1 = (V - Fh)\gamma.$$

Wäre auch noch $V_1 = 0$, ſo würde $R = -Fh\gamma$ ausfallen (ſ. §. 355).

§. 366

**Gleichgewicht der ſchwimmenden Körper.** Zu dem Auftriebe $P$ eines in oder unter Waſſer getauchten Körpers geſellt ſich noch das in entgegengeſetzter Richtung wirkende Gewicht $G$ des Körpers, und es ergiebt ſich nun aus beiden eine Mittelkraft:

$$R = G - P \text{ oder } = (\varepsilon - 1)\, V\gamma,$$

wenn $\varepsilon$ das ſpecifiſche Gewicht des Körpers bezeichnet.

Iſt die Körpermaſſe homogen, ſo fällt der Schwerpunkt des verdrängten Waſſers mit dem des Körpers zuſammen, und es iſt daher dieſer Punkt zugleich der Angriffspunkt von der Mittelkraft $R = G - P$; findet aber eine Homogenität nicht ſtatt, ſo fallen dieſe Schwerpunkte nicht zuſammen, und es weicht deshalb auch der Angriffspunkt der Mittelkraft $R$ von beiden Schwerpunkten ab. Setzen wir den Horizontalabſtand $SH$, Fig. 619, beider Schwerpunkte von einander, $= b$ und den Horizontalabſtand $SA$ des geſuchten Angriffspunktes $A$ von dem Schwerpunkte $S$ des verdrängten Waſſers, $= a$, ſo haben wir die Gleichung:

Fig. 619.

$$Gb = Ra,$$

woraus ſich

$$a = \frac{Gb}{R} = \frac{Gb}{G - P}$$

ergiebt.

Wird der eingetauchte Körper ſeiner eigenen Schwere überlaſſen, ſo können folgende drei Fälle eintreten. Entweder iſt das ſpecifiſche Gewicht $\varepsilon$ des Körpers gleich dem des Waſſers, oder es iſt größer, oder es iſt kleiner als das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers. Im erſten Falle iſt der Auftrieb gleich dem Gewichte, im zweiten iſt er kleiner und im dritten iſt er größer als das Gewicht des Körpers. Während im erſten Falle Gleichgewicht zwiſchen dem Gewichte und dem Auftriebe eintritt, muß der Körper im zweiten Falle mit der Kraft

$$G - V\gamma = (\varepsilon - 1)\, V\gamma$$

ſinken, und im dritten Falle mit der Kraft

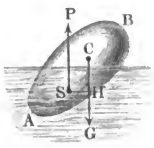
$$V\gamma - G = (1 - \varepsilon)\, V\gamma$$

ſteigen. Das Steigen geht aber nur ſo lange vor ſich, bis die von der Ebene des Waſſerſpiegels abgeſchnittene und von dem Körper verdrängte

Digitized by Google

Wassermasse $V_1$ mit dem ganzen Körper einerlei Gewicht hat. Das Gewicht $G = V\varepsilon\gamma$ des Körpers $AB$, Fig. 620, und der Auftrieb $P = V_1\gamma$ bilden nun ein Kräftepaar, durch welches der Körper noch so weit umgedreht wird, bis die Richtungen beider Kräfte zusammenfallen, oder bis der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in eine und dieselbe Verticallinie fällt. Aus der Gleichheit der Kräfte $P$ und $G$ folgt der Ausdruck:

Fig. 620.

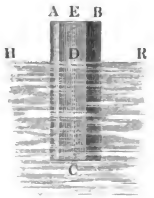



$$V_1 = \varepsilon V, \text{ oder } \frac{V_1}{V} = \frac{\varepsilon}{1}.$$

Man nennt die Linie durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und durch den des verdrängten Wassers die Schwimmaxe (franz. axe de flottaison; engl. axis of floating), und dagegen den durch die Ebene des Wasserspiegels gebildeten Schnitt des schwimmenden Körpers die Schwimmebene (franz. plan de flottaison; engl. plane of floating). Dem Vorstehenden zufolge kann jede Ebene, welche einen Körper so theilt, daß die Schwerpunkte beider Theile in einer Normallinie zu dieser Ebene liegen, und daß sich der eine Theil zum Ganzen wie das specifische Gewicht des Körpers zu dem der Flüssigkeit verhält, Schwimmebene des Körpers sein.

§. 367 **Schwimmtiefe.** Kennt man die Gestalt und das Gewicht eines schwimmenden Körpers, so läßt sich mit Hülfe der vorstehenden Regel die Tiefe des Eintauchens im Voraus berechnen. Ist $G$ das Gewicht des Körpers, so setze man das Volumen des verdrängten Wassers:

Fig. 621.




$$V_1 = \frac{G}{\gamma};$$

verbindet man hiermit die stereometrische Formel für dieses Volumen $V_1$, so erhält man die gesuchte Bestimmungsgleichung.

Für ein Prisma $ABC$, Fig. 621, mit verticaler Axe ist z. B. $V_1 = Fy$, wenn $F$ den Querschnitt und $y$ die Tiefe $CD$ des Eintauchens bezeichnet, es folgt daher:

$$Fy = \frac{G}{\gamma} \text{ und } y = \frac{G}{F\gamma} = \frac{Gh}{V\gamma},$$

wenn $V$ das Volumen und $h$ die Länge des schwimmenden Prismas bezeichnet.

Für eine mit der Spitze unter Wasser schwimmende Pyramide

Digitized by Google

$ABC$, Fig. 622, iſt, da ſich die Inhalte ähnlicher Pyramiden wie die Cuben ihrer Höhen verhalten,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{y^3}{h^3}, \text{ und folglich die Tiefe der Eintauchung:}$$

$$CD = y = h\sqrt[3]{\frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{\frac{G}{V\gamma}},$$

wo $V$ das Volumen und $h$ die Höhe der Pyramide bezeichnen.

Fig. 622.

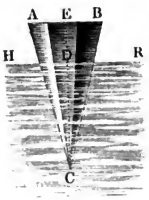



Fig. 623.

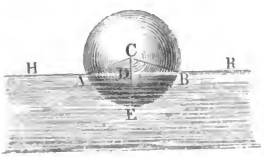
Für eine mit der Baſis unter Waſſer ſchwimmende Pyramide $ABC$, Fig. 623, ergiebt ſich hingegen der Abſtand $CD = y_1$ der Spitze vom Waſſerſpiegel, aus der Höhe $h$ der ganzen Pyramide, indem man ſetzt:

$\frac{V_1}{V} = \frac{h^3 - y_1^3}{h^3}$, wonach dann $y_1 = h\sqrt[3]{1 - \frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{1 - \frac{G}{V\gamma}}$ folgt.

Für eine Kugel $AB$, Fig. 624, mit dem Halbmeſſer $CA = r$ iſt

$$V_1 = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3}\right),$$

Fig. 624.




daher hat man hier es mit der Auflöſung der cubiſchen Gleichung

$$y^3 - 3ry^2 + \frac{3G}{\pi\gamma} = 0$$

zu thun, um die Tiefe $DE = y$ der Eintauchung der Kugel zu finden.

Für einen mit horizontaler Axe ſchwimmenden Cylinder $AK$, Fig. 625 (a. f. S.), vom Halbmeſſer $AC = BC = r$ iſt, wenn $\alpha^0$ den Centriwinkel $ACB$ des eingetauchten Bogens bezeichnet, die Tiefe $DE$ der Eintauchung:

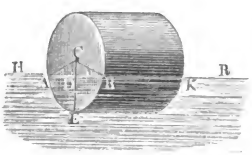
$$y = r\,(1 - \cos.\,{}^1/_2\,\alpha),$$

um aber den Waſſerbogen $\alpha$ zu finden, ſetzen wir das Volumen des verdrängten

Digitized by Google

Wassers = Ausschnitt $\left(\frac{r^2\alpha}{2}\right)$ minus Dreieck $\left(\frac{r^2 \sin.\alpha}{2}\right)$, multiplicirt durch die Länge $BK = l$ des Cylinders, also

Fig. 625.




$$(\alpha - \sin.\alpha)\,\frac{l r^2}{2} = \frac{G}{\gamma},$$

und lösen die Gleichung

$$\alpha - \sin.\alpha = \frac{2\,G}{l r^2 \gamma}$$

auf dem Wege der Näherung in Beziehung auf $\alpha$ auf.

Beispiele. 1) Wenn eine schwimmende Holzkugel von 10 Zoll Durchmesser, $4\frac{1}{2}$ Zoll tief schwimmt, so ist das Volumen des von ihr verdrängten Wassers:

$$V_1 = \pi\,(9/2)^2\,(5 - 9/6) = \frac{\pi \,.\, 81 \,.\, 7}{8} = \frac{567\,.\,\pi}{8} = 222{,}66 \text{ Cubikzoll},$$

während die Kugel selbst den Inhalt $\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi\,.\,10^3}{6} = 523{,}6$ Cubikzoll hat. Es wiegen hiernach 523,6 Cubikzoll Kugelmasse ebensoviel wie 222,66 Cubikzoll Wasser, und es folgt das specifische Gewicht der ersteren:

$$\varepsilon = \frac{222{,}66}{523{,}6} = 0{,}425.$$

2) Wie tief schwimmt ein Holzcylinder von 10 Zoll Durchmesser bei einem specifischen Gewichte $\varepsilon = 0{,}425$? Es ist:

$$\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = \frac{\pi r^2 l \,.\, \varepsilon\gamma}{l r^2 \gamma} = \pi\varepsilon = 0{,}425\,.\,\pi = 1{,}3352;$$

nun giebt die Segmententafel im „Ingenieur", S. 154, für den Inhalt $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}32766$ eines Kreissegmentes den Centriwinkel $\alpha^0 = 166^0$, und für $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}34487$ denselben $= 167^0$, es läßt sich daher einfach der dem Abschnitte 1,3352 entsprechende Centriwinkel

$$\alpha^0 = 166^0 + \frac{1{,}33520 - 1{,}32766}{1{,}34487 - 1{,}32766} \cdot 1^0 = 166^0 + \frac{754^0}{1721} = 166^0 26';$$

und die Tiefe der Eintauchung:

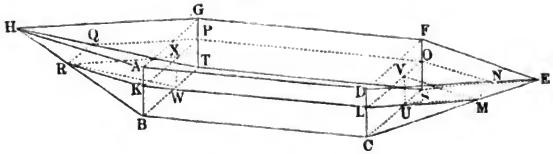
$y = r\,(1 - cos.\,{}^1/_2\,\alpha) = 5\,(1 - cos.\,83^0 13') = 5\,.\,0{,}8819 = 4{,}41$ Zoll setzen.

§. 368 Die Bestimmung der Eintauchungstiefe kommt vorzüglich bei Kähnen und Schiffen vor. Haben diese Fahrzeuge eine gesetzmäßige Form, so läßt sich diese Tiefe mittels geometrischer Formeln berechnen; fehlt aber die gesetzmäßige Form oder ist das Gesetz der Gestaltung nicht bekannt, oder ist die Form sehr zusammengesetzt, so muß man die Tiefe des Eintauchens durch Experimentiren oder durch Probiren bestimmen.

Digitized by Google

Ein Beiſpiel für den erſten Fall gewährt der in Fig. 626 abgebildete, von den ebenen Flächen begränzte Kahn $A\,C\,E\,G\,H$. Derſelbe beſteht aus

Fig. 626.




einem Parallelepipede $A\,C\,F$ und aus zwei, den Vorder- und Hintertheil bildenden vierſeitigen Pyramiden $C\,E\,F$ und $B\,G\,H$, und ſeine Schwimmebene iſt aus einem Parallelogramme $K\,L\,O\,P$ und aus zwei Trapezen $L\,M\,N\,O$ und $K\,P\,Q\,R$ zuſammengeſetzt, welche einen Waſſerraum abſchneiden, der ſich in ein Parallelepiped $K\,C\,O\,T$, in zwei dreiſeitige Prismen, wie $U\,V\,M\,N$ und $W\,X\,R\,Q$, und in zwei vierſeitige Pyramiden, wie $C\,V\,M$ und $B\,X\,R$ zerlegen läßt. Setzen wir die Länge $A\,D = B\,C$ des Mittelſtückes $= l$, die Breite $A\,G = b$ und die Höhe $A\,B = h$, ferner die Länge von jedem der beiden Schnäbel, $= c$ und die Tiefe der Einſenkung unter Waſſer, d. i. $B\,K = C\,L = y$. Es folgt zunächſt der eingetauchte Theil $K\,C\,O\,T$ des Mittelſtückes:

$$= \overline{B\,C}\,.\,\overline{C\,S}\,.\,\overline{C\,L} = l\,b\,y.$$

Setzen wir die Breite der Baſis der Pyramide $C\,V\,M$, $C\,U = x$, und die Höhe dieſer Pyramide $= z$, ſo haben wir:

$$\frac{x}{b} = \frac{z}{c} = \frac{y}{h}, \text{ daher:}$$

$$x = \frac{b}{h}\,y \text{ und } z = \frac{c}{h}\,y;$$

es folgt nun der Inhalt dieſer Pyramide:

$$= {}^1/_3\,x\,y\,z = \frac{b\,c\,y^3}{3\,h^2},$$

und daher der Inhalt der beiden Pyramiden ($C\,V\,M$ und $B\,X\,R$) zuſammen

$$= {}^2/_3\,\frac{b\,c\,y^3}{h^2}.$$

Der Querſchnitt des dreiſeitigen Prismas $U\,V\,N$ iſt:

$$= {}^1/_2\,y\,z = \frac{c\,y^2}{2\,h}, \text{ und die Seite } M\,N = V\,O:$$

$$= b - \frac{b\,y}{h} = b\left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

Digitized by Google

daher folgt der Inhalt der beiden Prismen $VUN$ und $XWQ$ zusammen:

$$= 2 \cdot \frac{cy^2}{2h} \cdot b\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \frac{bcy^2}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Endlich ergiebt sich durch Addition der gefundenen drei Räume das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V = bly + {}^2/_3 \frac{bcy^3}{h^2} + \frac{bcy^2}{h} - \frac{bcy^3}{h^2} = \left(l + \frac{cy}{h} - {}^1/_3 \cdot \frac{cy^2}{h^2}\right) by.$$

Ist nun das Bruttogewicht des Schiffes, $= G$, so hat man zu setzen:

$$\left(l + \frac{cy}{h} - {}^1/_3 \cdot \frac{cy^2}{h^2}\right) by\gamma = G, \text{ oder}$$

$$y^3 - 3hy^2 - \frac{3lh^2}{c} \cdot y + \frac{3h^2 G}{bc\gamma} = 0.$$

Durch die Auflösung der letzten cubischen Gleichung bestimmt sich aus dem Bruttogewichte $G$ des Schiffes die Tiefe $y$ der Einsenkung desselben.

Beispiele. 1) Wenn bei einem Schiffe die Länge des Mittelstückes, $l = 50$ Fuß, die Länge eines jeden Schnabels, $c = 15$ Fuß, die Breite $b = 12$ Fuß und die Tiefe $h = 4$ Fuß beträgt, so kann bei einer Einsenkungstiefe $y = 2$ Fuß die ganze Belastung betragen:

$$G = [50 + 15 \,.\, {}^2/_4 - {}^1/_3 \,.\, 15 \,.\, ({}^2/_4)^2] \,.\, 12 \,.\, 2 \,.\, 61{,}74$$
$$= (50 + 7{,}5 - 1{,}25) \,.\, 24 \,.\, 61{,}74 = 84920 \text{ Pfund.}$$

2) Wenn bei dem vorigen Schiffe das Bruttogewicht 50000 Pfund ausmacht, so hat man für die Senkungstiefe:

$$y^3 - 12y^2 - 160y + 215{,}96 = 0.$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{215{,}96 + y^3 - 12y^2}{160} = 1{,}35 + 0{,}00625y^3 - 0{,}075y^2, \text{ annähernd}$$
$$y = 1{,}350 + 0{,}00625 \,.\, (1{,}35)^3 - 0{,}075 \,.\, (1{,}35)^2$$
$$= 1{,}35 + 0{,}0154 - 0{,}1367 = 1{,}229, \text{ und nun genauer}$$
$$y = 1{,}350 + 0{,}00625 \,.\, (1{,}229)^3 - 0{,}075\,(1{,}229)^2 = 1{,}225 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Um das Gewicht der Ladungen eines Schiffes anzugeben, versieht man dieses zu beiden Seiten mit einer Scala, der sogenannten Schiffsaiche. Die Eintheilung einer solchen Aiche wird in der Regel empirisch gefunden, indem man untersucht, welche Einsenkungen bestimmten Belastungen entsprechen. Ausführlicher darüber im dritten Bande.

§. 369 **Stabilität schwimmender Körper.** Das Schwimmen der Körper erfolgt entweder in aufrechter oder in schiefer Stellung, ferner mit oder ohne Stabilität. Aufrecht schwimmt ein Körper, z. B. ein Schiff, wenn wenigstens eine durch die Schwimmaxe gehende Ebene Symmetrieebene des Körpers ist, schief schwimmt derselbe, wenn er durch keine der Ebenen, welche sich durch die Schwimmaxe legen lassen, in zwei symmetrische Theile getheilt wird.

Digitized by Google

Ein Körper ſchwimmt mit Stabilität, wenn er ſeinen Gleichgewichtszuſtand zu behaupten ſucht (vergl. §. 141), wenn alſo mechaniſche Arbeit aufzuwenden iſt, um ihn aus dieſer Lage zu bringen, oder wenn er von ſelbſt in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn daraus gebracht hat. Ohne Stabilität ſchwimmt dagegen der Körper, wenn er in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, nachdem er, etwa durch Erſchütterung oder durch einen Stoß u. ſ. w., aus der erſten gebracht worden iſt.

Wird ein vorher aufrecht ſchwimmender Körper $A\,B\,C$, Fig. 627, in eine ſchiefe Lage gebracht, ſo tritt der Schwerpunkt $S$ des verdrängten Waſſers aus der Symmetrieebene $E\,F$ heraus und nimmt eine Stelle $S_1$ auf der mehr eingetauchten Hälfte des Schiffsraumes ein. Der in $S_1$ angreifende Auftrieb $P = V\gamma$ und das im Schwerpunkte $C$ des Schiffes angreifende Gewicht $G = -P$ des Schiffes bilden nun ein Kräftepaar, durch welches (ſ. §. 93) ſtets eine Drehung hervorgebracht wird. Um welchen Punkt auch dieſe Drehung vor ſich gehe, immer wird doch $C$, dem Gewichte $G$ nachgebend, niedergehen, und $S_1$ oder ein anderer Punkt $M$ der Verticalen $S_1\,P$, der Kraft $P$ folgend, aufſteigen, es wird alſo die Symmetrie- oder Axenebene $E\,F$ des Schiffes in $C$ nach unten und in $M$ nach oben gezogen, und daher dieſelbe ſich aufrecht ſtellen, wenn $M$ wie in Fig. 627, über $C$ liegt, und ſich

Fig. 627.

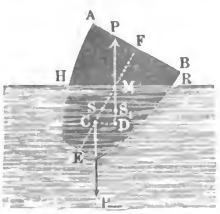
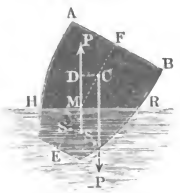



Fig. 628.




dagegen noch mehr neigen, wie in Fig. 628, wenn ſich $M$ unter $C$ befindet. Hiernach hängt denn die Stabilität eines ſchwimmenden Körpers oder Schiffes von dem Punkte $M$ ab, in welchem die Verticale durch den Schwerpunkt $S_1$ des verdrängten Waſſers die Symmetrieebene ſchneidet. Man nennt dieſen Punkt das Metacentrum (franz. métacentre; engl. metacentrum). Ein Schiff oder ein anderer Körper ſchwimmt alſo hiernach mit Stabilität, wenn ſein Metacentrum über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, und ohne ſolche, wenn es darunter liegt; er iſt endlich im indifferenten Gleichgewichte, wenn beide Punkte zuſammenfallen.

Der Horizontalabſtand $CD$ des Metacentrums $M$ von dem Schwerpunkte $C$ des Schiffes iſt der Hebelarm des von $P$ und $G = -P$ gebildeten Kräfte-

Digitized by Google

paares, und daher das Moment des letzteren oder das Maß der Stabilität $= P.\overline{CD}$. Bezeichnen wir die Entfernung $CM$ durch $c$, und den Drehungswinkel $SMS_1$ des Schiffes oder seiner Axenebene durch $\varphi$, so erhalten wir für das Maß der Stabilität des Schiffes:

$$S = Pc \sin.\varphi;$$

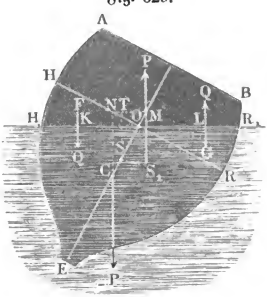
und es ist also hiernach dieses um so größer, je größer das Gewicht, je größer die Entfernung des Metacentrums von dem Schwerpunkte des Schiffes und je größer der Neigungswinkel des letzteren ist.

§. 370 **Bestimmung des Stabilitätsmomentes.** In der letzten Formel

$$S = Pc \sin.\varphi$$

hängt die Stabilität des Schiffes vorzüglich von der Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunkte des Schiffes ab, es ist daher von Wichtigkeit, sich eine Formel zur Bestimmung dieser Entfernung zu verschaffen. Durch den Uebergang des Schiffes $ABE$, Fig. 629, aus der aufrechten Lage in die schiefe Lage rückt der Schwerpunkt $S$ nach $S_1$, es geht der keilförmige Raum $HOH_1$ aus dem Wasser hervor und zieht sich der keilförmige Raum $ROR_1$ unter das Wasser hinab, und es wird dadurch der Auftrieb auf der einen Seite um eine im Schwerpunkte $F$ des Raumes $HOH_1$ angreifende Kraft $Q$ vermindert und auf der anderen Seite um eine im Schwerpunkte $G$ des Raumes $ROR_1$ angreifende gleiche Kraft $Q$ vergrößert. Es ersetzt also hiernach der in $S_1$ angreifende Auftrieb $P$ den anfänglich in $S$ angreifenden Auftrieb sammt dem Kräftepaare $(Q, -Q)$, oder, was auf Eins hinauskommt, eine in $S_1$ angreifende Gegenkraft $-P$ hält der in $S$ angreifenden Kraft $P$ sammt Kräftepaar $(Q, -Q)$ das Gleichgewicht, oder einfacher, ein Kräftepaar $(P, -P)$ mit den Angriffspunkten $S$ und $S_1$ ist mit dem Kräftepaare $(Q, -Q)$ im Gleichgewichte. Ist nun das Querprofil $HER = H_1ER_1$ des im Wasser befindlichen Schiffstheiles, $= F$, und das Querprofil $HOH_1 = ROR_1$ des Raumes, um welchen sich das Schiff auf der einen Seite herausgezogen und auf der anderen tiefer eingetaucht hat, $= F_1$, ist ferner der Horizontalabstand $KL$ der Schwerpunkte dieser Räume, $= a$, und der Horizontalabstand $MT$ der Schwerpunkte $S$ und $S_1$ oder die Horizontalprojection des Weges $SS_1$,

Fig. 629.




Digitized by Google

welchen $S$ beim Kippen durchläuft, $= s$, ſo hat man in Folge des Gleichgewichtszuſtandes beider Kräftepaare:

$$Fs = F_1 a, \text{ daher } s = \frac{F_1}{F} a \text{ und}$$

$$\overline{SM} = \frac{MT}{sin.\ \varphi} = \frac{s}{sin.\ \varphi} = \frac{F_1 a}{F sin.\ \varphi}.$$

Die als Factor in das Maß der Stabilität eintretende Linie $CM = c$ iſt $= CS + SM$; bezeichnen wir daher noch den Abſtand $CS$ des Schwerpunktes $C$ des Schiffes von dem Schwerpunkte $S$ des verdrängten Waſſers durch $e$, ſo erhalten wir das Stabilitätsmaß:

$$S = Pc\ sin.\ \varphi = P\left(\frac{F_1 a}{F} + e\ sin.\ \varphi\right).$$

Iſt der Drehungswinkel klein, ſo laſſen ſich die Querſchnitte $HOH_1$ und $ROR_1$ als gleichſchenkelige Dreiecke anſehen; bezeichnet man die Breite $HR = H_1 R_1$ des Schiffes an der Eintauchungsſtelle durch $b$, ſo kann man

$$F_1 = {}^1/_2 \cdot {}^1/_2\, b \cdot {}^1/_2\, b\varphi = {}^1/_8\, b^2 \varphi \text{ und } KL = a = 2 \cdot {}^2/_3 \frac{b}{2} = {}^2/_3\, b,$$

ſowie $sin.\ \varphi = \varphi$ ſetzen, weshalb die Stabilität

$$S = P\left({}^1/_{12} \frac{b^3 \varphi}{F} + e\varphi\right) = \left(\frac{b^3}{12F} + e\right) P\varphi \text{ folgt.}$$

Fällt der Schwerpunkt $C$ des Schiffes mit dem Schwerpunkte $S$ des verdrängten Waſſers zuſammen, ſo hat man $e = 0$, daher:

$$S = \frac{b^3}{12F} \cdot P\varphi,$$

und liegt der Schwerpunkt des Schiffes über dem des verdrängten Waſſers, ſo iſt dagegen $e$ negativ, daher:

$$S = \left(\frac{b^3}{12F} - e\right) P\varphi.$$

Auch folgt, daß die Stabilität eines Schiffes in Null übergeht, wenn $e$ negativ und zugleich $e = \frac{b^3}{12F}$ iſt.

Man ſieht aus dem gewonnenen Ergebniſſe, daß die Stabilität um ſo größer ausfällt, je breiter das Schiff iſt und je tiefer der Schwerpunkt deſſelben liegt.

Beiſpiel. Bei einem Parallelepipede $AD$, Fig. 630 (a. f. S.), von der Breite $AB = b$, Höhe $AE = h$ und Einſenkungstiefe $EH = y$, iſt $F = by$ und $e = -\frac{h - y}{2}$, daher das Maß der Stabilität:

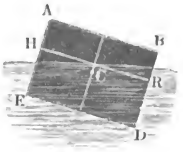
Digitized by Google

$$S = P\varphi\left(\frac{b^3}{12\,b\,y} - \frac{h}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

oder, wenn das specifische Gewicht der Masse des Parallelepipedes, $= \varepsilon$ gesetzt wird:

$$S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12\,\varepsilon\,h} - \frac{h}{2}\,(1-\varepsilon)\right).$$

Fig. 630.




Hiernach hört die Stabilität auf, wenn

$$b^2 = 6\,h^2\,\varepsilon\,(1-\varepsilon), \text{ d. i. wenn}$$

$$\frac{b}{h} = \sqrt{6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)} \text{ wird.}$$

Für $\varepsilon = 1/2$ folgt:

$$\frac{b}{h} = \sqrt{6/2 \cdot 1/2} = \sqrt{3/2} = 1{,}225;$$

wenn also die Breite noch nicht 1,225 der Höhe ist, so schwimmt das Parallelepiped ohne Stabilität.

§. 371 **Schiefes Schwimmen.** Die Formel

$$S = P\left(\frac{F_1\,a}{F} \pm e\ sin.\ \varphi\right)$$

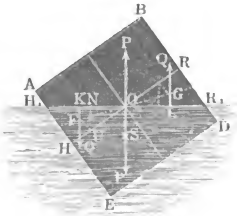
für die Stabilität eines schwimmenden Körpers läßt sich auch dazu anwenden, um die verschiedenen Lagen schwimmender Körper zu finden; denn setzen wir $S =$ Null, so erhalten wir die Gleichung, welche die Gleichgewichtslage bedingt, deren Auflösung auf die Bestimmung des entsprechenden Neigungswinkels führt. Es ist also die Gleichung

$$\frac{F_1\,a}{F} \pm e\ sin.\ \varphi = 0$$

in Hinsicht auf $\varphi$ aufzulösen.

Für ein Parallelepiped $ABDE$, Fig. 631, ist der Querschnitt $F = HRDE = H_1R_1DE = by$, wenn $b$ die Breite $AB = HR$ und $y$ die Senktiefe $EH = DR$ bezeichnet, sowie der Querschnitt

Fig. 631.




$$F_1 = HOH_1 = ROR_1,$$

als rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete

$$OH = OR = 1/2\,b,$$

und der Kathete

$$HH_1 = RR_1 = 1/2\,b\ tang.\ \varphi:$$

$$F_1 = 1/8\,b^2\ tang.\ \varphi.$$

Nun steht ferner der Schwerpunkt $F$ von der Basis $HR$ um

$$FU = 1/3\,HH_1 = 1/6\,b\ tang.\ \varphi$$

und von der Mitte $O$ um

$$OU = 2/3\,OH = 1/3\,b$$

ab, es folgt daher der Horizontalabstand des Schwerpunktes $F$ von der Mitte $O$:

Digitized by Google

$$= OK = ON + NK = OU\ cos.\varphi + FU\ sin.\varphi$$
$$= {}^1/_3\, b\ cos.\varphi + {}^1/_6\, b\ tang.\varphi\ sin.\varphi,$$

und der Arm:

$$a = \overline{KL} = 2\ \overline{OK} = {}^2/_3\, b\ cos.\varphi + {}^1/_3\, b\,\frac{sin.\varphi^2}{cos.\varphi}.$$

Diesemnach iſt die Gleichung für die ſchiefe Gleichgewichtslage:

$$\frac{{}^1/_8\, b^2\ tang.\varphi\,({}^2/_3\, b\ cos.\varphi^2 + {}^1/_3\, b\ sin.\varphi^2)}{b\,y\ cos.\varphi} - c\ sin.\varphi = 0,$$

oder, $\frac{sin.\varphi}{cos.\varphi} = tang.\varphi$ eingeführt:

$$sin.\varphi\ [({}^1/_{12} + {}^1/_{24}\ tang.\varphi^2)\ b^2 - c\,y] = 0;$$

welcher Gleichung durch

$$sin.\varphi = 0 \text{ und durch}$$
$$tang.\varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{12\,c\,y}{b^2} - 1}$$

Genüge geleiſtet wird. Dem durch die erſte Gleichung beſtimmten Winkel $\varphi = 0$ entſpricht das aufrechte, dem zweiten aber das ſchiefe Schwimmen. Die Möglichkeit des letzteren bedingt, daß $\frac{c\,y}{b^2} > {}^1/_{12}$ ausfällt. Iſt nun $h$ die Höhe des Parallelepipedes und $\varepsilon$ deſſen ſpecifiſches Gewicht, ſo hat man:

$$y = \varepsilon\, h \text{ und } c = \frac{h - y}{2} = (1 - \varepsilon)\,\frac{h}{2},$$

daher folgt:

$$tang.\varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,h^2}{b^2} - 1},$$

und es iſt die Bedingungsgleichung für das ſchiefe Schwimmen:

$$\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)}}.$$

Beiſpiele. 1) Wenn das ſchwimmende Parallelepiped eben ſo hoch als breit iſt und das ſpecifiſche Gewicht $\varepsilon = {}^1/_2$ hat, ſo iſt

$$tang.\varphi = \sqrt{2}\,\sqrt{3\,.\,{}^1/_2 - 1} = \sqrt{3 - 2} = 1, \text{ daher } \varphi = 45^0.$$

2) Wenn die Höhe $h = 0{,}9$ der Breite $b$, das ſpecifiſche Gewicht aber wieder ${}^1/_2$ iſt, ſo hat man

$$tang.\varphi = \sqrt{3\,.\,0{,}81 - 2} = \sqrt{0{,}43} = 0{,}6557, \text{ daher } \varphi = 33^0\,15'.$$

**Specifiſches Gewicht.** Das Geſetz vom Auftriebe des Waſſers läßt §. 372
ſich zur Beſtimmung der Dichtigkeit oder des ſpecifiſchen Gewichtes von Körpern benutzen. Nach §. 364 iſt der Auftrieb des Waſſers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüſſigkeit; bezeichnet daher $V$ das Volumen des



Digitized by Google

Körpers und $\gamma_1$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so hat man den Auftrieb $P = V\gamma_1$. Ist nun aber $\gamma_2$ die Dichtigkeit der Körpermasse, so hat man das Gewicht des Körpers, $G = V\gamma_2$, es folgt daher das Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{G}{P},$$

d. h. die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers verhält sich zur Dichtigkeit des Fluidums, wie das absolute Gewicht des Körpers zum Auftriebe oder Gewichtsverluste beim Untertauchen.

Hiernach ist also $\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma_1$ und $\gamma_1 = \frac{P}{G}\gamma_2$; oder wenn $\gamma$ die Dichtigkeit des Wassers, $\varepsilon_1$ das specifische Gewicht der Flüssigkeit und $\varepsilon_2$ das des Körpers bezeichnen, also $\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma$ sowie $\gamma_2 = \varepsilon_2\gamma$ gesetzt wird,

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P}\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{P}{G}\varepsilon_2.$$

Wenn man also das Gewicht eines Körpers und den Gewichtsverlust desselben beim Untertauchen kennt, so läßt sich aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der Körpermasse, und umgekehrt, aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der letzteren, die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der ersteren finden.

Ist die Flüssigkeit, worin man den festen Körper abwiegt, Wasser, so hat man $\varepsilon_1 = 1$ und $\gamma_1 = \gamma = 1000$ Kilogramm oder 61,74 Pfund, je nachdem man das Cubikmeter oder den Cubikfuß zur Volumeneinheit annimmt, daher ist für diesen Fall die Dichtigkeit des Körpers:

$$\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}} \text{ mal Dichtigkeit des Wassers,}$$

und das specifische Gewicht desselben:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}}.$$

Um den Auftrieb oder Gewichtsverlust zu ermitteln, bedient man sich, wie zur Bestimmung des Gewichtes $G$, einer gewöhnlichen Wage, nur befindet sich unten an der einen Schale dieser Wage noch ein Häkchen, um den Körper mittels eines Haares, Drahtes oder anderen feinen Fadens daran anzuhängen, bevor er in das Wasser, welches in einem untergesetzten Gefäße enthalten ist, eingetaucht wird. Gewöhnlich nennt man eine zu diesem Abwägen unter Wasser eingerichtete Wage eine hydrostatische Wage (franz. balance hydrostatique; engl. hydrostatic balance).

Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht man ermitteln will, weniger dicht als Wasser, so kann man ihn mit einem anderen schweren Körper

Digitized by Google

mechaniſch verbinden, damit die Verbindung im Waſſer noch ein Beſtreben zum Sinken behält. Verliert dieſer ſchwere Körper im Waſſer das Gewicht $P_2$ und die Verbindung $P_1$, ſo iſt der Gewichtsverluſt des leichteren Körpers:

$$P = P_1 - P_2,$$

bezeichnet nun wieder $G$ das Gewicht des leichteren Körpers, ſo hat man deſſen ſpecifiſches Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

Kennt man das ſpecifiſche Gewicht $\varepsilon$ einer mechaniſchen Verbindung oder Zuſammenſetzung zweier Körper, und ſind auch die ſpecifiſchen Gewichte $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ der Beſtandtheile derſelben bekannt, ſo laſſen ſich nun nach dem ſogenannten Archimediſchen Principe auch aus dem Gewichte des Ganzen die Gewichte $G_1$ und $G_2$ der Beſtandtheile berechnen.

Jedenfalls iſt $G_1 + G_2 = G$ und auch

$$\text{Volumen } \frac{G_1}{\varepsilon_1 \gamma} + \text{Volumen } \frac{G_2}{\varepsilon_2 \gamma} = \text{Volumen } \frac{G}{\varepsilon \gamma},$$

alſo:

$$\frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} = \frac{G}{\varepsilon}.$$

Durch Vereinigung beider Gleichungen ergiebt ſich nun:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ oder}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Beiſpiele. 1) Wenn ein 310 Gramm ſchweres Stück Kalkſtein unter dem Waſſer um 121,5 Gramm leichter wird, ſo iſt das ſpecifiſche Gewicht dieſes Körpers:

$$\varepsilon = \frac{310}{121{,}5} = 2{,}55.$$

2) Um das ſpecifiſche Gewicht eines Stückes Eichenholz zu finden, hat man es mit einem Bleidrahte, welcher beim Abwägen im Waſſer 10,5 Gramm an Gewicht verlor, umbunden. Wenn nun das Holzſtück ſelbſt 426,5 Gramm wog, und die Verbindung unter Waſſer 484,5 Gramm leichter war als in der Luft, ſo ergiebt ſich das ſpecifiſche Gewicht der Holzmaſſe:

$$\varepsilon = \frac{426{,}5}{484{,}5 - 10{,}5} = \frac{426{,}5}{474} = 0{,}9.$$

3) Ein vollkommen mit Queckſilber angefülltes und vollkommen geſchloſſenes eiſernes Gefäß hatte ein Bruttogewicht von 500 Pfund und verlor beim Abwägen unter Waſſer 40 Pfund an Gewicht; wenn nun das ſpecifiſche Gewicht des Gußeiſens = 7,2 und das des Queckſilbers 13,6 iſt, ſo ergiebt ſich das Gewicht des leeren Gefäßes:



Digitized by Google

$$G_1 = 500\left(\frac{40}{500} - \frac{1}{13{,}6}\right) : \left(\frac{1}{7{,}2} - \frac{1}{13{,}6}\right) = 500(0{,}08 - 0{,}07353) : (0{,}1388 - 0{,}0735)$$
$$= \frac{500\,.\,0{,}00647}{0{,}0653} = \frac{3235}{65{,}3} = 49{,}5 \text{ Pfund},$$

und das Gewicht des eingeschlossenen Queckſilbers:

$$G_2 = 500\,.\,(0{,}08 - 0{,}1388) : (0{,}07353 - 0{,}1388) = \frac{500\,.\,0{,}0588}{0{,}0653} = \frac{2940}{6{,}53}$$
$$= 450{,}2 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 1. Zur Ausmittelung der ſpecifiſchen Gewichte von Flüſſigkeiten, lockeren Maſſen u. ſ. w. reicht auch das bloße Abwägen in freier Luft aus, weil man dieſen Körpern durch Einfüllen in Gefäße jedes beliebige Volumen ertheilen kann. Wiegt eine leere Flaſche $= G$, wiegt ferner dieſelbe mit Waſſer angefüllt $= G_1$ und hat dieſelbe das Gewicht $G_2$, wenn ſie eine andere Maſſe enthält, ſo hat man das ſpecifiſche Gewicht dieſer Maſſe:

$$\varepsilon = \frac{G_2 - G}{G_1 - G}.$$

Um z. B. das ſpecifiſche Gewicht von Roggen (in Maſſe) zu finden, wurde ein Fläſchchen mit Roggenkörnern angefüllt, und nach ſtarkem Schütteln gewogen. Nach Abzug des Gewichtes der leeren Flaſche ergab ſich das Gewicht dieſer Roggenmaſſe, $= 120{,}75$ Gramm, und das Gewicht einer gleichen Waſſermenge, $= 155{,}65$; es folgt demnach das ſpecifiſche Gewicht der Roggenmaſſe

$$= \frac{120{,}75}{155{,}65} = 0{,}776,$$

und es wiegt ſonach 1 Cubikfuß dieſes Getreides

$$= 0{,}776\,.\,66 = 51{,}22 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 2. Das ſchon von Archimedes aufgelöſte Problem, aus dem ſpecifiſchen Gewichte einer Zuſammenſetzung und aus den ſpecifiſchen Gewichten der Beſtandtheile das Verhältniß der Beſtandtheile zu finden, geſtattet nur eine beſchränkte Anwendung auf chemiſche Verbindungen, Metalllegirungen u. ſ. w., weil bei ſolchen meiſt eine Contraction, zuweilen aber auch eine Ausdehnung der Maſſen ſtattfindet, ſo daß das Volumen der Verbindung nicht mehr gleich iſt der Summe der Volumina der Beſtandtheile.

§. 373 **Aräometer.** Zur Beſtimmung der Dichtigkeit von Flüſſigkeiten werden vorzüglich auch die Aräometer, Senkwagen (franz. aréomètres; engl. areometers, hydrometers) gebraucht. Dieſe Inſtrumente ſind hohle, in Beziehung auf eine Axe ſymmetriſch geformte Körper mit ſehr tief liegendem Schwerpunkte, und geben, indem ſie in einer Flüſſigkeit aufrecht ſchwimmen, die Dichtigkeit dieſer Flüſſigkeit an. Man fertigt ſie aus Glas, Meſſingblech u. ſ. w. an und nennt ſie nach ihrem verſchiedenen Gebrauche, hydroſtatiſche Senkwagen, Soolwagen, Bierwagen, Branntweinwagen, Alkoholometer u. ſ. w. Es giebt zwei Arten von Senkwagen, nämlich Gewichtsaräometer (franz. ar. à poids constant; engl. hyd. with weights) und Scalenaräometer (franz. ar. à volume constant; engl. graduated hyd.). Die erſteren werden auch oft zur Beſtimmung der Gewichte, und namentlich der ſpecifiſchen Gewichte von feſten Körpern in Anwendung gebracht.

Digitized by Google

1) Iſt $V$ das Volumen des unter Waſſer befindlichen Theiles einer bis zu einer gewiſſen Marke $O$ eingetauchten, übrigens ſchwimmenden Senkwage $ABC$, Fig. 632, $G$ das Gewicht der ganzen Wage, $P$ das auf den Teller $A$ aufgelegte Gewicht beim Schwimmen im Waſſer, deſſen Dichtigkeit $= \gamma$ ſein möge, und $P_1$ das eben daſelbſt aufzulegende Gewicht beim Schwimmen in einer anderen Flüſſigkeit von der Dichtigkeit $\gamma_1$, ſo hat man:

$$V\gamma = P + G \text{ und}$$
$$V\gamma_1 = P_1 + G,$$

daher das Verhältniß der Dichtigkeiten oder ſpecifiſchen Gewichte dieſer Flüſſigkeiten:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{P_1 + G}{P + G}.$$

Fig. 632.

Fig. 633.

Fig. 634.

2) Iſt $P$ das Gewicht, welches auf den Teller gelegt werden muß, um die im Waſſer ſchwimmende Senkwage $ABC$, Fig. 633, bis zu einer Marke $O$ einzuſenken, und iſt $P_1$ das Gewicht, welches man mit dem abzuwägenden Körper gleichzeitig auf $A$ zu legen hat, um dieſelbe Einſenkung zu erhalten, ſo hat man das Gewicht dieſes Körpers einfach:

$$G_1 = P - P_1.$$

Iſt aber die Auflage $P_1$ um $P_2$ zu vergrößern, wenn der abzuwägende Körper in das unter Waſſer befindliche Schälchen $C$ gelegt wird, um die Senkungstiefe unverändert zu behalten, ſo beträgt der Auftrieb $= P_2$, und daher das ſpecifiſche Gewicht des Körpers:

$$\varepsilon = \frac{G_1}{P_2} = \frac{P - P_1}{P_2}.$$

Die Senkwagen mit unten angehängten Schälchen zur Beſtimmung ſpecifiſcher Gewichte von feſten Körpern, wie z. B. von Mineralien, heißen Nicholſon'ſche Senkwagen.

3) Setzen wir das Gewicht einer Senkwage $BC$, mit Scala $AB$, Fig. 634, $= G$, und das eingetauchte Volumen, wenn dieſe Wage im Waſſer ſchwimmt, $= V$, ſo iſt $G = V\gamma$. Steigt dieſe Wage um die Tiefe $OX = x$ empor, wenn dieſelbe in eine ſchwerere Flüſſigkeit einge-

Digitized by Google

taucht wird, so ist bei dem Querschnitte $F$ des Stäbchens das noch eingetauchte Volumen

$$= V - Fx, \text{ und daher } G = (V - Fx)\gamma_1.$$

Beide Formeln, durch einander dividirt, geben nun die Dichtigkeit der Flüssigkeit:

$$\gamma_1 = \frac{V}{V - Fx} \cdot \gamma = \gamma : \left(1 - \frac{F}{V}x\right) = \frac{\gamma}{1 - \mu x},$$

wenn der constante Quotient $\frac{F}{V}$ durch $\mu$ bezeichnet wird.

Ist die Flüssigkeit, worin man das Aräometer eintaucht, leichter als Wasser, so sinkt dasselbe in ihr um die Tiefe $x$, weshalb dann

$$G = (V + Fx)\gamma \text{ und daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 + \mu x} \text{ zu setzen ist.}$$

Um den Coefficienten $\mu = \frac{F}{V}$ zu finden, wird die Wage durch ein Gewicht $P$, etwa durch oben (bei $A$) eingegossenes und den tiefsten Punkt derselben einnehmendes Quecksilber so weit beschwert, daß sie, im Wasser schwimmend, um eine bedeutende Länge des zum Anbringen einer Scala dienenden Halses tiefer einsinkt. Setzt man nun $P = Fl\gamma$, wobei $l$ die durch $P$ bewirkte Senkung bedeutet, so erhält man:

$$\mu = \frac{F}{V} = \frac{P}{Vl\gamma} = \frac{P}{Gl}.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem 65 Gramm schweren Gewichtsaräometer vom Teller 13,5 Gramm wegzunehmen sind, damit es beim Schwimmen in Alkohol ebenso tief einsinkt als beim Schwimmen im Wasser, so ist das specifische Gewicht dieses Alkohols

$$= \frac{65 - 13\,5}{65} = 1 - 0{,}208 = 0{,}792.$$

2) Bei einer Nicholson'schen Wage ist das Normalgewicht 100 Gramm, d. h. man hat 100 Gramm aufzulegen, um das Instrument bis 0 einzusenken; hiervon mußten aber 66,5 Gramm weggenommen werden, als man ein abzuwägendes Stück Messing mit auf den oberen Teller gelegt hatte, und es waren wieder 7,85 Gramm zuzulegen, als dieser Körper in dem unteren Teller lag. Deshalb ist das absolute Gewicht dieses Messingstückes = 66,5 Gramm, und das specifische Gewicht desselben

$$= \frac{66{,}5}{7{,}85} = 8{,}47.$$

3) Ein 75 Gramm schweres Scalenaräometer steigt, nachdem man seine Füllung um 31 Gramm vermindert hat, um $l = 6$ Zoll $= 72$ Linien, und hat daher den Coefficienten:

$$\mu = \frac{31}{75 \,.\, 72} = 0{,}00574.$$

Digitized by Google

Nach Ergänzung der Füllung und Wiederherstellung des Gewichtes von 75 Gramm stieg es, in einer Salzsoole schwimmend, um 29 Linien, daher ist das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit

$$= 1 : (1 - 0{,}00574 \,.\, 29) = 1 : 0{,}833 = 1{,}2.$$

Anmerkung. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört in die Physik, Chemie und Technologie.

**Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten.** Befinden sich §. 374
mehrere Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten in einem Gefäße zugleich, ohne daß sie eine chemische Einwirkung auf einander ausüben, so legen sich dieselben in Folge der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theile nach ihren specifischen Gewichten über einander, nämlich die dichteste unten, die weniger dichte darüber und die leichteste oben. Auch sind im Gleichgewichtszustande die Begrenzungsflächen, sowie die freie Oberfläche horizontal; denn so lange die Begrenzungsfläche $EF$ zwischen den Massen $M$ und $N$, Fig. 635, geneigt ist, so lange stehen auch über einer Horizontalschicht $HR$ verschieden schwere Flüssigkeitssäulen wie $GK$, $G_1K_1$ u. s. w.; es kann daher auch der Druck in dieser Schicht nicht überall derselbe sein und folglich auch kein Gleichgewichtszustand eintreten.

Fig. 635.

In communicirenden Röhren $AB$ und $CD$, Fig. 636, ordnen sich die Flüssigkeiten zwar ebenfalls nach ihren Dichtigkeiten über einander, allein ihre Oberflächen $AO$ und $DG$ liegen nicht in einem und demselben Niveau.

Fig. 636.

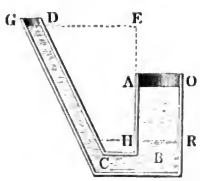
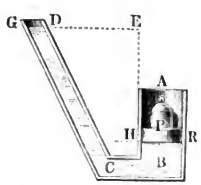



Fig. 637.




Ist $F$ der Inhalt des Querschnittes $HR$ eines Kolbens, Fig. 637, in dem einen Schenkel $AB$ von zwei communicirenden Röhren, und $h$ die Druckhöhe, oder die Höhe $EH$ des Wasserspiegels in der zweiten Röhre $CD$ über $HR$, so hat man den Druck gegen die Kolbenfläche:

$$P = Fh\gamma.$$

Ersetzt man dagegen die Kolbenkraft durch eine Flüssigkeitssäule $HAOR$, Fig. 636, von der Höhe $AH = h_1$ und der Dichtigkeit $\gamma_1$, so hat man:

$$P = Fh_1\gamma_1;$$

Digitized by Google

und es giebt nun das Gleichsetzen beider Ausdrücke die Gleichung:

$$h_1 \gamma_1 = h \gamma,$$

oder die Proportion:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Es verhalten sich also in communicirenden Röhren, beim Zustande des Gleichgewichtes unter zwei verschiedenen Flüssigkeiten, die Druckhöhen, oder die Höhen der Flüssigkeitssäulen, von der gemeinschaftlichen Berührungsebene aus gemessen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

Da das Quecksilber ungefähr 13,6 mal so schwer ist als Wasser, so hält hiernach in communicirenden Röhren eine Quecksilbersäule einer 13,6 mal so hohen Wassersäule das Gleichgewicht.

---

## Drittes Capitel.

## Von den Molekularwirkungen des Wassers.

§. 375 **Molekularkräfte.** Die Cohäsion des Wassers ist, obgleich sehr klein, jedoch nicht Null. Die Theile oder Moleküle (franz. molécules; engl. molecules) hängen aber nicht allein unter einander, sondern auch mit anderen Körpern, z. B. mit den Gefäßwänden, zusammen, so daß ebenfalls eine Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang, den man Adhäsion (franz. adhérence; engl. adhesion) des Wassers nennt, aufzuheben. Ein an einem festen Körper hängender Wassertropfen weist die Existenz der Cohäsion und Adhäsion des Wassers zugleich nach. Ohne die Cohäsion könnte das Wasser keinen Tropfen bilden, und ohne die Adhäsion könnte es an dem festen Körper nicht hängen bleiben; es wird hier die Schwerkraft nicht allein von der Cohäsion, sondern auch von der Adhäsion des Wassers überwunden. Die Wirkungen, welche aus der Vereinigung der Cohäsions- und Adhäsionskräfte hervorgehen, bezeichnet man zur Unterscheidung von den Wirkungen der Trägheit, der Schwerkraft u. s. w. mit dem Namen: die Molekularwirkungen. Die Capillarität oder das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahe stehenden Wänden ist ein vorzüglicher Fall der Molekularwirkung.

Digitized by Google

**Adhäsionsplatten.** Man hat die Cohäsion und Adhäsion des Wassers durch sogenannte Adhäsionsplatten zu bestimmen gesucht. Man hängt zu diesem Zwecke eine solche Platte statt einer Wagschale an das Ende eines Wagbalkens, bringt die Wage durch ein Tarirgewicht zum Einspielen, und nähert das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit der Platte allmälig, bis ihre ebene Grundfläche mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung kommt. Nun vergrößert man durch allmäliges Zulegen das Gewicht der Wagschale am anderen Ende des Wagbalkens, bis die Platte vom Wasserspiegel abgerissen wird. Die Ergebnisse solcher Versuche sind besonders davon abhängig, ob die Berührungsfläche der Platte von dem Wasser benetzt wird oder nicht. Im ersteren Falle bleibt stets nach der Berührung eine dünne Wasserschicht an der Platte hängen, man hat daher beim Abreißen derselben vom Wasser nicht die Adhäsion des Wassers an der Platte, sondern die Cohäsion des Wassers überwunden. Deshalb hängt auch die Kraft zum Abreißen verschiedener Platten vom Wasserspiegel gar nicht von der materiellen Beschaffenheit der Platten ab. Andere Flüssigkeiten als Wasser erfordern dagegen auch andere Kräfte an den Adhäsionsplatten. Du Buat fand, daß die Adhäsion zwischen dem Wasser und einem überzinnten Eisenbleche auf einen Quadratzoll, 65 bis 70 Gran beträgt. Dies giebt auf 1 Quadratmeter ungefähr eine Kraft von 5 Kilogramm, und auf 1 Quadratfuß eine Kraft von 1,05 Pfund. Hiervon nur wenig abweichende Werthe fand Achard für Scheiben aus Blei, Eisen, Kupfer, Messing, Zinn und Zink, ferner Gay-Lussac an einer Glasscheibe, und Huth an verschiedenen Holztafeln. §. 376

Wenn dagegen die Fläche der Scheibe von der Oberfläche des Wassers nicht benetzt wird, so stellen sich ganz andere Ergebnisse heraus, weil dann nicht die Cohäsion des Wassers an sich, sondern die Adhäsion desselben an der Platte überwunden wird. Es scheint, als wenn in diesem Falle die Zeit der Berührung einen großen Einfluß auf die Kraft zum Losreißen der Scheibe ausübe. Gay-Lussac fand z. B. für eine Glasplatte von 120 Millimeter Durchmesser, um sie von der Oberfläche des Quecksilbers loszureißen, 150 bis 300 Gramm Kraft nöthig, je nachdem die Zeit der Berührung eine kurze oder eine längere war.

Anmerkung. In Frankenheim's Lehre der Cohäsion werden die Cohäsionserscheinungen, wie sie z. B. das Abziehen benetzter Platten von der Oberfläche des Wassers darbietet, Synaphie, und dagegen die Adhäsionserscheinungen, wie sie z. B. bei der Trennung unbenetzter Platten von der Oberfläche einer Flüssigkeit vorkommen, Prosaphie genannt.

**Adhäsion an Seitenwänden.** Wenn ein Wassertropfen auf der Oberfläche eines anderen Körpers zerfließt, und daher diese benetzt, so ist die Adhäsion überwiegend, bleibt dagegegen der Wassertropfen in seiner kugeligen §. 377

Form auf der Fläche eines festen oder flüssigen Körpers liegen, ohne dieselbe zu benetzen, so herrscht die Cohäsion des Wassers vor.

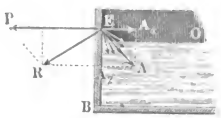
Ein Zusammenwirken beider Kräfte macht sich besonders an der Oberfläche einer Flüssigkeit in der Nähe der Gefäßwand bemerklich; es steigt daselbst das Wasser in die Höhe und bildet eine concave Oberfläche, wenn die Cohäsion des Wassers von der Adhäsion übertroffen und daher die Gefäßwand benetzt wird; es krümmt sich hingegen der Wasserspiegel in der Nähe der Gefäßwand abwärts und bildet daselbst eine convexe Fläche, wenn keine Benetzung eintritt und daher die Cohäsion überwiegend ist.

Diese Erscheinungen lassen sich sehr leicht auf folgende Weise erklären.

Ein Element $E$ in der Oberfläche $HR$ des Wassers (Fig. 638) wird von seiner Umgebung nach allen Richtungen abwärts gezogen, und es resultirt aus allen diesen Anziehungen eine einzige, vertical abwärts wirkende Kraft $A$. Hingegen ein Element $E$ an der verticalen Gefäßwand $BE$, Fig. 639,

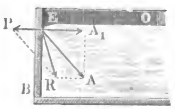
Fig. 638.

Fig. 639.




wird von dieser mit einer Horizontalkraft $P$ und von dem den Quadranten $BEO$ einnehmenden Wasser mit einer schräg abwärts wirkenden Mittelkraft $A$ angezogen, so daß zuletzt eine Mittelkraft $R$ resultirt, gegen deren Richtung sich (s. §. 354) der Wasserspiegel in $E$ rechtwinkelig stellt. Je nachdem nun die Anziehungskraft $P$ der Gefäßwand größer oder kleiner ist als der horizontale Component $A_1$ der mittleren Cohäsionskraft $A$ des Wassers, nimmt die Mittelkraft $R$ entweder eine Richtung von innen nach außen,

Fig. 640.



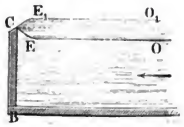

oder eine solche von außen nach innen an. Im ersteren Falle (Fig. 639) zieht sich der Wasserspiegel bei $E$ an der Wand in die Höhe, im zweiten Falle hingegen senkt sich, wie Fig. 640 vor Augen führt, der Wasserspiegel an der Gefäßwand $BE$ herab.

Diese Verhältnisse gestalten sich noch anders, wenn das Wasser bis an den Rand des Gefäßes reicht, weil hier die Anziehungskraft der Gefäßwand eine andere Richtung annimmt. Wenn z. B. der anfangs bis zum Rande $C$ des Gefäßes $BCO$ reichende Wasserspiegel $EO$, Fig. 641 durch langsamen Zufluß allmälig zum Steigen gebracht wird, so nimmt die Anziehungskraft $P$ eine immer mehr und mehr abwärts gehende Richtung an, wobei ihr horizontaler Component immer kleiner und kleiner und zuletzt

Digitized by Google

gar von dem horizontalen Componenten $A_1$ der Cohäsionskraft $A$ des Wassers übertroffen wird. In Folge dessen ändert sich natürlich auch die Gestalt des Wasserspiegels bei $E$ unaufhörlich, wobei die Concavität desselben allmälig in Convexität, und die Depression desselben unter dem Gefäßrande in eine Elevation übergeht, welche letztere eine gewisse Größe erreichen muß, bevor der Abfluß des Wassers über dem Gefäßrande erfolgt.

Fig. 641.




**Spannung des Wasserspiegels.** Da jedes der sämmtlichen Theilchen in der Oberfläche $HR$, Fig. 638, einer Flüssigkeit von der darunter befindlichen Masse mit einer Kraft $A$ abwärts gezogen wird, so läßt sich annehmen, daß dadurch an der ganzen Oberfläche eine Verdichtung und ein Zusammenhang der Flüssigkeitstheile unter einander entsteht, und daß daher eine gewisse Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang aufzuheben oder die Oberfläche der Flüssigkeit zu zerreißen. Dieses Zusammenhängen der Oberflächentheile einer Flüssigkeit macht sich nicht allein beim Eintauchen eines fremden Körpers in die Flüssigkeit bemerklich, sondern tritt überhaupt dann hervor, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit eine Krümmung annimmt, wie z. B. in der Nähe der Gefäßwand. Wenn man mit Young annimmt, daß die Spannung oder Cohäsion der Oberfläche einer Flüssigkeit an allen Stellen eine und dieselbe ist, so lassen sich daraus, wie der Herr Geheime Oberbaurath Hagen nachgewiesen hat, sämmtliche mit der Erfahrung im besten Einklange stehenden Gesetze nach der Capillarität ableiten. §. 378

Fig. 642.

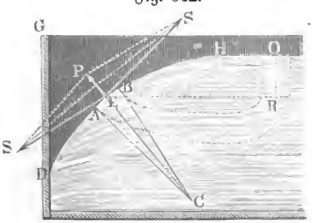
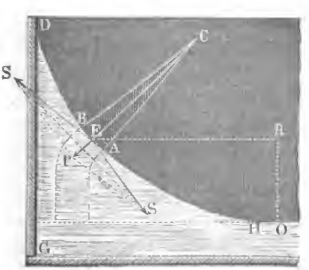



Fig. 643.

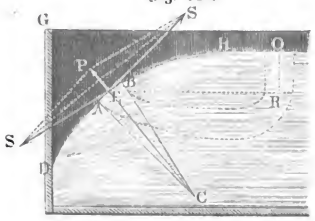



In der Nähe einer ebenen Wand $DG$, Fig. 642 und 643, bildet die Oberfläche einer Flüssigkeit eine entweder nach unten oder nach oben gebogene cylindrische Fläche $DAH$. Ist $P$ die Normalkraft auf ein Element $AEB = \sigma$ dieser Fläche, $S$ die Spannung dieses Elementes und $r$ der Krümmungshalbmesser

Digitized by Google

$CA = CB$ desselben, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $EPS$ und $ABC$:

Fig. 644.




$$\frac{P}{S} = \frac{AB}{CA} = \frac{\sigma}{r},$$

und daher die Normal- oder Biegungskraft:

$$P = \frac{\sigma}{r} S.$$

Steht nun das Flächenelement $AEB$ um die senkrechte Tiefe $OR = y$ unter oder über dem freien, von der Seitenwand $DG$ nicht afficirten Wasserspiegel, und bedeutet $\gamma$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so ist, nach dem (aus §. 356) bekannten hydrostatischen Gesetze, der Druck des Wassers auf das Element $\overline{AB} = \sigma$:

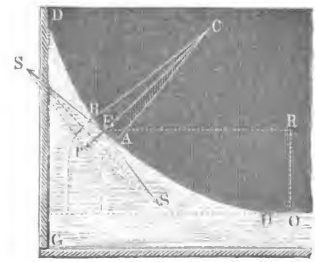
$$P = \sigma y \gamma,$$

und daher zu setzen:

$$\sigma y \gamma = \frac{\sigma}{r} S, \text{ und}$$

$$y = \frac{S}{r\gamma}.$$

Fig. 645.




Es ist also hiernach sowohl die Depression als auch die Elevation eines Elementes der Oberfläche einer Flüssigkeit in Rücksicht auf den freien oder unafficirten Theil dieser Fläche, dem Krümmungshalbmesser derselben umgekehrt proportional.

§. 379 In der Nähe einer gekrümmten Seitenwand, z. B. einer verticalen Cylinderfläche, bildet die Oberfläche des Wassers eine doppelt gekrümmte Fläche, und es wird hier die unter dem rectangulären Flächenelemente $FGHK$, Fig. 646, hängende Wassersäule von zwei Kräften $P_1$ und $P_2$ getragen, wovon die eine die Mittelkraft von den Spannungen $S_1$, $S_1$ in der zur Seite $FG = HK$ parallelen Normalebene $ABE$, und die andere die Mittelkraft der Spannungen $S_2$, $S_2$ in der zur Seite $GH = FK$ parallelen Normalebene $CDE$ ist. Jener Ebene entspricht der kleinste und dieser der größte Krümmungshalbmesser; setzen wir beide Halbmesser $= r_1$ und $r_2$, sowie die Seitenlänge $FG = \sigma_1$ und $GH = \sigma_2$, und beziehen wir die Spannung $S$ auf die Breite $=$ Eins, so haben wir die in beiden Ebenen wirkenden Spannungen:

Digitized by Google

$$S_1 = \sigma_2 S \text{ und } S_2 = \sigma_1 S$$

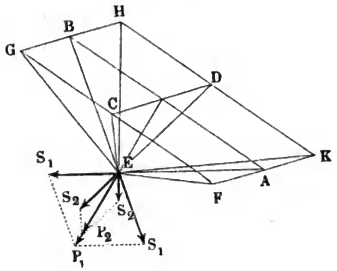
und die hieraus entspringenden Normalkräfte:

$$P_1 = \sigma_2 S \cdot \frac{\sigma_1}{r_1} = \frac{S \sigma_1 \sigma_2}{r_1} \text{ und}$$

$$P_2 = \sigma_1 S \cdot \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{S \sigma_1 \sigma_2}{r_2}, \text{ daher die Mittelkraft derselben:}$$

$$P = P_1 + P_2 = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Fig. 646.




Bezeichnet auch hier $y$ die Höhe des als ein Rechteck vom Inhalt $\sigma_1 \sigma_2$ anzusehenden Elementes $FGHK$ der Oberfläche über dem untersten oder allgemeinen Wasserspiegel, so haben wir die Kraft, mit welcher dieses Element von dem darüber oder darunter befindlichen Wasser normal auf- oder abwärts gezogen wird,

$$P = y \cdot \sigma_1 \sigma_2 \gamma,$$

und es folgt nun durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für $P$:

$$y \sigma_1 \sigma_2 \gamma = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \text{ daher:}$$

$$y = \frac{S}{\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Es ist also bei der cylindrischen Wand die Erhebung (Senkung) der Oberfläche des Wassers über (unter) dem allgemeinen Wasserspiegel an jeder Stelle der Summe von den umgekehrten Maximal- und Minimalkrümmungshalbmessern proportional. Diese Formel enthält auch die des vorigen Paragraphen in sich, denn wenn der Normalschnitt $CED$ gerade ist, so hat man:

$$r_2 = \infty, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{r_2} = 0 \text{ und}$$

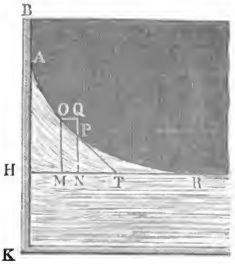
$$y = \frac{S}{\gamma} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

**Krumme Fläche des Wasserspiegels.** Die Curve, welche der (§. 380) verticale Durchschnitt des Wasserspiegels in der Nähe einer ebenen Wand

Digitized by Google

bildet, läßt ſich, nach Hagen, wie folgt, finden. Es ſei $AR$, Fig. 647, die Oberfläche des von der verticalen Wand $BK$ angezogenen Waſſers, $HR$ der allgemeine Waſſerſpiegel, ferner der Durchſchnitt $H$ beider Flächen der Coordinatenanfangspunkt. Man ſetze ferner die Coordinaten eines Punktes $O$ in der Oberfläche $AOR$, $HM = x$ und $MO = y$, ferner den Bogen $AO = s$ und den Tangentenwinkel $OTM = \alpha$, ſowie die Elemente $OQ$, $QP$ und $OP$, reſpect. $= \partial x$, $\partial y$ und $\partial s$.

Fig. 647.




Da $y = \frac{S}{r\gamma}$ und nach Artikel 33 der analytiſchen Hülfslehren,

$$r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}, \text{ ſowie } \partial y = -\partial s \sin.\alpha \text{ iſt, ſo hat man:}$$

$$y = -\frac{S\partial\alpha}{\gamma\partial s} = \frac{S \sin.\alpha . \partial\alpha}{\gamma\partial y}, \text{ oder:}$$

$$y\partial y = \frac{S}{\gamma} \sin.\alpha . \partial\alpha,$$

und es giebt nun die Integration:

$$^1/_2 y^2 = \frac{S}{\gamma}\int \sin.\alpha . \partial\alpha = Con. - \frac{S}{\gamma} \cos.\alpha.$$

Da für den Punkt $R$, $\alpha$ und $y$ zugleich Null ſind, iſt

$$0 = Con. - \frac{S}{\gamma} \cos.0, \text{ daher: } Con. = \frac{S}{\gamma} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{2S}{\gamma}(1 - \cos.\alpha) = \frac{4S}{\gamma}\frac{(1 - \cos.\alpha)}{2} = \frac{4S}{\gamma}(\sin.{}^1/_2\,\alpha)^2,$$

ſo daß:

$$y = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot \sin.{}^1/_2\,\alpha \text{ folgt.}$$

Für $\alpha^0 = 90^0$ hat man $\sin.{}^1/_2\,\alpha = \sin.45^0 = \sqrt{^1/_2}$; daher iſt die größte Erhebung der Oberfläche des Waſſers unmittelbar an der Seitenwand,

$$h = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot \sqrt{^1/_2} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}, \text{ alſo umgekehrt:}$$

$$\frac{S}{\gamma} = {}^1/_2\,h^2, \text{ und}$$

1) $y = h\sqrt{2} . \sin.{}^1/_2\,\alpha.$

Digitized by Google

Durch Differenziiren dieſes Ausdruckes bekommt man:

$$\partial y = {}^1/_2 h \sqrt{2}\, cos.\, {}^1/_2 \alpha \,.\, \partial \alpha = h \sqrt{{}^1/_2}\, cos.\, {}^1/_2 \alpha \,.\, \partial \alpha,$$

und da auch $\partial y = - \partial x \,.\, tang.\, \alpha$ iſt, ſo folgt:

$$\partial x = - h \sqrt{{}^1/_2} \cdot \frac{cos.\, {}^1/_2 \alpha}{tang.\, \alpha} \cdot \partial \alpha = - h \sqrt{{}^1/_2} \cdot \frac{cos.\, {}^1/_2 \alpha\, cos.\, \alpha}{sin.\, \alpha} \cdot \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{{}^1/_2} \cdot \frac{cos.\, {}^1/_2 \alpha\, [(cos.\, {}^1/_2 \alpha)^2 - (sin.\, {}^1/_2 \alpha)^2]}{2\, sin.\, {}^1/_2 \alpha \,.\, cos.\, {}^1/_2 \alpha} \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{{}^1/_2} \cdot \frac{1 - 2\, (sin.\, {}^1/_2 \alpha)^2}{2\, sin.\, {}^1/_2 \alpha} \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{{}^1/_2} \cdot \left( \frac{{}^1/_2}{sin.\, {}^1/_2 \alpha} - sin.\, {}^1/_2 \alpha \right) \partial \alpha.$$

Nun iſt aber

$$\int sin.\, {}^1/_2 \alpha \,.\, \partial \alpha = - 2\, cos.\, {}^1/_2 \alpha \text{ und}$$

$$\int \frac{\partial \alpha}{sin.\, {}^1/_2 \alpha} = 2\, Log.\, nat.\, tang.\, {}^1/_4 \alpha$$

(ſ. analyt. Hülfslehren Art. 26);

daher hat man:

$$x = - h \sqrt{{}^1/_2}\, (Log.\, nat.\, tang.\, {}^1/_4 \alpha + 2\, cos.\, {}^1/_2 \alpha) + Con.$$

Da für $x = 0$, $\alpha^0 = 90^0$, $tang.\, {}^1/_4 \alpha = tang.\, 22\,{}^1/_2{}^0 = \sqrt{2} - 1$ und $cos.\, {}^1/_2 \alpha = \sqrt{{}^1/_2}$ iſt, ſo folgt:

$$Con. = h \sqrt{{}^1/_2}\, [Log.\, nat.\, (\sqrt{2} - 1) + 2 \sqrt{{}^1/_2}], \text{ und}$$

$$2)\ x = h \sqrt{{}^1/_2} \left[ Log.\, nat. \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{tang.\, {}^1/_4 \alpha} \right) + 2\, (\sqrt{{}^1/_2} - cos.\, {}^1/_2 \alpha) \right]$$

$$= h\, [1 - \sqrt{2} \,.\, cos.\, {}^1/_2 \alpha - \sqrt{{}^1/_2}\, Log.\, nat.\, (\sqrt{2} + 1) tang.\, {}^1/_4 \alpha].$$

Für $\alpha = 0$ hat man:

$$cos.\, {}^1/_2 \alpha = 1 \text{ und } Log.\, nat.\, tang.\, {}^1/_4 \alpha = - \infty,$$

daher:

$$x = + \infty;$$

es iſt alſo $HR$ die Aſymptote, welcher ſich der Durchſchnitt $AOR$ der Oberfläche des Waſſers ohne Ende nähert.

Anmerkung. Wenn man die Formel (1) umkehrt, alſo

$$sin.\, {}^1/_2 \alpha = \frac{y}{h} \sqrt{{}^1/_2}$$

ſetzt, ſo kann man für jeden beliebigen Werth von $y$, erſt $\alpha$ und hieraus wieder mittelſt (2) den entſprechenden Werth von $x$ berechnen.

Die Meſſungen, welche Hagen hierüber angeſtellt hat, weiſen eine ſehr

Digitized by Google

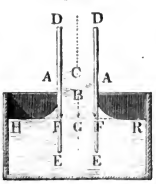
gute Uebereinstimmung dieser Theorie mit der Erfahrung nach. Dieselben sind mittelst einer matt geschliffenen Messingtafel an Brunnenwasser angestellt worden, und haben auf folgende Ergebnisse geführt:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ in Lin., gemessen | 1,37 | 0,70 | 0,49 | 0,34 | 0,24 | 0,18 | 0,12 | 0,07 | 0,04 | 0,016 |
| $x$ „ gemessen | 0,00 | 0,31 | 0,63 | 0,94 | 1,26 | 1,57 | 1,88 | 2,50 | 3,13 | 3,74 |
| $x$ „ berechnet | 0,00 | 0,33 | 0,64 | 0,96 | 1,28 | 1,56 | 1,95 | 2,47 | 3,01 | 3,90 |

Diese Zahlenwerthe beziehen sich auf Pariser Linien. Aus $h = 1{,}37$ Linien berechnet sich $\frac{S}{\gamma} = 0{,}94$ und der kleinste Krümmungshalbmesser $r = 0{,}68$ Linien. Tafel von Byrbaum, Thonschiefer und Glas gaben dieselben Resultate.

§. 381 **Paralleltafeln.** Zwischen zwei sehr nahe gestellten Tafeln, $DE$, $DE$, Fig. 648, erhebt sich das Wasser nicht allein an den Rändern, sondern auch in der Mitte, und es bildet die Oberfläche desselben nahe den halben Mantel eines elliptischen Cylinders. Die eine Halbaxe des elliptischen Durchschnittes ist der halben Weite $CA = a$, und die andere Halbaxe $CB = b$, der Differenz $AF - BG = h_2 - h_1$ zwischen der größten und kleinsten Erhebung ($h_2$ und $h_1$) der elliptischen Oberfläche $ABA$ über dem allgemeinen Wasserspiegel gleich. Nach dem Ingenieur S. 171 ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse in $A$:

Fig. 648.




$$r_1 = \frac{b^2}{a} = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}, \text{ und der in } B\text{:}$$

$$r_2 = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{(h_2 - h_1)},$$

daher hat man nach §. 378 die Erhebung der Oberfläche des Wassers in $A$:

$$h_2 = \frac{S}{r_1 \gamma} = \frac{a S}{(h_2 - h_1)^2 \gamma}, \text{ und dagegen in } B\text{:}$$

$$h_1 = \frac{S}{r_2 \gamma} = \frac{(h_2 - h_1) S}{a^2 \gamma}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{h_2 - h_1}{a^2}\right),$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{1}{a^2}\right);$$

Digitized by Google

daher folgt:

$$1)\quad h_2 - h_1 = a\sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

$$2)\quad h_2 = \frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{S}{\gamma}\left(\frac{S}{\gamma} + a^2\right)^2},$$

$$3)\quad h_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

und endlich das Verhältniß:

$$n = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{a^2\gamma}{S} = a^2 : \frac{S}{\gamma}.$$

Iſt $a$ ſehr klein, ſo kann man

$$h_2 = h_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}$$

ſetzen, dann wächſt alſo die Erhebung der Oberfläche des Waſſers umgekehrt wie der Abſtand der Tafeln von einander.

Genauer iſt aber

$$h_2 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}\left(1 + {}^2/_3\,\frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} + {}^2/_3\,a, \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}\left(1 - {}^1/_3\cdot\frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} - {}^1/_3\,a.$$

Umgekehrt folgt hiernach:

$$\frac{S}{\gamma} = a\,h_1 + \frac{a^2}{3}.$$

Dieſe Formeln ſtimmen, wenn der Abſtand der Tafeln ſehr klein, namentlich $\frac{a}{h_1}$ noch nicht $1/2$ iſt, ſehr gut mit den Beobachtungen überein.

Hagen fand bei Verſuchen mit zwei parallelen Plantafeln in Brunnenwaſſer, im Mittel durch Beobachtungen:

$h_1 = 1{,}55$, $h_2 = 2{,}09$ und $h = 1{,}38$ Pariſer Linien,

und durch Rechnung:

$\frac{S}{\gamma} = 1{,}04$, $h_2 = 2{,}12$ und $h = 1{,}44$ Pariſer Linien.

Neuere Verſuche (ſ. Poggendorff's Annalen, Bd. 77) gaben für

$a = 0{,}360$; $0{,}5875$; $0{,}7575$ Linien,
$h_1 = 2{,}562$; $1{,}429$; $1{,}068$ „ und
$\frac{S}{\gamma} = 0{,}949$; $0{,}907$; $0{,}917$ „



Digitized by Google

alſo im Mittel:

$$\frac{S}{\gamma} = 0{,}9243 \text{ und } S = 0{,}01059 \text{ Gramme.}$$

(Vergl. den vorigen Paragraphen.)

§. 382 **Haarröhrchen.** Die Erhebung der Oberfläche des Waſſers in ſenkrechten engen Röhren, oder ſogenannten Haarröhrchen (franz. tubes capillaires; engl. capillary tubes) läßt ſich bei Zugrundelegung der Formel

$$y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

des §. 379 leicht finden, wenn man annimmt, daß die Oberfläche (der Meniscus) ein halbes Sphäroid $ABA$, Fig. 649, bilde, deſſen kreisförmige Baſis $AA$ mit dem Querſchnitte der Röhre zuſammenfällt. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, ſetzen wir alſo wieder die halbe Röhrenweite $CA = a$, und die Minimal- und Maximalerhebung $BG$ und $AF$ des Waſſers in der Röhre über dem allgemeinen Waſſerſpiegel $HR$, $= h_1$ und $h_2$, ſo haben wir für

Fig. 649.

$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, $r_1 = a$ und $r_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}$, und für

$h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, $r_1 = r_2 = \frac{a^2}{h_2 - h_1}$ zu ſetzen, weshalb nun

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2}\right) \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma} \cdot \frac{(h_2 - h_1)}{a^2} \text{ folgt.}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{2(h_2 - h_1)}{a^2}\right),$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a(h_2 - h_1)} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{2}{a^2}\right),$$

auch:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2 - h_1)^2 = a.$$

Iſt $a$ klein, ſo kann man auch

Digitized by Google

$$\frac{2}{a^2}(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2 - h_1)^2 = a$$

ſetzen, woraus dann

$$h_2 - h_1 = a$$

folgen würde. Nimmt man aber $h_2 - h_1 = a + \delta$ an, und ſetzt $(h_2 - h_1)^2 = a^2 + 2a\delta$, ſowie $(h_2 - h_1)^3 = a^3 + 3a^2\delta$, ſo erhält man:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(a^3 + 3a^2\delta) - \frac{1}{a}(a^2 + 2a\delta) = a,$$

oder:

$$\frac{\gamma}{S}a^3 + \left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)\cdot 3a^2\delta - 2\delta = 0,$$

und es folgt:

$$\delta = -\frac{\gamma a^3}{3\gamma a^2 + 4S}, \text{ oder annähernd, } \delta = -\frac{\gamma a^3}{4S}.$$

Hiernach iſt nun

$$h_2 - h_1 = a - \frac{\gamma a^3}{4S},$$

daher:

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{1}{a^2}\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right) = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} - \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right)^2}\right) = \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{4S}\right)^2\right],$$

$$= \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{2S}\right)\right] = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} + \frac{a}{2}.$$

Es wächſt alſo bei den Haarröhrchen die mittlere Erhebung umgekehrt wie die Röhrenweite.

Auch hat man zur Beſtimmung von $S$:

$$\frac{S}{\gamma} = {}^1/_2\, a h_1 + \frac{a^2}{4}.$$

Beobachtungen, welche Hagen mit Brunnenwaſſer an Haarröhrchen angeſtellt hat, gaben Folgendes:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Röhrenweite $a$, Linien . . . | 0,295 | 0,336 | 0,413 | 0,546 | 0,647 | 0,751 | 0,765 |
| Erhebung $h_1$, Linien . . . . | 10,08 | 8,50 | 6,87 | 5,17 | 4,28 | 3,72 | 3,59 |
| Spannungsmaß $\frac{S}{\gamma}$, Gramme | 1,508 | 1,455 | 1,458 | 1,478 | 1,473 | 1,512 | 1,494 |



Digitized by Google

Nach diesen Versuchen ist also im Mittel:

$$\frac{S}{\gamma} = 1{,}482 \text{ und } S = 0{,}0170 \text{ Gramme.}$$

Die Abweichungen dieser Werthe sollen ihren Grund darin haben, daß die Spannung $S$ der Oberfläche des Wassers mit der Zeit abnimmt, und bei dem gekochten Wasser viel kleiner ausfällt als bei dem frischen Wasser. Es ist also anzunehmen, daß die Spannung des Wassers in jedem Streifen von 1 Linie Breite, $S = 0{,}0106$ bis $0{,}0170$ Gramm beträgt.

§. 383. Die vorstehende Theorie findet auch in dem Falle ihre Anwendung, wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird; es findet hier keine Erhöhung, sondern eine Senkung der Oberfläche statt, und es ist die letztere auch nicht concav, sondern convex. Die aus dem Niveauabstande $BG$ entstehende und von unten nach oben wirkende Verticalkraft $P$ wird auch hier durch die Spannungen $S$ und $S$ der Oberfläche $ABA$, Fig. 650, der Flüssigkeit in der Röhre aufgehoben. Die Adhäsionskraft des festen Körpers kommt hierbei, der vorstehenden Theorie zu Folge, nicht weiter in Betracht.

Fig. 650.

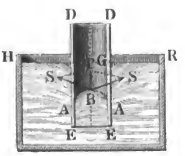
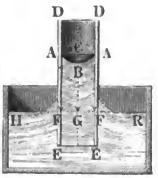



Fig. 651.




Setzt man die Kraft, mit welcher die Röhrenwand die Flüssigkeitssäule $BG$, Fig. 651, an sich zieht, dem Röhrenumfange proportional, setzt also für eine cylindrische Röhre diese Kraft $P = \mu . 2\pi a$, wo $\mu$ einen Coefficienten ausdrückt, so hat man:

$$\pi a^2 h = 2\mu\pi a,$$

und daher die mittlere Erhebung des Wassers in der Röhre:

$$h = \frac{2\mu}{a}.$$

Für zwei parallele Tafeln ist dagegen $P = 2\mu l$ und $P = 2ahl\gamma$, wo $l$ die unbestimmte Länge der Wassersäule bezeichnet, und daher:

$$h = \frac{\mu}{a},$$

d. i. halb so groß wie bei der Röhre, wenn der Abstand $2a$ der Tafeln der

Digitized by Google

Röhrenweite gleich iſt. Dieſes ſtimmt auch mit den Reſultaten der letzten Paragraphen vollkommen.

Nach den Hagen'ſchen Verſuchen hängt die Feſtigkeit oder Spannung der Oberfläche einer Flüſſigkeit nicht von dem Grade ihrer Flüſſigkeit ab, iſt aber um ſo größer, je ſchwerer die Flüſſigkeit an anderen Körpern haftet. Nach Anderen, namentlich nach Brunner und Frankenheim (ſ. Poggendorff's Annalen, Bd. 70 und 72), nimmt aber die Steighöhe $h$ in den Haarröhren und folglich auch $S$ ab, wenn die Temperatur der Flüſſigkeit eine größere wird.

Für Alkohol iſt $S$ ungefähr die Hälfte und für Queckſilber das Achtfache von der Feſtigkeit der Oberfläche des Waſſers.

Anmerkung 1. Hagen findet durch Meſſung und Wägung von Flüſſigkeitstropfen, welche ſich von den Grundflächen kleiner Cylinder losreißen, ziemlich dieſelben Werthe wie durch die Beobachtungen an Capillartafeln. Ebenſo haben die Verſuche mit Adhäſionsplatten eine gute Uebereinſtimmung geliefert, unter der Vorausſetzung, daß der Kraft zum Losreißen einer Platte durch das Gewicht des gehobenen Flüſſigkeitscylinders und durch die Spannung in dem Mantel dieſes Cylinders das Gleichgewicht gehalten wird.

Anmerkung 2. Die Anzahl der Schriften über die Capillarität iſt zu groß, als daß hier eine vollſtändige Mittheilung derſelben erfolgen könnte. Es haben ſich mit dieſem Gegenſtande ſogar die größten Mathematiker, wie Laplace, Poiſſon, Gauß u. ſ. w. beſchäftigt. Eine vollſtändige Mittheilung der älteren Literatur findet man in Frankenheim's Lehre von der Cohäſion. Die Schrift, welche bei Bearbeitung dieſes Capitels vorzüglich benutzt wurde, iſt folgende: Ueber die Oberfläche der Flüſſigkeiten von Hagen, eine in der Königl. Akademie der Wiſſenſchaften geleſene Abhandlung, Berlin 1845. Eine neue phyſikaliſche Theorie der Capillarität von J. Mile enthält Bd. 45 von Poggendorff's Annalen (1838). Es gehören hierher auch Bentigny's Studien über die Körper im ſphäroidalen Zuſtande, deutſch von Arendt. Leipzig 1858.

Digitized by Google

## Viertes Capitel.

## Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

§. 384 **Spannkraft der Gase.** Die uns umgebende atmosphärische Luft, sowie auch alle übrigen Luftarten oder Gase (franz. gaz; engl. gas) besitzen, in Folge der Repulsivkraft ihrer Theile oder Moleküle, ein Bestreben, einen größeren und größeren Raum einzunehmen. Man erhält daher auch nur eine begrenzte Luftmasse durch Absperren oder Einschließen derselben in vollkommen verschlossenen Gefäßen. Die Kraft, mit welcher sich die Gase auszudehnen suchen, heißt ihre Elasticität, Spannkraft oder Expansivkraft (franz und engl. tension). Sie äußert sich durch einen Druck, welchen das Gas gegen die Wände des dasselbe einschließenden Gefäßes ausübt, und ist insofern von der Elasticität der festen oder tropfbar flüssigen Körper verschieden, als sie in jedem Zustande der Dichtigkeit sich wirksam zeigt, wogegen die Expansivkraft der letztgenannten Körper bei einem gewissen Zustande der Ausdehnung Null ist. Man mißt den Druck oder die Spannkraft der Luft und anderer Gase durch Barometer, Manometer und Ventile. Das Barometer (franz. baromètre; engl. barometer) wird vorzüglich angewendet, um den Druck der Atmosphäre zu bestimmen. Das gewöhnlichste oder sogenannte Gefäßbarometer, Fig. 652, besteht in einer, an einem Ende $A$ verschlossenen und am anderen Ende $B$ offenen Glasröhre, welche, nachdem sie mit Quecksilber gefüllt ist, umgestürzt und mit ihrem offenen Ende in ein ebenfalls Quecksilber enthaltendes Gefäß $CD$ eingetaucht wird. Nach dem Umkehren dieses Instrumentes bleibt in der Röhre eine Quecksilbersäule $BS$ zurück, welcher (s. §. 374) durch den Druck der Luft gegen die Oberfläche $HR$ des Quecksilbers das Gleichgewicht gehalten wird. Der über der Quecksilbersäule befindliche Raum $AS$ ist luftleer; es erleidet daher diese Säule von oben keinen Druck, weshalb denn auch die Höhe dieser Säule, oder vielmehr die Höhe des Quecksilbers in derselben über dem Quecksilberspiegel $HR$ im Gefäße als Maß des Luftdruckes dienen kann. Um diese Höhe bequem und scharf messen zu können, ist eine genau eingetheilte Scala angebracht, welche längs der Röhre hinläuft und nach Befinden noch mit einem verschiebbaren Zeiger $S$ versehen ist.

Fig. 652.

Digitized by Google

Anmerkung. Die ausführliche Beschreibung der verschiedenen Barometer, die Anleitung zum Gebrauche derselben u. s. w. gehört in die Physik. Siehe Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Müller, Bd. I.

**Atmosphärendruck.** Durch Barometer hat man gefunden, daß bei §. 385
einem mittleren Zustande der Atmosphäre und an wenig über dem Meere gelegenen Orten dem Luftdrucke durch eine ungefähr 76 Centimeter oder nahe 28 Pariser Zoll = 29 preuß. Zoll hohe Quecksilbersäule von 0 Grad Wärme das Gleichgewicht gehalten wird. Da das specifische Gewicht des Quecksilbers bei Null Grad Wärme 13,6 ist, so folgt, daß der Luftdruck auch gleich ist dem Gewichte einer $0{,}76 \,.\, 13{,}6 = 10{,}336$ Meter $= 31{,}73$ Pariser Fuß $= 32{,}84$ preuß. Fuß hohen Wassersäule.

Man mißt die Spannung der Luft auch oft durch den Druck, welchen dieselbe auf die Flächeneinheit ausübt. Da ein Cubikcentimeter Quecksilber 0,0136 Kilogramm wiegt, so ist der Atmosphärendruck oder das Gewicht einer 76 Centimeter hohen Quecksilbersäule bei 1 Quadratcentimeter Basis:

$$p = 0{,}0136 \,.\, 76 = 1{,}0336 \text{ Kilogramm.}$$

Nun ist aber ein Quadratzoll 6,841 Quadratcentimeter, daher mißt der mittlere Druck der Atmosphäre auch $= 1{,}0336 \,.\, 6{,}841 = 7{,}071$ Kilogramm $= 14{,}142$ Pfund auf einen Quadratzoll und $= 2036$ Pfund auf einen Quadratfuß.

Den mittleren Barometerstand genau 28 pariser Zoll = 29 preuß. Zoll angenommen, erhält man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratzoll 14,103 Pfund, und auf einen Quadratfuß 2030,8 Pfund

Es ist sehr gewöhnlich in der Mechanik, den mittleren Atmosphärendruck als Einheit anzunehmen, und andere Expansivkräfte auf diesen zu beziehen, und in Atmosphärendrücken, oder Atmosphären, wie man schlechtweg sagt, anzugeben. Hiernach entspricht dem Drucke von $n$ Atmosphären eine $28 \,.\, n$ Pariser Zoll hohe Quecksilbersäule oder ein Gewicht von $14{,}103$ $n$ preuß. Pfund auf jeden Quadratzoll; und umgekehrt, einer $h$ Zoll hohen Quecksilbersäule die Expansivkraft von $\frac{h}{28} = 0{,}03571\, h$ Atmosphären, und dem Drucke von $p$ Pfund auf den Quadratzoll die Spannung von $\frac{p}{14{,}103} = 0{,}07091\, p$ Atmosphären. Uebrigens giebt die Gleichung $\frac{h}{28} = \frac{p}{14{,}103}$ die Reductionsformeln:

$$h = 1{,}985\, p \text{ Zoll und } p = 0{,}5037\, h \text{ Pfund.}$$

Bei einer Spannung von $h$ Zoll $= p$ Pfund ist daher der Druck gegen eine ebene Fläche von $F$ Quadratzoll:

Digitized by Google

$$P = Fp = 0{,}5037\ Fh \text{ Pfund}$$
$$= Fh\gamma = 1{,}985\ Fp \text{ Zoll.}$$

Beispiele. 1) Wenn bei einer Wassersäulenmaschine das Wasser 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche steht, so ist der Druck gegen diese Fläche

$$= \frac{250}{32{,}84} = 7{,}6 \text{ Atmosphären.}$$

2) Wenn der Wind eines Cylindergebläses 1,2 Atmosphäre Spannung hat, so ist der Druck desselben auf jeden Quadratzoll

$$= 1{,}2 \,.\, 14{,}10 = 16{,}92 \text{ Pfund,}$$

und auf die Kolbenfläche von 50 Zoll Durchmesser,

$$= \frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \cdot 16{,}92 = 33222 \text{ Pfund.}$$

Da die Atmosphäre den Gegendruck $\frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \cdot 14{,}10 = 27685$ Pfund ausübt, so folgt die Kolbenkraft:

$$P = 33222 - 27685 = 5537 \text{ Pfund.}$$

§. 386 **Manometer.** Um die Spannung der in Gefäßen eingeschlossenen Gase oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Instrumente, welche man Manometer (franz. manomètres; engl. manometers) nennt, angewendet. Diese Instrumente werden mit Quecksilber oder mit Wasser angefüllt, und sind oben entweder offen oder verschlossen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume, Fig. 653, ist von dem gewöhnlichen Barometer nicht verschieden. Um mit Hülfe desselben die Spannung der Luft in einem Behälter messen zu können, wird eine Röhre $CE$ angebracht, die mit einem Ende $C$ in dem Behälter und mit dem anderen Ende $E$ über dem Quecksilberspiegel $HR$ im Gehäuse $HDR$ des Instrumentes ausmündet. Der Raum $HER$ über dem Quecksilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication gesetzt; es nimmt daher die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an, und drückt eine Quecksilbersäule $BS$ in die Röhre, welche sich mit dem zu messenden Luftdrucke ins Gleichgewicht setzt.

Fig. 653.

Das oben offene Hebermanometer $ABC$, Fig. 654, giebt den Ueberschuß der Spannung in einem Gefäße $MN$ über den Atmosphärendruck an, weil dieser Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über $S$ mit der Quecksilbersäule $RS$ das Gleichgewicht gehalten wird. Ist $b$ der Barometerstand und $h$ der Manometerstand oder der Höhen-

Digitized by Google

abstand $RS$ der Queckſilberſpiegel $H$ und $S$ in den beiden Schenkeln des Manometers, ſo hat man die durch die Höhe einer Queckſilberſäule gemeſſene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft:

$$b_1 = b + h,$$

oder durch den Druck auf den Quadratzoll gemeſſen:

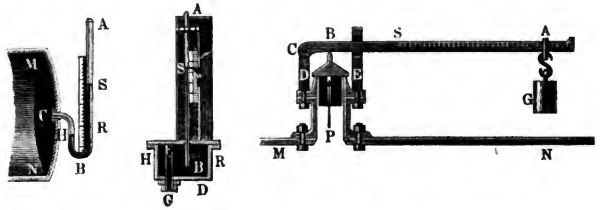
$$p = 0{,}5037\ (b + h)\ \text{Pfund},$$

oder, wenn $b$ der mittlere Barometerſtand iſt,

$$p = 14{,}10 + 0{,}5037\ h\ \text{Pfund}.$$

Gewöhnlicher als die Hebermanometer ſind die Gefäßmanometer, wie $ABCD$, Fig. 655. Da hier die Luft durch eine größere Queckſilber- oder nach Befinden Waſſermaſſe, auf die Flüſſigkeitsſäule wirkt, ſo werden die Schwingungen der Luft nicht ſo ſchnell auf die Flüſſigkeitsſäule übergetra-

Fig. 654. Fig. 655. Fig. 656.




gen, und es wird das Meſſen dieſer mehr in Ruhe befindlichen Säule erleichtert und ſicherer. Der Bequemlichkeit des Meſſens oder Ableſens an der Scala wegen bringt man oft noch einen Schwimmer an, welcher auf dem Queckſilber ſchwimmt und mittels eines über einer Rolle liegenden Fadens mit einem über der Scala wegleitenden Zeiger verbunden iſt.

Die Manometer laſſen ſich natürlich auch zum Meſſen des Druckes von Waſſer und waſſerförmigen Flüſſigkeiten anwenden; man nennt ſie aber dann Piezometer (franz. piézometres; engl. piezometers).

Mit Hülfe eines Ventils $DE$, Fig. 656, beſtimmt ſich ebenfalls, jedoch weniger ſcharf, die Expanſivkraft des in $MN$ abgeſchloſſenen Gaſes oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht $G$ ſo ſtellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält. Iſt $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des armirten Hebels von der Drehaxe $C$, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, und $Q$ das Gewicht des Hebels ſammt Ventil, ſo hat man das ſtatiſche Moment, mit welchem das Ventil durch die Gewichte zugedrückt wird,

$$= Ga + Qs;$$

iſt ferner der Gas- oder Dampfdruck von unten, $= P$, der Atmoſphärendruck

Digitized by Google

von oben, $= P_1$, und endlich der Hebelarm $CB$ des Ventils, $= b$, ſo hat man das ſtatiſche Moment, mit welchem ſich das Ventil zu heben ſucht,

$$= (P - P_1)\, b,$$

und es giebt nun das Gleichſetzen dieſer beiden Momente:

$$P b - P_1 b = G a + Q s, \text{ folglich:}$$

$$P - P_1 + \frac{G a + Q s}{b}.$$

Bezeichnet $r$ den Halbmeſſer des Ventils $DE$, $p$ die innere und $p_1$ die äußere Spannung, gemeſſen durch den Druck auf einen Quadratzoll, ſo hat man:

$$P = \pi r^2 p \text{ und } P_1 = \pi r^2 p_1, \text{ daher:}$$

$$p = p_1 + \frac{G a + Q s}{\pi r^2 b}.$$

Beiſpiele. 1) Wenn der Queckſilberſtand eines oben offenen Manometers, 3,5 Zoll, und der Barometerſtand 27 Zoll beträgt, ſo iſt die entſprechende Expanſivkraft:

$$h = b + h_1 = 27 + 3{,}5 = 30{,}5 \text{ Zoll, oder:}$$
$$p = 0{,}5037 \,.\, h = 0{,}5037 \,.\, 30{,}5 = 15{,}36 \text{ Pfund.}$$

2) Wenn der Waſſermanometerſtand 21 Zoll hoch iſt, ſo entſpricht demſelben bei dem Barometerſtande von 27 Zoll, die Expanſivkraft:

$$h = 27 + \frac{21}{13{,}6} = 28{,}54 \text{ Zoll} = 15{,}38 \text{ Pfund.}$$

3) Wenn das ſtatiſche Moment eines unbelaſteten Sicherheitsventils 10 Zollpfund, das ſtatiſche Moment des 10 Pfund ſchweren Laufgewichtes, $= 15 \,.\, 10 = 150$ Zollpfund, der Hebelarm des Ventils, von Ventil- bis Drehare gemeſſen, $b = 4$ Zoll und der Halbmeſſer des Ventils, $r = 1{,}5$ Zoll beträgt, ſo iſt die Differenz der Drücke auf beide Ventilflächen:

$$p - p_1 = \frac{150 + 10}{\pi\,(1{,}5)^2 \,.\, 4} = \frac{160}{9\,\pi} = 5{,}66 \text{ Pfund.}$$

Wäre der Atmoſphärendruck $p_1 = 14$ Pfund, ſo fiele hiernach die Spannung der Luft unter dem Ventile:

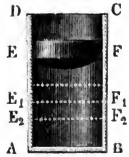
$$p = 19{,}66 \text{ Pfund aus.}$$

§. 387 **Mariotte'ſches Geſetz.** Die Spannung der Gaſe wächſt mit der Verdichtung derſelben; je mehr man ein gewiſſes Luftquantum zuſammendrückt oder verdichtet, deſto größer wird auch deſſen Spannkraft, und je mehr man daſſelbe ſich ausdehnen oder verdünnen läßt, deſto kleiner zeigt ſich auch ſeine Expanſivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gaſe zu einander ſtehen, wird durch das von Mariotte (oder Boyle) entdeckte und nach ihm benannte Geſetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derſelben Luftmenge der Spannkraft derſelben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derſelben Maſſe eingenommen werden, den Dichtigkeiten umge-

Digitized by Google

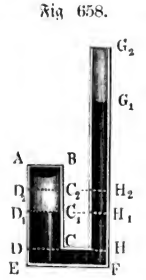
kehrt proportional sind, daß sich die Volumina einer und derselben Gasmasse umgekehrt wie deren Expansivkräfte verhalten. Wird demnach eine gewisse Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt, ihre Dichtigkeit also verdoppelt, so stellt sich auch ihre Spannung noch einmal so groß heraus als anfänglich, und wird dagegen ein gewisses Luftquantum bis auf das Dreifache seines anfänglichen Raumes ausgedehnt, also seine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, so bleibt auch die Elasticität desselben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Ist z. B. unter dem Kolben $EF$ eines Cylinders $AC$, Fig. 657, gewöhnliche atmosphärische Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 14 Pfd. drückt, so wird dieselbe mit 28 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach $E_1F_1$ geschoben und dadurch die eingeschlossene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt hat, und es wird diese Kraft $3 . 14 = 42$ Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2F_2$ gekommen ist und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Ist der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratfuß, so beträgt der Atmosphärendruck gegen dieselbe $= 144 . 14 = 2016$ Pfund; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, sind nach und nach 2016 Pfund, und um ihn um zwei Drittel dieser Höhe niederzuschieben, sind allmälig $2 . 2016 = 4032$ Pfund auf denselben aufzusetzen u. s. w.

Fig 657.




Ebenso läßt sich durch Zugießen von Quecksilber in die mit dem Luftcylinder $AC$, Fig. 658, communicirende Röhre $G_2H$ das Mariotte'sche Gesetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Quecksilbermasse $DEFH$ eine Luftsäule $AC$ abgesperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft besitzt, und später durch zugegossenes Quecksilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. s. w. des anfänglichen Volumens zusammengedrückt, so wird man finden, daß die Niveauabstände $G_1H_1$, $G_2H_2$ u. s. w. der Oberflächen des Quecksilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe $b$ u. s. w. gleich sind, daß also, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entsprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. s. w. so groß ist als beim anfänglichen Volumen.

Fig 658.

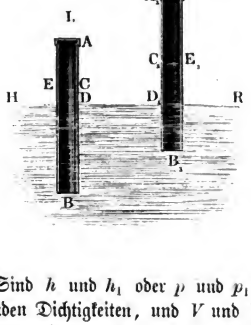



Sehr leicht läßt sich auch die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes auf der Seite der Ausdehnung der Luft nachweisen, wenn man eine cylindrische (gut calibrirte) Röhre $AB$, Fig. 659 (a. f. S.), senkrecht in das Quecksilber (Wasser) taucht und, nach gehörigem Verschlusse des oberen Endes $A$, das abgeschlossene Luftvolumen $AE$ (I.) durch behutsames Aufziehen

Digitized by Google

dieser Röhre ausdehnt, so daß es nun ein Volumen $A_1 E_1$ (II.) annimmt. Die Dichtigkeiten der Luft in diesen Räumen $AE$ und $A_1 E_1$ sind jedenfalls

Fig. 659.




den Höhen $AC$ und $A_1 C_1$ derselben umgekehrt, und ihre Spannungen den Differenzen zwischen dem Barometerstande $b$ und den Höhen $CD$ und $C_1 D_1$ der über der Oberfläche $HR$ des Queckſilbers ſtehenden Queckſilberſäulen $DE$ und $D_1 E_1$ direct proportional; es iſt folglich nach dem Mariotte'ſchen Geſetze:

$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{b - C_1 D_1}{b - CD},$$

was auch durch die Beobachtung bei jeder beliebigen Eintauchung der Röhre $AB$ beſtätigt wird.

Sind $h$ und $h_1$ oder $p$ und $p_1$ die Spannkräfte, $\gamma$ und $\gamma_1$ die entſprechenden Dichtigkeiten, und $V$ und $V_1$ die zugehörigen Volumina einer und derſelben Luftmenge, ſo hat man nach dem angegebenen Geſetze:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1};$$ oder $V_1 \gamma_1 = V\gamma$, ſowie $V_1 p_1 = Vp$; daher

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{h}\gamma = \frac{p_1}{p}\gamma \text{ ſowie } V_1 = \frac{h}{h_1} V = \frac{p}{p_1} V.$$

Hiernach läßt ſich die Dichtigkeit und auch das Volumen der Luft von einer Spannung auf die andere reduciren.

Anmerkung. Nur bei ſehr großen Preſſungen der Luft kommen bemerkbare Abweichungen von dem Mariotte'ſchen Geſetze vor. Nach Regnault iſt z. B. für atmoſphäriſche Luft, wenn das Luftvolumen $V_0$ von 1 Meter Preſſung in $V_1$ übergeht, die Preſſung deſſelben

$$p = \frac{V_0}{V}\left[1 - 0{,}0011054\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + 0{,}000019381\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2\right] \text{ Meter},$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ſo daß für $\frac{V_0}{V} =$ | 5 | 10 | 15 | 20 |
| $p =$ | 4,97944 | 9,91622 | 14,82484 | 19,71988 Met. ausfällt. |

Beiſpiele. 1) Wenn bei einer Gebläſemaſchine der Manometerſtand 3 Zoll mißt, während der Barometerſtand 28 Zoll beträgt, ſo iſt die Dichtigkeit des Windes $= \frac{28+3}{28} = \frac{31}{28} = 1{,}107$ mal ſo groß, als die der äußeren Luft.

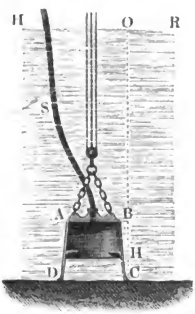
2) Wenn ein Cubikfuß atmoſphäriſche Luft bei 28 Zoll Barometerſtand $\frac{61{,}74}{770}$ Pfund wiegt, ſo hat er bei 34 Zoll Barometerſtand ein Gewicht von:

Digitized by Google

$$\frac{61{,}74}{770} \cdot \frac{34}{28} = \frac{2099}{21560} = 0{,}09736 \text{ Pfund.}$$

3) Wie tief kann eine Taucherglocke (franz. cloche à plongeur; engl. diving-bell) $ABCD$, Fig. 660, unter das Wasser $HRD$ getaucht werden, damit das Wasser nur bis zu einer gewissen Höhe $CH = y$ in dieselbe eindringe? Anfänglich steht die Glocke mit ihrer Mündung $CD$ über dem Wasserspiegel $HR$, wobei ihr ganzer Raum $V$ mit atmosphärischer Luft angefüllt ist, deren Wasserbarometerstand $= b$ sein möge. Sinkt nachher die Glocke um die Tiefe $OC = x$, und dringt hierbei ein Wasservolumen $W$ in die Glocke, so geht, wenn keine Luft durch den Schlauch $S$ zugedrückt wird, das Volumen der abgeschlossenen Luft in $V - W$ und der Barometerstand derselben in $b + x - y$ über, und es ist folglich:

Fig. 660.




$$\frac{b + x - y}{b} = \frac{V}{V - W},$$

woraus sich nun ergiebt:

$$x = y - b + \frac{Vb}{V - W} = y + \frac{Wb}{V - W}.$$

Ist der mittlere Querschnitt des unteren Theiles der Glocke, $= F$, so läßt sich noch $W = Fy$ und daher

$$x = y\left(1 + \frac{Fb}{V - Fy}\right) \text{ setzen.}$$

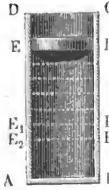
Für den Wasserbarometerstand $b = 30$ Fuß ist bei dem Volumen der Glocke, $V = 100$ Cubikfuß, dem mittleren Querschnitte ihrer unteren Hälfte, $F = 20$ Quadratfuß, und der zulässigen Höhe des Wassers in derselben, $y = 3$ Fuß, das Volumen des letzteren: $W = Fy = 20.3 = 60$ Cubikfuß, folglich das der abgesperrten Luft: $V - W = 40$ Cubikfuß, ferner die Dichtigkeit der letzteren $= \frac{100}{40} = 2\frac{1}{2}$ mal so groß als die der äußeren Luft, und die entsprechende Tiefe der Eintauchung:

$$x = 3 + \frac{60.30}{40} = 3 + 45 = 48 \text{ Fuß.}$$

**Arbeit der comprimirten Luft.** Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um ein gewisses Luftquantum bis zu einem gewissen Grade zu verdichten, sowie auch die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, läßt sich nicht sogleich angeben, weil die Expansivkraft in jedem Momente des Verdichtens oder Ausdehnens eine andere ist, wir müssen uns daher nach einer besonderen Formel zur Berechnung dieses Werthes umsehen. Denken wir uns in einem Cylinder $AC$, Fig. 661 (a. f. S.), durch einen Kolben $EF$ eine gewisse Luftmasse $AF$ abgesperrt, und untersuchen wir, welche Arbeit erfordert wird, um den Kolben um einen gewissen Weg $EE_1 = FF_1$ fortzuschieben. Ist die anfängliche §. 388

Spannung $= p$ und die anfängliche Höhe des Cylinderraumes, $AE = s$, dagegen die Spannung nach Durchlaufung des Raumes $EE_1 = p_1$, und die Höhe $E_1A$ des noch übrigbleibenden Luftvolumens, $= s_1$, so gilt die Proportion:

Fig. 661.




$$p_1 : p = s : s_1, \text{ welche giebt } p_1 = \frac{s}{s_1} p.$$

Während Durchlaufung eines sehr kleinen Wegtheiles $E_1E_2 = \sigma$ läßt sich die Spannung $p_1$ als unveränderlich ansehen, und es ist daher die dabei aufzuwendende mechanische Arbeit $= Fp_1\sigma = \frac{Fps\sigma}{s_1}$, wofern noch $F$ die Kolbenfläche bezeichnet.

Den Lehren der Logarithmen zufolge *) ist aber eine sehr kleine Größe

$$x = Log.\,nat.\,(1 + x) = 2{,}3026\ Log.\,(1 + x),$$

wenn *Log. nat.* den natürlichen und *Log.* den gemeinen Logarithmen bezeichnet; es läßt sich folglich auch

$$Fps\frac{\sigma}{s_1} = Fps\ Log.\,nat.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$
$$= 2{,}3026\ Fps\ Log.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$

setzen. Nun ist aber

$$Log.\,nat.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right) = Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s_1}\right)$$
$$= Log.\,nat.\,(s_1 + \sigma) - Log.\,nat.\,s_1;$$

daher jene Elementararbeit auch

$$Fps\frac{\sigma}{s_1} = Fps\,[Log.\,nat.\,(s_1 + \sigma) - Log.\,nat.\,s_1].$$

Denken wir uns den ganzen Weg $EE_1$ aus $n$ Wegtheilen wie $\sigma$ bestehend, setzen wir also $EE_1 = n\sigma$, so finden wir die allen diesen Theilen entsprechenden Arbeiten, wenn wir in der letzten Formel nach und nach statt $s_1$; $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$, ... bis $s_1 + (n-1)\sigma$ und statt $s_1 + \sigma$; $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$ u. s. w. bis $s_1 + n\sigma$ oder $s$ setzen, und finden nun durch Summiren der dadurch erhaltenen Werthe den vollständigen Arbeitsaufwand beim Durchlaufen des Weges $s - s_1$:

---

*) Nach der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots$ (s. §. 194, sowie auch analytische Hülfslehren Art. 19) ist für ein kleines $x$, $e^x = 1 + x$, daher;

$$Log.\,nat.\,(1 + x) = x.$$

Digitized by Google

$$A = Fps \left\{ \begin{array}{l} Log.\,nat.\,(s_1 + \sigma) - Log.\,nat.\,s_1 \\ Log.\,nat.\,(s_1 + 2\,\sigma) - Log.\,nat.\,(s_1 + \sigma) \\ Log.\,nat.\,(s_1 + 3\,\sigma) - Log.\,nat.\,(s_1 + 2\,\sigma) \\ \quad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad . \\ Log.\,nat.\,(s_1 + n\,\sigma) - Log.\,nat.\,[s_1 + (n-1)\,\sigma] \end{array} \right\}$$

$$= Fps\,[Log.\,nat.\,(s_1 + n\,\sigma) - Log.\,nat.\,s_1]$$

$$= Fps\,(Log.\,nat.\,s - Log.\,nat.\,s_1) = Fps\;Log.\,nat.\left(\frac{s}{s_1}\right),$$

da sich immer ein Glied in der einen Zeile mit einem Gliede der folgenden Zeile aufhebt.

Da ferner $\frac{s}{s_1} = \frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$ ist, so läßt sich diese Arbeit auch setzen:

$$A = Fps\;Log.\,nat.\left(\frac{h_1}{h}\right) = Fps\;Log.\;nat.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Nehmen wir den Kolbenweg $s - s_1 = x$ an, so finden wir hiernach auch die mittlere Kraft des Kolbens bei Verdichtung der Luft in dem Verhältnisse

$$\frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p},$$

$$P = \frac{A}{x} = Fp\,\frac{s}{x}\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Setzen wir $F = 1$ (Quadratfuß) und $s = 1$ (Fuß), so erhalten wir die Leistung

$$A = p\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,p\;Log.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Diese Formel giebt die mechanische Arbeit an, welche aufzuwenden ist, um eine Raumeinheit (1 Cubikfuß) Luft aus der tieferen Pressung oder Spannung $p$ in die höhere Spannung $p_1$ zu versetzen und sie dadurch auf das Volumen $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ Cubikfuß zurückzuführen. Dagegen drückt

$$A = p_1\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,p_1\;Log.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

die Arbeit aus, welche eine Raumeinheit Gas ausgibt oder verrichtet, wenn sie aus der höheren Pressung $p_1$ in die tiefere $p$ übergeht.

Um eine Luftmasse vom Volumen $V$ und der Spannung $p$ durch Verdichtung auf das Volumen $V_1$ und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1}\,p$ zurückzuführen, ist hiernach die mechanische Arbeit $Vp\;Log.\,nat.\left(\frac{V}{V_1}\right)$ aufzuwenden nöthig, und wenn umgekehrt, das Volumen $V_1$ bei der Spannung

Digitized by Google

$p_1$ durch Verdünnung in das Volumen $V$ und in die Spannung $p = \frac{V_1}{V} p_1$ übergeht, so wird die Arbeit

$$V p \; Log.\,nat.\left(\frac{V}{V_1}\right) = V_1 p_1 \; Log.\,nat.\left(\frac{V}{V_1}\right) \text{ frei.}$$

Anmerkung. Zur Erzeugung mäßiger Spannungsdifferenzen ($p_1 - p$) oder kleiner Volumenveränderungen ($V_1 - V$) kann man auch einfach die erforderliche Arbeit

$$A = F\left(\frac{p+p_1}{2}\right)(s - s_1) = Fs\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p+p_1}{2}\right)$$
$$= V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p+p_1}{2}\right)$$

setzen, oder genauer, mit Hülfe der Simpson'schen Regel, wenn $z$ den Druck beim mittleren Kolbenwege $\frac{s+s_1}{2}$ bezeichnet:

$$A = V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p+4z+p_1}{6}\right).$$

Nun ist aber:

$$\frac{z}{p} = \frac{s}{\frac{1}{2}(s+s_1)} = \frac{2s}{s+s_1} = \frac{2}{1+\frac{p}{p_1}} = \frac{2p_1}{p+p_1},$$

daher folgt:

$$A = \tfrac{1}{6} V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(p + \frac{8 p p_1}{p+p_1} + p_1\right)$$
$$= \tfrac{1}{6} V p\left(\frac{p_1}{p} + \frac{8(p_1-p)}{p_1+p} - \frac{p}{p_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein Gebläse pro Secunde 10 Cubikfuß Luft von 28 Zoll Spannung in Wind von 30 Zoll Spannung verwandelt, so ist die von demselben in jeder Secunde zu verrichtende Arbeit

$A = 17280 \,.\, 0{,}5037 \,.\, 28 \; Log.\,nat.\,(^{30}/_{28}) = 243710\,(Log.\,nat.\,15 - Log.\,nat.\,14)$
$= 243710\;(2{,}708050 - 2{,}639057) = 243710 \,.\, 0{,}068993$
$= 16814$ Zollpfund $= 1401$ Fußpfund.

Die Annäherungsformel in der Anmerkung giebt diese Arbeit:

$$A = \tfrac{1}{6} \,.\, 243710 \,.\left(\frac{30}{28} + \frac{8\,.\,2}{29} - \frac{28}{30}\right) = 40610 \,.\left(\frac{15}{14} + \frac{8}{58} - \frac{14}{15}\right)$$
$$= 40618 \,.\, 0{,}41387 = 16811 \text{ Zollpfund} = 1401 \text{ Fußpfund.}$$

2) Wenn bei einer Dampfmaschine unter der Kolbenfläche $F = \pi \,.\, 8^2 = 201$ Quadratzoll eine Dampfmasse von 15 Zoll Höhe und 3 Atmosphären Spannung steht, welche den Kolben bei ihrer Ausdehnung um 25 Zoll fortschiebt, so ist die hierbei entwickelte und auf den Kolben übergetragene mechanische Arbeit unter der Voraussetzung, daß der Dampf bei seiner Expansion dem Mariotte'schen Gesetze folgt:

$$A = 201 \,.\, 3 \,.\, 14{,}10 \,.\, 15 \; Log.\,nat.\left(\frac{15+25}{15}\right) = 127534 \; Log.\,nat.\,{}^8/_3$$
$$= 127534 \,.\, 0{,}98083 = 125089 \text{ Zollpfund} = 10424 \text{ Fußpfund}$$

und die mittlere Kolbenkraft, ohne Rücksicht auf die Kolbenreibung und auf den Gegendruck:

$$P = \frac{125089}{25} = 4604 \text{ Pfund.}$$

Digitized by Google

**Druck in den verschiedenen Luftschichten.** Die in einem Gefäße eingeschlossene Luft ist in verschiedenen Tiefen von verschiedener Dichtigkeit und Spannung, denn die oberen Luftschichten drücken die unteren Luftschichten, auf welchen sie ruhen, zusammen; es ist deshalb nur in einer und derselben Horizontalschicht einerlei Dichtigkeit und einerlei Spannung, und es nehmen beide mit der Tiefe zu. Um aber das Gesetz dieser Zunahme der Dichtigkeit von oben nach unten oder der Abnahme derselben von unten nach oben zu finden, schlagen wir einen Weg ein, der dem des vorigen Paragraphen sehr ähnlich ist. §. 389

Denken wir uns eine verticale Luftsäule $AE$, Fig. 662, vom Querschnitte $AB = 1$, und von der Höhe $AF = s$. Setzen wir für die untere Luftschicht die Dichtigkeit $= \gamma$ und die Spannung $= p$, und für die obere Luftschicht $EF$ die Dichtigkeit $= \gamma_1$ und die Spannkraft $= p_1$, so haben wir zunächst $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}$. Bezeichnet $\sigma$ die Höhe $EE_1$ der Schicht $E_1F$, so ist das Gewicht derselben, sowie auch die dieser Höhe $\sigma$ entsprechende Abnahme der Spannkraft:

Fig. 662.

$$v = 1 \cdot \sigma \cdot \gamma_1 = \frac{\sigma \gamma p_1}{p},$$

und umgekehrt:

$$\sigma = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{v}{p_1},$$

oder, wie im vorigen Paragraphen:

$$\sigma = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(1 + \frac{v}{p_1}\right) = \frac{p}{\gamma}\left[Log.\,nat.\,(p_1 + v) - Log.\,nat.\,p_1\right].$$

Setzen wir hierin statt $p_1$, nach und nach $p_1 + v$, $p_1 + 2v$, $p_1 + 3v$ u. s. w. bis $p = p_1 + (n - 1)v$, und addiren wir die entsprechenden Luftschichthöhen oder Werthe von $\sigma$, so bekommen wir die Höhe der ganzen Luftsäule, ganz wie im vorigen Paragraphen:

$$s = \frac{p}{\gamma}\left(Log.\,nat.\,p - Log.\,nat.\,p_1\right) = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{p}{p_1}\right)$$

oder auch:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{b}{b_1}\right) = 2{,}302\,\frac{p}{\gamma} Log.\left(\frac{b}{b_1}\right),$$

wenn $b$ und $b_1$ die den Spannkräften $p$ und $p_1$ entsprechenden Barometerstände in $A$ und in $F$ bezeichnen.

Ist umgekehrt die Höhe $s$ gegeben, so läßt sich die ihr entsprechende Expansivkraft und Dichtigkeit der Luft berechnen. Es ist nämlich:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}}, \text{ also } \gamma_1 = \gamma e^{-\frac{s\gamma}{p}},$$



Digitized by Google

wobei $e = 2{,}71828$, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

Anmerkung. Diese Formel findet ihre Anwendung beim barometrischen Höhenmessen, welches im „Ingenieur", Seite 273 abgehandelt wird. Ohne Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. läßt sich im Mittel

$$s = 58604 \; Log. \left(\frac{b}{b_1}\right) \text{ Fuß setzen.}$$

Beispiele. 1) Wenn man den Barometerstand am Fuße eines Berges, 339 und am Gipfel desselben, 315 Linien gefunden hat, so ergiebt sich die Höhe dieses Berges:

$$s = 58604 \,.\, Log. \left(^{339}/_{315}\right) = 58604 \,.\, 0{,}031889 = 1869 \text{ Fuß.}$$

2) Für die Dichtigkeit der Luft auf einem 10000 Fuß hohen Berge hat man:

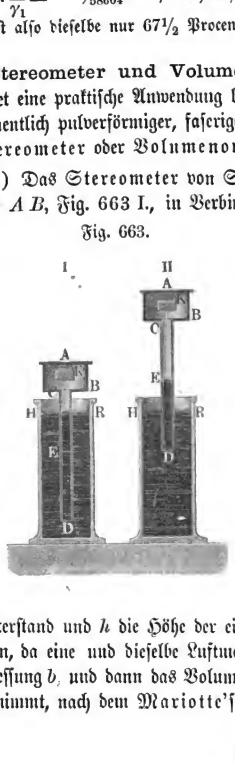
$Log. \frac{\gamma}{\gamma_1} = {}^{10000}/_{58604} = 0{,}1706$, daher $\frac{\gamma}{\gamma_1} = 1{,}481$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1}{1{,}481} = 0{,}675$;

es ist also dieselbe nur $67\frac{1}{2}$ Procent von der Dichtigkeit am Fuße.

§. 390 **Stereometer und Volumenometer.** Das Mariotte'sche Gesetz findet eine praktische Anwendung bei der Bestimmung der Volumina gewisser, namentlich pulverförmiger, faseriger Körper u. s. w. mittels der sogenannten Stereometer oder Volumenometer.

1) Das Stereometer von Say. Wird die mit dem verschlossenen Gefäße $AB$, Fig. 663 I., in Verbindung stehende und ins Queckſilber $HDR$ eingetauchte Glasröhre $CD$ emporgezogen, ohne ganz aus dem Queckſilber zu kommen (II.), so tritt in Folge der Ausdehnung der abgesperrten Luft, von oben eine gewisse Luftsäule $CE$, in die Röhre, und es bleibt von unten eine gewisse Queckſilbersäule $DE$ in derselben zurück, wobei sich die nun verminderte Spannkraft der eingeschlossenen Luft mit dem um den Druck der Queckſilbersäule $DE$ verminderten Atmosphärendruck ins Gleichgewicht setzt. Ist nun $V_0$ das Volumen des Raumes $ABC$, $V_1$ das zu bestimmende Volumen des in denselben gebrachten Körpers $K$ und $V$ das Volumen der Luftsäule $CE$, sowie $b$ der Barometerstand und $h$ die Höhe der eingedrungenen Queckſilbersäule $DE$, so hat man, da eine und dieselbe Luftmenge erst das Volumen $V_0 - V_1$ bei der Pressung $b$, und dann das Volumen $V_0 - V_1 + V$ bei der Pressung $b - h$, annimmt, nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 663.



$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b},$$

wonach dann das gesuchte Körpervolumen

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V \text{ folgt.}$$

Wenn man das Volumina $V_0$ kennt, und die Röhre bei der Bestimmung so weit herauszieht, daß die Länge und folglich auch das Volumen $V$ der Luftsäule in der Röhre $CD$ ein bestimmtes ist, und man beobachtet außer dem Barometerstande $b$, noch die Höhe $h$ der Wassersäule $DE$, so kann man mittels dieser Formel das Volumen $V_1$ des Körpers $K$ berechnen.

2) Das Volumenometer von Regnault. Wird der mit atmosphärischer Luft erfüllte Raum $ABCD$, Fig. 664, welcher auch den Körper $K$ enthält, dessen Volumen $V_1$ bestimmt werden soll, durch den Hahn bei $C$ abgesperrt, und dann durch den geöffneten Hahn $E$ so viel Quecksilber aus der Röhre $DE$ abgelassen, daß dessen Oberfläche von $M$ nach $N$ sinkt, so kann man nach dem Mariotte'schen Gesetze wieder die obige Formel

Fig. 664.

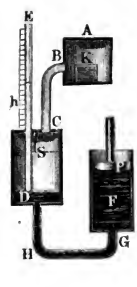
$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b}$$

aufstellen, wenn man das Volumen des Raumes $ABDM$ durch $V_0$, das Volumen des abgelassenen Quecksilbers durch $V$ und die Höhe $MN$ desselben durch $h$ bezeichnet. Es folgt deshalb auch genau wie oben das Volumen des Körpers in $A$,

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V.$$

Um für eine zweite Messung die Röhre $DE$ von Neuem mit Quecksilber zu füllen, stellt man durch Drehung des Hahnes $E$ eine Communication der Röhre $DE$ mit dem Quecksilbergefäße $GH$ her.

Fig. 665.




3) Das Volumenometer von Kopp. Die im Raume $ABCD$, Fig. 665, eingeschlossene Luft hat die äußere Pressung, wenn das Quecksilber in $DG$ die untere Mündung $D$ der Manometerröhre $DE$ berührt. Drückt man aber durch einen Kolben $P$ das Quecksilber in $DG$ bis zu einer gewissen Höhe empor, wobei seine Oberfläche die Spitze $S$ berührt, so wird die abgesperrte Luft zusammengedrückt, und es steigt auch das Quecksilber in der Manometerröhre auf eine an einer Scala abzulesenden Höhe $h$. Ist



Digitized by Google

nun wieder $V_0$ das Volumen des Luftraumes $ABCD$, $V_1$ das gesuchte Volumen des in denselben gebrachten Körpers und $V$ das Volumen des zugeflossenen Quecksilbers, so hat man dies Mal

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 - V} = \frac{b + h}{b},$$

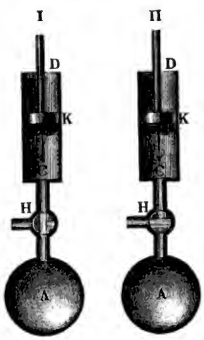
und daher das gesuchte Körpervolumen:

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b + h}{h}\right) V.$$

Die constanten Volumina $V_0$ und $V$ sind durch Einfüllung mit Quecksilber und Abwägen der eingenommenen Quecksilbermenge für jedes Instrument besonders zu bestimmen.

§. 391 **Die Luftpumpe** (franz. machine pneumatique; engl. air-pump, syringe). Wenn man den Kolben $K$, Fig. 666, einer Luftpumpe bei der Hahnstellung (I) aufzieht und bei der Hahnstellung (II) niederdrückt, so wirkt dieselbe als Verdünnungspumpe; wenn man dagegen denselben bei Hahnstellung (II) aufzieht und bei der Hahnstellung (I) zurückschiebt, so wirkt sie als Verdichtungspumpe. Bei wiederholtem Auf- und Niederziehen des Kolbens $K$ im Cylinder $CD$ wird dadurch die Luft im Recipienten $A$, im ersten Falle immer mehr und mehr verdünnt, im zweiten dagegen immer dichter und dichter.

Fig. 666.




1) Die Verdünnungspumpe. Ist $V$ der Recipientenraum, bis zum Hahne $H$ gemessen, ferner $V_1$ der schädliche Raum, von $H$ bis tiefsten Kolbenstande gerechnet, und bezeichnet $C$ den vom Kolben $K$ durchlaufenen Raum, welcher auch durch das Product $Fs$ von Kolbenfläche $F$ und Kolbenweg $s$ gemessen wird, so geht, nach dem Mariotte'schen Gesetze, die Pressung $b$ der anfangs im Recipienten eingeschlossenen Luft, am Ende des Kolbenschubes in die Pressung:

$$b_1 = \left(\frac{V + V_1}{V + V_1 + C}\right) b \text{ über.}$$

Da beim Rückgange des Kolbens der schädliche Raum mit Luft von der äußeren Pressung $b$ gefüllt bleibt, so ist ferner für die Pressung $b_2$ der Luft im Recipienten am Ende des zweiten Zuges:

Digitized by Google

$$(V+V_1+C)\,b_2 = V\,b_1 + V_1\,b$$
$$= \frac{V^2\,b}{V+V_1+C} + \frac{V\,V_1\,b}{V+V_1+C} + V_1\,b, \text{ daher}$$
$$b_2 = \left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^2 b + \frac{V\,V_1\,b}{(V+V_1+C)^2} + \frac{V_1\,b}{V+V_1+C}.$$

Ebenso ist für die Spannung $b_3$ am Ende des dritten Zuges

$$(V+V_1+C)\,b_3 = V\,b_2 + V_1\,b, \text{ und daher}$$
$$b_3 = \left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^3 b + \frac{V^2\,V_1\,b}{(V+V_1+C)^3} + \frac{V\,V_1\,b}{(V+V_1+C)^2}$$
$$+ \frac{V_1\,b}{V+V_1+C} = \left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^2 + \frac{V}{V+V_1+C} + 1\right]\frac{V_1\,b}{V+V_1+C},$$

und es läßt sich hiernach leicht ermessen, daß die Pressung $b_n$ am Ende des $n$ten Zuges,

$$b_n = \left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^n b$$
$$+ \left[\left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{V+V_1+C}\right)^{n-2} + \cdots + 1\right]\frac{V_1\,b}{V+V_1+C}$$

zu setzen ist.

Bezeichnet man $\frac{V}{V+V_1+C}$ durch $p$, und $\frac{V_1}{V+V_1+C}$ durch $q$, so hat man hiernach:

$$b_n = p^n\,b + (1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1})\,q\,b,$$

oder, da die Summe der in der Parenthese eingeschlossenen geometrischen Reihe, $= \frac{p^n-1}{p-1} = \frac{1-p^n}{1-p}$ ist (s. „Ingenieur“ Seite 82), so folgt einfach die gesuchte Endpressung:

$$b_n = \left[p^n + \left(\frac{1-p^n}{1-p}\right) q\right] b.$$

Für $n = \infty$ fällt $p^n = 0$, und folglich die möglich kleinste Spannung $b_n = \frac{q\,b}{1-p} = \frac{V_1\,b}{C+V_1}$ aus.

2) Die Verdichtungspumpe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie für die Verdünnungspumpe, so hat man hier für die Luftpressung $b_1$ am Ende des ersten Schubes:

$$(V+V_1)\,b_1 = (V+V_1+C)\,b, \text{ daher } b_1 = \left(\frac{V+V_1+C}{V+V_1}\right) b;$$

Digitized by Google

ferner für die Pressung $b_2$ am Ende des zweiten Schubes:

$$(V + V_1) b_2 = V b_1 + (V_1 + C) b, \text{ daher}$$

$$b_2 = \frac{(V + V_1 + C) V b}{(V + V_1)^2} + \frac{V_1 + C}{V + V_1} b$$

$$= \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 b + \left(\frac{V}{V + V_1} + 1\right) \frac{V_1 + C}{V + V_1} b.$$

Ebenso folgt für die Pressung am Ende des dritten Schubes:

$$(V + V_1) b_3 = V b_2 + (V_1 + C) b, \text{ und daher}$$

$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 + \frac{V}{V + V_1} + 1\right] \frac{V_1 + C}{V + V_1} b,$$

oder, wenn man

$$\frac{V}{V + V_1} = p_1 \text{ und } \frac{V_1 + C}{V + V_1} = q_1 \text{ setzt,}$$

$$b_3 = [p_1^3 + (1 + p_1 + p_1^2) q_1] b.$$

Allgemein hat man die Pressung am Ende des $n$ten Kolbenspieles:

$$b_n = [p_1^n + (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1}) q_1] b, \text{ oder da}$$

$$1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1} = \frac{p_1^n - 1}{p_1 - 1} = \frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} \text{ ist,}$$

$$b_n = \left[p_1^n + \left(\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1}\right) q_1\right] b.$$

Für $n = \infty$, wo $p_1^n = 0$ ist, stellt sich

$$b_n = \frac{q b_1}{1 - p_1} = \frac{V_1 + C}{V_1} b$$

heraus. Dies ist natürlich auch die **größte Spannung**, welche durch diese Compressionspumpe erzeugt werden kann.

Wäre der schädliche Raum also $V_1 =$ Null, so hätte man bei der Verdünnungspumpe $q = 0$, daher:

$$b_n = p^n b = \left(\frac{V}{V + C}\right)^n p;$$

dagegen bei der Verdichtungspumpe $p_1 = 1$ und $\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} = n$, folglich:

$$b_n = (1 + n q_1) b = \left(1 + n \frac{C}{V}\right) b.$$

*Beispiel.* Wenn bei einer Luftpumpe der Recipient das Volumen $V = 1000$ Cubikzoll und der schädliche Raum die Größe von 10 Cubikzoll einnimmt, während der Cylinderraum 300 Cubikzoll mißt, so ist die Spannung der eingeschlossenen Luft nach 20 Spielen:

1) beim **Verdünnen**, da

$$p = \frac{1000}{1310} = 0{,}76336 \text{ und}$$

$$q = \frac{10}{1310} = \frac{1}{131} = 0{,}0076336 \text{ mißt,}$$

Digitized by Google

$$b_u = b_{20} = \left(0{,}76336^{20} + \frac{1 - 0{,}76336^{20}}{1 - 0{,}76336} \cdot 0{,}0076336\right) b$$
$$= (0{,}0045143 + 0{,}0321126)\, b = 0{,}076269\, b;$$ dagegen

2) beim Verdichten, wo

$$p_1 = \frac{1000}{1010} = 0{,}99010 \text{ und}$$
$$q_1 = \frac{310}{1010} = 0{,}30693 \text{ ist,}$$
$$b_u = b_{20} = \left(0{,}9901^{20} + \frac{1 - 0{,}9901^{20}}{1 - 0{,}9901} \cdot 0{,}30693\right) b$$
$$= \left(0{,}81954 + \frac{0{,}18046}{0{,}009901} \cdot 0{,}30693\right) b = 6{,}414\, b.$$

**Gay-Lussac'sches Gesetz.** Einen wesentlichen Einfluß auf die Dichtigkeit und Expansivkraft der Gase hat die Wärme oder Temperatur derselben. Je mehr die in einem Gefäße eingeschlossene Luft erwärmt wird, desto größer zeigt sich auch die Expansivkraft derselben, und je mehr die Temperatur der in einem Gefäße durch einen Kolben abgeschlossenen Luft erhöht wird, desto mehr dehnt sich auch die Luft aus und schiebt den Kolben auswärts. Versuche von Gay-Lussac, welche in neueren Zeiten von Rudberg, Magnus und Regnault wiederholt worden sind, haben ergeben, daß bei gleicher Dichtigkeit die Expansivkraft, und bei gleicher Expansivkraft das Volumen einer und derselben Luftmenge wie die Temperatur wächst. Man kann dieses Gesetz dem Mariotte'schen an die Seite setzen, und es zur Unterscheidung das Gay-Lussac'sche Gesetz nennen. Nach den neuesten Versuchen nimmt die Expansivkraft eines gewissen Luftvolumens bei Erwärmung vom Frost- bis Siedepunkt um 0,367 ihres anfänglichen Werthes zu, oder es wächst bei dieser Temperaturerhöhung das Volumen einer gewissen Luftmasse bei unveränderlicher Spannung um 36,7 Procent. Giebt man die Temperatur nach Centesimalgraden an, deren der Raum zwischen Frost- und Siedepunkt 100 enthält, so folgt die Ausdehnung auf jeden Grad, $= 0{,}00367$ und auf $t^0$ Temperatur, $= 0{,}00367\,.\,t$; bedient man sich dagegen der Réaumur'schen Grade, von denen 80 auf den Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkt gehen, so hat man die Ausdehnung auf jeden Grad 0,00459, also für $t^0 = 0{,}00459\,.\,t$. §. 392

Diese Verhältnißzahl oder der sogenannte Ausdehnungscoefficient $\delta = 0{,}00367$, gilt eigentlich nur für die atmosphärische Luft; den übrigen Gasen entsprechen meist wenig größere Werthe, auch nimmt selbst bei der atmosphärischen Luft dieser Coefficient mit der Temperatur wenig zu.

Wird eine Luftmasse vom anfänglichen Volumen $V_0$ und von der Temperatur Null um $t$ Grad erwärmt, ohne eine andere Spannung anzunehmen, so ist das neue Volumen:

$$V = (1 + 0{,}00367\, t)\, V_0,$$

Digitized by Google

und erhält es die Temperatur $t_1$, so entsteht das Volumen:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\, t_1)\, V_0,$$

und es folgt durch Division das Volumenverhältniß:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1},$$

dagegen das entsprechende Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t},$$

oder allgemein:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}.$$

Geht außerdem noch eine Veränderung in der Spannung vor, ist $p_0$ die Spannung bei Null, $p$ die bei $t$, und $p_1$ die bei $t_1$ Wärme, so hat man:

$$V = (1 + 0{,}00367\, t)\, \frac{p_0}{p}\, V_0,$$

ferner:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\, t_1)\, \frac{p_0}{p_1}\, V_0,$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1} \cdot \frac{p_1}{p} \text{ und}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{p_1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{b_1}, \text{ sowie}$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Beispiel. Wenn eine Luftmasse von 800 Cubikfuß Inhalt, 15 Pfd. Spannkraft und 10 Grad Wärme, durch das Gebläse und durch den Erwärmungsapparat eines Hohofens in eine Spannung von 19 Pfd. und in eine Temperatur von 200 Grad versetzt wird, so nimmt sie zuletzt das größere Volumen:

$$V_1 = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, 200}{1 + 0{,}00367 \,.\, 10} \cdot {}^{15}/_{19} \,.\, 800 = \frac{1{,}734}{1{,}0367} \cdot \frac{12000}{19} = 1056 \text{ Cubikfuß an.}$$

Anmerkung. Die Formel:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$$

läßt sich auf feste und einige liquide Körper anwenden, nur ist hierin für jeden festen Stoff ein besonderes Ausdehnungsverhältniß einzuführen; z. B.

für Gußeisen: $\delta = 0{,}0000336$,
für Glas: $\delta = 0{,}0000258$,
für Queckſilber: $\delta = 0{,}0001802$.

Digitized by Google

**Dichtigkeit der Luft.** Mit Hülfe der Formel am Ende des vorigen Paragraphen läßt sich nun auch die einer gegebenen Temperatur und Spannung der Luft entsprechende Dichtigkeit $\gamma$ berechnen. Durch neuere Wägungen und Messungen von Seiten Regnault's hat man das Gewicht von einem Cubikmeter atmosphärische Luft bei Null Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerstand, = 1,2935 Kilogramm gefunden. Da ein Cubikfuß (preuß.) = 0,030916 Cubikmeter und 1 Kilogramm = 2,0 Neupfund ist, so beträgt bei den angegebenen Verhältnissen, die Dichtigkeit der Luft §. 393

$$= 2 \,.\, 0{,}030916 \,.\, 1{,}2935 = 0{,}07998 \text{ Pfund.}$$

Ist nun die Temperatur $= t^0$ Cent., so folgt die Dichtigkeit, für das französische Maß:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

und für das preußische Maß:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \text{ Pfund.}$$

Weicht auch noch die Expansivkraft von der mittleren ab, ist also der Barometerstand nicht 0,76 Meter, sondern $b$, so erhält man:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{0{,}76} = \frac{1{,}702 \,.\, b}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

oder wenn man, wie in Deutschland gewöhnlich, $b$ in Pariser Zoll giebt, da 0,76 Meter = 28,075 Zoll ist:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{28{,}075} = \frac{0{,}002849 \,.\, b}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Pfund.}$$

Sehr oft drückt man aber auch die Expansivkraft durch den Druck $p$ auf das Quadratcentimeter oder auf den Quadratzoll aus, deshalb ist dann der Factor $\frac{p}{1{,}0336}$ oder $\frac{p}{14{,}10}$ einzuführen, und es folgt so:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{1{,}2514\ p}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm}$$

oder:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{14{,}10} = \frac{0{,}005672\ p}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \text{ Pfund.}$$

Bei gleicher Temperatur und Expansivkraft ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes nahe $^5/_8$ von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, weshalb man für Wasserdampf

$$\gamma = \frac{0{,}8084}{1 + 0{,}00367\ t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{0{,}7821\ p}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm}$$

oder

Digitized by Google

$$\gamma = \frac{0{,}04999}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \frac{p}{14{,}10} = \frac{0{,}003539\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Pfund}$$

erhält.

Beispiele. 1) Welches Gewicht hat der in einem cylindrischen Regulator von 40 Fuß Länge und 6 Fuß Weite enthaltene Wind bei 10 Grad Wärme und 18 Pfund Pressung? Die Dichtigkeit dieses Windes ist:

$$\gamma = \frac{0{,}005672\,.\,18}{1{,}0367} = \frac{0{,}102096}{1{,}0367} = 0{,}09848 \text{ Pfund},$$

und der Fassungsraum des Regulatorkessels:

$$V = \pi\,.\,3^2\,.\,40 = 1131 \text{ Cubikfuß},$$

daher wiegt die gedachte Windmasse:

$$V\gamma = 0{,}09848\,.\,1131 = 111{,}4 \text{ Pfund}.$$

2) Eine Dampfmaschine verbraucht in der Minute 500 Cubikfuß Dampf von 107° Wärme und 36 Pariser Zoll $= 0{,}5037\,.\,36 = 18{,}133$ Pfund Spannkraft; wie viel Pfund Wasser bedarf sie zur Erzeugung dieser Dampfmenge? Die Dichtigkeit dieses Dampfes ist

$$= \frac{0{,}003539\,.\,18{,}133}{1 + 0{,}00367\,.\,107} = \frac{0{,}06417}{1{,}393} = 0{,}04607 \text{ Pfund},$$

daher das Gewicht von 500 Cubikfuß Dampf, oder das Gewicht der entsprechenden Wassermenge

$$V\gamma = 500\,.\,0{,}04607 = 23{,}035 \text{ Pfund}.$$

§. 394 **Luftmanometer.** Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun auch die Theorie des Luftmanometers entwickeln. Dasselbe besteht aus einer gut calibrirten, oben mit Luft und unten mit Quecksilber angefüllten Barometerröhre $AB$, Fig. 667, und aus einem ebenfalls Quecksilber enthaltenden Gefäße $CER$, welches mit dem Gase oder Dampfe, dessen Spannkraft man wissen will, durch ein Rohr $CE$ in Communication gesetzt wird. Aus den Höhen der Luft- und Quecksilbersäulen in $AB$ läßt sich diese Spannkraft wie folgt berechnen. Gewöhnlich ist das Instrument so eingerichtet, daß das Quecksilber in der Röhre mit dem Quecksilber im Gefäße auf gleiche Höhe steht, wenn die Temperatur der eingeschlossenen Luft, $t = 10$ Grad und die Spannung im Raume $ER$ dem mittleren Atmosphärendrucke $b = 0{,}76$ Meter oder 28 Zoll gleich ist.

Fig. 667.

Ist aber beim Barometerstande $b$, im Raume $ER$ eine Quecksilbersäule $h_1$ in die Röhre gestiegen und die Länge $AS$ der übrig bleibenden Luftsäule, $= h_2$, so hat man die Spannung derselben

$$z = \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) b,$$

und daher den Barometerstand der Luft in $ER$:

$$b_1 = h_1 + z = h_1 + \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) b.$$

Findet noch ein Temperaturwechsel statt, ist die Temperatur bei der Beobachtung von $h_1$ und $h_2$ nicht wie anfänglich, $= t$, sondern $= t_1$, so hat man die Spannung der Luftsäule $AS$:

$$z = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t_1}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) . b,$$

und daher den in Frage stehenden Barometerstand:

$$b_1 = h_1 + \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t_1}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) \cdot b.$$

Für $b = 28$ Zoll (Paris.) und $t = 10^0$ C. folgt:

$$b_1 = h_1 + 27\ (1 + 0{,}00367\ t_1)\ \frac{h}{h_2},$$

wobei noch $h = h_1 + h_2$ die ganze Röhrenlänge, vom oberen Ende $A$ bis zum Quecksilberspiegel $HR$ gemessen, bezeichnet.

Aus dem Barometerstande $b_1$ Zoll folgt die Pressung auf den Quadratzoll (preuß.):

$$p_1 = \frac{14{,}10}{28}\ h_1 + 14{,}10\,.\,{}^{27}/_{28}\ (1 + 0{,}00367\ t_1)\ \frac{h}{h_2}$$

$$= 0{,}5037\ h_1 + 13{,}60\ (1 + 0{,}00367\ t_1)\ \frac{h}{h_2}\ \text{Pfund.}$$

Setzt man $\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \mu$, so folgt

$$(b_1 - h_1)\ (h - h_1) = \mu\, h\, b, \text{ und daher}$$

$$h_1 = \frac{b_1 + h}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + h}{2}\right)^2 + (\mu\, b - b_1)\, h}.$$

Nach dieser Formel läßt sich eine Scala berechnen, an welcher man die Pressung $b_1$ durch die Manometerhöhe angegeben ablieſt.

Beiſpiel. Wenn ein Luftmanometer von 25 Zoll Länge bei $21^0$ Wärme eine Luftsäule von 12 Zoll Länge zeigt, so ist der entsprechende Barometerstand:

$$b_1 = 25 - 12 + 27\ (1 + 0{,}00367\,.\,21)\,.\,{}^{25}/_{12} = 13 + 9\,.\,1{,}07707\,.\,{}^{25}/_{4}$$
$$= 13 + 60{,}58 = 73{,}58 \text{ Zoll,}$$

und der Druck auf einen Quadratzoll

$$p_1 = 0{,}5037\,.\,73{,}58 = 3706 \text{ Pfund.}$$

**Auftrieb der Luft.** Das aus §. 364 bekannte Gesetz vom Auftriebe des Wassers gegen die in dasselbe eingetauchten festen Körper läßt sich natür- §. 395

lich auch auf die in der Luft befindlichen Körper anwenden. Ist $V$ das Volumen dieses Körpers und $\gamma$ die Dichtigkeit der Luft, worin sich derselbe befindet, so beträgt, diesem Gesetze zufolge, der Auftrieb $P = V\gamma$; hat folglich der Körper das scheinbare Gewicht $G$ (in der Luft), so ist sein wahres Gewicht (im luftleeren Raume):

$$G_1 = G + V\gamma.$$

Ist ferner $\gamma_1$ die Dichtigkeit dieses Körpers, so hat man auch:

$$G_1 = V\gamma_1, \text{ daher:}$$

$$V = \frac{G_1}{\gamma_1}, \text{ so daß nun:}$$

$$G_1 = G + \frac{G_1\gamma}{\gamma_1}, \text{ oder } G_1(\gamma_1 - \gamma) = G\gamma_1, \text{ also:}$$

$$G_1 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma}\right) G \text{ folgt.}$$

Wird der Körper an der Wage durch ein Gewichtsstück $G_2$ gewogen, dessen Dichtigkeit $\gamma_2$ ist, so gilt für dasselbe die Gleichung:

$$G_2 = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma}\right) G,$$

und es folgt endlich mittels Division der letzten Gleichungen durch einander das Gewichtsverhältniß

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

oder annähernd und meist genügend scharf:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\gamma}{\gamma_2} = 1 + \gamma\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

oder auch:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

wenn $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ die specifischen Gewichte der Luft, des abgewogenen Körpers und der Gewichtsmasse bezeichnen.

In vielen Fällen der Anwendung sind $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}$ so kleine Brüche, daß man sie ganz außer Acht und das wahre Gewicht ($G_1$) dem scheinbaren Gewichte $G$ gleichsetzen kann.

Anmerkung. Das Gesetz vom Auftriebe der Luft findet auch noch seine Anwendung bei der Bestimmung der Steigkraft und Steighöhe eines Luftballons (franz. aérostat; engl. air-balloon) $AB$, Fig. 668. Ist $V$ das Volumen des Ballons, $G$ das ganze scheinbare Gewicht desselben sammt Schiff u. s. w., $\gamma_1$ die Dichtigkeit der äußeren und $\gamma_2$ die der eingeschlossenen Luft, so hat man den Auftrieb:

$$P = V\gamma_1 = V\gamma_2 + G,$$

Digitized by Google

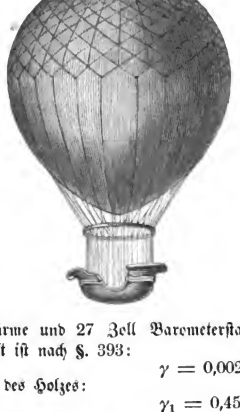
und daher:

$$V(\gamma_1 - \gamma_2) = G,$$

also z. B. den nöthigen Fassungsraum des Ballons:

$$V = \frac{G}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

Fig. 668.



und die Dichtigkeit der äußeren Luft beim höchsten Stande des Ballons:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V}.$$

Aus dieser Dichtigkeit läßt sich noch mittels der in §. 389 gefundenen Formel:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log.nat.\left(\frac{b}{b_1}\right) = \frac{p}{\gamma} Log.nat.\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)$$

die größte Steighöhe $s$ des Ballons bestimmen, wenn wir hierin für $\gamma$ die nach § 393 zu bestimmende Dichtigkeit der Luft am Anfangspunkte einsetzen.

Beispiel 1. Wie verhält sich das wahre Gewicht des trockenen Nadelholzes zum scheinbaren Gewichte desselben, wenn das letztere mittels Messinggewichte bei 0 Grad Wärme und 27 Zoll Barometerstand bestimmt worden ist. Die Dichtigkeit der Luft ist nach §. 393:

$$\gamma = 0{,}002849 \,.\, 27 = 0{,}07692 \text{ Pfund},$$

die des Holzes:

$$\gamma_1 = 0{,}453 \,.\, 61{,}74,$$

und des Messings:

$$\gamma_2 = 8{,}55 \,.\, 61{,}74 \text{ (s. §. 61)},$$

folglich das gesuchte Gewichtsverhältniß:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{0{,}07692}{61{,}74} \cdot \left(\frac{1}{0{,}453} - \frac{1}{8{,}55}\right) = 1 + 0{,}001246 \,.\, 2{,}091 = 1{,}00261.$$

Es verlieren also hiernach 1000 Pfund Holz durch den Auftrieb der Luft ungefähr $2^2/_3$ Pfund an Gewicht.

Beispiel 2. Wenn ein Luftballon eine Kugel von $d = 30$ Fuß Durchmesser bildet, die Füllung derselben die Dichtigkeit $\gamma_1 = 0{,}017$ Pfund hat und das Gewicht des ganzen Ballons sammt Schiff und Last, $G = 500$ Pfund beträgt, so ist die Dichtigkeit der äußeren Luft an der Stelle, wo das Luftschiff zu steigen aufhört:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V} = \gamma_2 + \frac{6\,G}{\pi\, d^3} = 0{,}017 + \frac{3000}{\pi \,.\, 30^3} = 0{,}017 + 0{,}03537$$
$$= 0{,}05237 \text{ Pfund}.$$

Ist nun die Dichtigkeit der äußeren Luft am Fußpunkte, $\gamma = 0{,}0800$ Pfund, so hat man:

$$Log.\ nat.\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = Log.\ nat.\left(\frac{8000}{5237}\right) = 0{,}4948,$$

und nimmt man noch das Verhältniß des Druckes per Quadratfuß zur Dichtigkeit $\gamma$ der Luft, d. i. $\frac{p}{\gamma} = 25393$ an, so erhält man die größte Steighöhe dieses Luftschiffes:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log.\ nat.\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = 25393 \,.\, 0{,}4948 = 12564 \text{ Fuß}.$$

Digitized by Google

Siebenter Abschnitt.

# Dynamik flüssiger Körper.

---

## Erstes Capitel.

## Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

§. 396 **Ausfluss.** Die Lehre vom Ausflusse (franz. écoulement; engl. efflux) der Flüssigkeiten aus Gefäßen macht den ersten Haupttheil der Hydrodynamik aus. Wir unterscheiden zuerst den Ausfluß des Wassers und den Ausfluß der Luft, und dann noch den Ausfluß bei veränderlichem und den bei unveränderlichem Drucke von einander. Zunächst ist von dem Ausflusse des Wassers unter constantem Drucke die Rede. Als constant läßt sich der Druck des Wassers annehmen, wenn von einer Seite eben soviel Wasser zutritt, als auf einer anderen Seite ausfließt, oder wenn die in einer gewissen Zeit ausfließende Wassermenge in Beziehung auf den Fassungsraum des Gefäßes sehr klein ist. Die Hauptaufgabe, um deren Lösung es sich hier handelt, ist die Bestimmung der Wassermenge (franz. dépense; engl. discharge), welche unter gegebenem Drucke in einer bestimmten Zeit durch eine gegebene Oeffnung (franz. orifice; engl. aperture) ausfließt.

Ist die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, so hat man für die im Laufe von $t$ Secunden unter unveränderlichem Drucke ausfließende Wassermenge:

$$V = Qt.$$

Um aber die Ausflußmenge pro Secunde zu erhalten, ist es nöthig, die Größe der Oeffnung und die Geschwindigkeit der ausfließenden Wasserelemente zu kennen. Der Einfachheit der Untersuchung wegen nehmen wir zunächst an, daß die Wasserelemente in geraden und parallelen Linien ausströmen und

Digitized by Google

deshalb einen prismatischen Wasserstrahl (franz. veine, courant de fluide; engl. stream of the fluid) bilden. Ist nun $F$ der Querdurchschnitt des Wasserstrahls und $v$ die Geschwindigkeit des Wassers oder eines jeden Wasserelementes, so bildet die Ausflußmenge pro Secunde ein Prisma von der Basis $F$ und Höhe $v$, es ist also:

$$Q = Fv \text{ Raumeinheiten}$$

und

$$G = Fv\gamma \text{ Gewichtseinheiten,}$$

wofern $\gamma$ die Dichtigkeit des Wassers oder der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Beispiele. 1) Wenn durch eine Schußöffnung von 1,7 Quadratfuß das Wasser mit 14 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, so beträgt die Wassermenge pro Secunde:

$$Q = 14 . 1{,}7 = 23{,}8 \text{ Cubikfuß,}$$

und daher die stündlich ausfließende Wassermenge

$$= 23{,}8 . 3600 = 85680 \text{ Cubikfuß.}$$

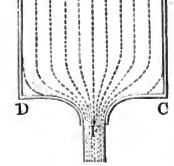
2) Wenn durch eine Mündung von 5 Quadratzoll in 3 Minuten 10 Secunden 264 Cubikfuß Wasser ausgeflossen sind, so betrug die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{V}{Ft} = \frac{264}{\frac{5}{144} \cdot 190} = \frac{264 . 144}{5 . 190} = 40 \text{ Fuß.}$$

**Ausflussgeschwindigkeit.** Denken wir uns ein mit Wasser angefülltes Gefäß $AC$, Fig. 669, mit einer innen abgerundeten horizontalen Ausmündung $F$, welche nur einen sehr kleinen Theil von der Oberfläche $HR$ des Wassers einnimmt. Setzen wir die während des Ausflusses als unveränderlich anzusehende Druckhöhe $FG$ (franz. charge d'eau; engl. height of water) $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, und die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, also ihr Gewicht $= Q\gamma$. Die mechanische Arbeit, welche diese Wassermasse beim Herabsinken von der Höhe $h$ zu verrichten vermag, ist $= Qh\gamma$, und die mechanische Arbeit, welche die ausfließende Masse $Q\gamma$ in sich aufnimmt, indem sie aus der Ruhe in die Geschwindigkeit $v$ übergeht, ist $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (§. 74). Findet nun ein Arbeitsverlust beim Durchgange durch die Oeffnung nicht statt, so sind beide Arbeiten einander gleich, es ist also $hQ\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, d. i.:

§. 397

Fig. 669.




$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Digitized by Google

und umgekehrt,

$$v = \sqrt{2gh},$$

in Metermaß:

$$h = 0{,}0510\, v^2, \text{ und } v = 4{,}429\, \sqrt{h},$$

dagegen in Fußmaß:

$$h = 0{,}016\, v^2, \text{ und } v = 7{,}906\, \sqrt{h}.$$

Es ist also die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers so groß wie die Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läßt sich auch durch folgenden Versuch erweisen. Wenn man im Gefäße $ACF$, Fig. 670, eine nach oben gerichtete Oeffnung anbringt, so steigt der Wasserstrahl $FK$ vertical in die Höhe und erreicht beinahe das Niveau $HR$ des Wassers im Gefäße, und es läßt sich annehmen, daß er es vollkommen erreichen würde, wenn alle Hindernisse, wie z. B. Widerstand der Luft, Reibung an den Gefäßwänden, Störung durch das zurückfallende Wasser u. s. w. beseitigt wären. Da aber ein auf eine senkrechte Höhe $h$ aufsteigender Körper die Anfangsgeschwindigkeit

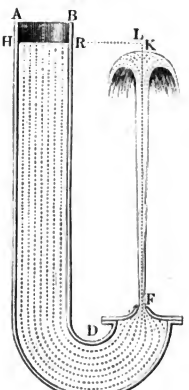
$$v = \sqrt{2gh}$$

hat (§. 15), so folgt hiernach auch, daß die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

sein muß.

Fig. 670.




Für eine andere Druckhöhe $h_1$ ist die Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2gh_1},$$

man hat daher:

$$v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1};$$

es verhalten sich also die Ausflußgeschwindigkeiten einer und derselben Flüssigkeit wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beispiele. 1) Die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch eine 10 Quadratzoll große Oeffnung unter dem Drucke von 5 Fuß ausströmt, ist:
$Q = Fv = 10 \,.\, 12\sqrt{2gh} = 120 \,.\, 7{,}906\sqrt{5} = 948{,}7 \,.\, 2{,}236 = 2121$ Cubikzoll.

2) Damit durch eine Oeffnung von 6 Quadratzoll in der Secunde 252 Cubikzoll Wasser ausfließen, ist die Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \frac{0{,}016}{12} \cdot \left(\frac{252}{6}\right)^2 = \frac{0{,}004}{3} \cdot 42^2 = 2{,}35 \text{ Zoll}$$

nöthig.

Digitized by Google

**Zu- und Ausflussgeschwindigkeit.** Wenn das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit $c$ zufließt, so kommt zur Arbeit $h.Q\gamma$ noch die der Geschwindigkeitshöhe $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ entsprechende und dem zufließenden Wasser innewohnende Arbeit $\frac{c^2}{2g}Q\gamma$ hinzu, weshalb nun zu setzen ist: §. 398

$$(h + h_1)\,Q\gamma = \frac{v^2}{2g}Q\gamma, \text{ oder } h + h_1 = \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\,(h + h_1)} = \sqrt{2gh + c^2}.$$

Da bei einem beständig voll erhaltenen Gefäße die zufließende Wassermasse ebenso groß ist, wie die ausfließende Masse $Q$, so läßt sich $Gc = Fv$ setzen, wofern $G$ den Inhalt des Querschnittes $HR$ (Fig. 669) vom zuströmenden Wasser bezeichnet. Setzen wir hiernach $c = \frac{F}{G}v$, so erhalten wir:

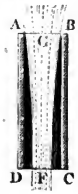
$$h = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{F}{G}\right)^2\frac{v^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

und daher:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Dieser Formel zufolge nimmt die Geschwindigkeit um so mehr zu, je größer das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{G}$ ist, nach ihr fällt ferner die Geschwindigkeit am kleinsten, nämlich $= \sqrt{2gh}$ aus, wenn der Querschnitt $F$ der Ausflußöffnung sehr klein ist gegen den Querdurchschnitt $G$ der Zuflußöffnung, und es nähert sich dieselbe immer mehr und mehr dem Unendlichen, je kleiner der Unterschied zwischen diesen Mündungen ist. Wenn $F = G$, also $\frac{F}{G} = 1$ ist, so fällt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{0} = \infty$ und also auch $c = \infty$ aus. Dieser unendliche Werth ist so zu verstehen, daß bei einem bodenlosen Gefäße $AC$, Fig. 671, das Wasser mit einer unmeßbar großen Geschwindigkeit zu- und abfließen muß, damit der Wasserstrahl $GF$ die Ausmündung $CD$ ausfüllt. Setzt man $v = \frac{Gc}{F}$ ein, so erhält man:

Fig. 671.




$$h = \left[\left(\frac{G}{F}\right)^2 - 1\right]\frac{c^2}{2g}, \text{ daher } F = \frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}},$$



Digitized by Google

welcher Ausdruck anzeigt, daß der Querschnitt $F$ des ausfließenden Strahles bei einer endlichen Zuflußgeschwindigkeit stets kleiner ist als der Querschnitt $G$ des zufließenden Strahles, und daß er daher die Ausmündung gar nicht ausfüllt, wenn dieselbe größer ist als $\frac{G}{\sqrt{1+\frac{2gh}{c^2}}}$.

Anmerkung. Die Richtigkeit der schon von Daniel Bernoulli aufgestellten Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

ist später von Vielen in Zweifel gezogen worden; wie unbegründet aber die gemachten Ausstellungen sind, habe ich in der allgemeinen Maschinenencyklopädie von Hülsse, Artikel „Ausfluß", zu beweisen gesucht.

Beispiel. Wenn aus einem prismatischen Gefäße von 60 Quadratzoll Querschnitt das Wasser durch eine 5 Zoll weite kreisrunde Bodenöffnung bei einer Druckhöhe von 6 Fuß ausfließt, so ist die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1-\left(\frac{25\,\pi}{4.60}\right)^2}} = \frac{7{,}906\,.\,2{,}449}{\sqrt{1-(0{,}327)^2}} = \frac{19{,}362}{\sqrt{0{,}8931}} = \frac{19{,}362}{0{,}945} = 20{,}49 \text{ Fuß}.$$

§. 399 **Ausflussgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.** Die gefundenen Formeln gelten nur dann, wenn der Luftdruck auf den Wasserspiegel ebenso groß ist, wie der Druck der Luft gegen die Ausmündung; sind aber diese Drücke verschieden von einander, so bedürfen diese Formeln noch einer Ergänzung. Wird die Oberfläche $HR$, Fig. 672, durch einen Kolben $K$ mit einer Kraft $P_1$ gedrückt, welcher Fall z. B. bei Feuerspritzen vorkommt, so denke man sich diese Kraft durch den Druck einer Wassersäule ersetzt. Ist $h_1$ die Höhe $LK$ dieser Säule, und $\gamma$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so setze man also:

Fig. 672.

$$P_1 = G h_1 \gamma.$$

Führt man nun statt $h$ die um $h_1 = \frac{P_1}{G\gamma}$ vergrößerte Druckhöhe

$$h + h_1 = h + \frac{P_1}{G\gamma}$$

ein, so bekommt man für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{P_1}{G\gamma}\right)},$$

wobei wir überdies $\frac{F}{G}$ sehr klein voraussetzen. Bezeichnen wir noch den Druck auf jede Flächeneinheit der Oberfläche $G$ durch $p_1$, so haben wir einfacher:

Digitized by Google

$$\frac{P_1}{G} = p_1,$$

und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)}.$$

Bezeichnen wir endlich den Wasserdruck im Niveau der Ausmündung durch $p$, so können wir auch setzen:

$$p = \left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma,$$

also:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma},$$

weshalb

$$v = \sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}}$$

folgt

Hiernach wächst also die Ausflußgeschwindigkeit wie die Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit. Bei gleichem Drucke fließt also z. B. die 4mal so schwere Flüssigkeit $\frac{1}{2}$mal so schnell aus, als die einfach schwere Flüssigkeit. Da die Luft 770mal so leicht als Wasser ist, so würde sie, wenn sie unelastisch wäre, unter gleichem Drucke $\sqrt{770} = 27\frac{3}{4}$mal so schnell ausfließen, als Wasser.

Diese Theorie findet auch ihre Anwendung auf die Fälle, wo das ausfließende Wasser noch durch eine andere Flüssigkeitssäule gedrückt wird. Steht über der Oberfläche $HR$ des Wassers $HEF$ in einem Gefäße $ACD$,

Fig. 673.

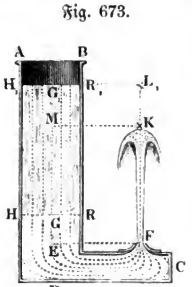



Fig. 673, noch eine Flüssigkeitssäule $HR_1$, deren Höhe $GG_1 = h_1$ und Dichtigkeit $= \gamma_1$ ist, während das Wasser die Dichtigkeit $\gamma$ hat, so kann man dieselbe durch eine Wassersäule von der Höhe $\frac{\gamma_1}{\gamma}h_1$ ersetzen, ohne daß sich der Druck auf $HR$ ändert und folglich auch die Geschwindigkeit $v$ des durch die Mündung $F$ fließenden Wassers eine andere wird. Ist folglich noch $h$ die Druckhöhe $EG$ des Wassers, d. i. die Höhe der Trennungsfläche $HR$ über der Mündung $F$, so hat man folglich die Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{\gamma_1}{\gamma}h_1,$$



Digitized by Google

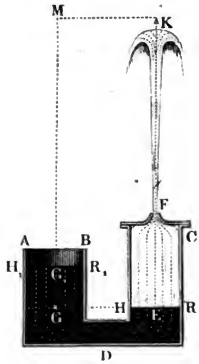
und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1\right)}.$$

Ist nun $\gamma_1 < \gamma$, und also auch $h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 < h + h_1$, so reicht auch der senkrecht in die Höhe steigende Wasserstrahl $FK$ nicht bis in das Niveau $H_1 R_1 L_1$ der Oberfläche der Flüssigkeit $H_1 R$.

Steht die Trennungsfläche $HR$, Fig. 674, nicht über, sondern um eine gewisse Höhe $EF = h$ unter der Mündung $F$ des Ausflußgefäßes $ADC$, während die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ um die Höhe $GG_1 = h_1$ über der Trennungsfläche $HR$ liegt, so hat man:

Fig. 674.




$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h,$$

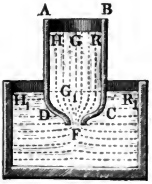
und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h\right)}.$$

Dieser Fall setzt voraus, daß $\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 > h$, oder $\frac{h_1}{h} > \frac{\gamma}{\gamma_1}$ sei. Es ist hiernach leicht zu ermessen, daß in diesem Falle der emporsteigende Wasserstrahl $FK$ über die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ steigen kann. Ist $GM = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$ die auf Wasser reducirte Höhe der Flüssigkeit, so giebt $M$ das Niveau an, welches der steigende Strahl fast erreicht.

Fließt das Wasser nicht frei, sondern unter Wasser aus, so tritt wegen des Gegendruckes eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ein. Ist die Mündung $F$ des Gefäßes $AC$, Fig. 675, um die Höhe $FG = h$ unter dem Wasserspiegel $HR$ des Oberwassers, und um die Höhe $FG_1 = h_1$ unter dem Wasserspiegel $H_1 R_1$ des Unterwassers, so hat man von oben nach unten die Pressung:

Fig. 675.




$$p = h\gamma,$$

und von unten nach oben die Gegenpressung:

$$p_1 = h_1 \gamma,$$

daher die Kraft des Ausflusses:

Digitized by Google

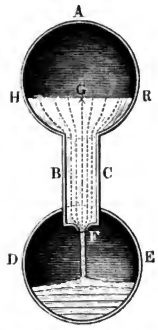
$$p - p_1 = (h - h_1)\,\gamma,$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{p - p_1}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g\,(h - h_1)}.$$

Beim Ausflusse unter Wasser ist also der Niveauabstand $h - h_1$ zwischen den Wasserspiegeln als Druckhöhe anzusehen.

Fig. 676.




Wird das Wasser auf der Seite der Ausmündung durch die Kraft $p$ und auf der Seite der Einmündung oder des Wasserspiegels durch die Kraft $p_1$ gepreßt, so hat man nun allgemein:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}.$$

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn das Wasser aus einem verschlossenen Gefäße $ABC$ in ein anderes verschlossenes Gefäß $DE$, Fig. 676, fließt. Es ist hier $h$ die Tiefe $FG$ der Mündung $F$ unter dem Wasserspiegel $HR$, $p_1$ die Pressung der Luft in $AHR$, und $p$ die Pressung der Luft, oder, nach Befinden, des Dampfes, in $DE$.

Beispiele. Wenn der Kolben im 12 Zoll weiten Cylinder oder Stiefel einer Feuerspritze mit 3000 Pfund Kraft niedergedrückt wird und Hinderniſſe in den Röhren und Schläuchen nicht vorkämen, so würde das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}} = \sqrt{2g\frac{P_1}{G\gamma}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3000}{\frac{\pi}{4}\cdot 66}}$$

$$= 7{,}906\,.\sqrt{\frac{2000}{11\,\pi}} = 60{,}14 \text{ Fuß}$$

durch das Mundstück am Schlauche ausströmen und, vertical gerichtet, auf die Höhe

$$h = 0{,}016\,.\,v^2 = 57{,}9 \text{ Fuß}$$

steigen.

2) Wenn das Wasser in einen luftverdünnten Raum einströmt, z. B. in den Condensator einer Dampfmaschine, während es von oben oder an seiner freien Oberfläche von der Atmosphäre gedrückt wird, so ist die letzte Formel

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit in Anwendung zu bringen. Ist die Druckhöhe des Wassers $h = 3$ Fuß, der äußere Barometerstand 27 und der innere 4 Pariser Zoll, so hat man:

$$\frac{p_1 - p}{\gamma} = 27 - 4 = 23 \text{ Pariser Zoll} = \frac{23}{12}\cdot 1{,}035 = 1{,}9837 \text{ preuß. Fuß},$$

oder als Wassersäule

$$= 13{,}6\,.\,1{,}9837 = 26{,}98 \text{ Fuß},$$

Digitized by Google

und es folgt die Geschwindigkeit des in den inneren oder luftverdünnten Raum einströmenden Wassers:

$$v = 7{,}906\sqrt{3 + 26{,}98} = 7{,}906\sqrt{29{,}98} = 43{,}29 \text{ Fuß}.$$

3) Steht das Wasser in der Speiseröhre eines Dampfkessels 12 Fuß über der Oberfläche des Wassers im Kessel, und ist der Dampfdruck 20 Pfund, der Luftdruck aber nur 15 Pfund auf den Quadratzoll, so beträgt die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in den Kessel eintritt:

$$v = 7{,}906\sqrt{12 + \frac{(15 - 20).144}{66}} = 7{,}906\sqrt{12 - \frac{5.144}{66}}$$
$$= 7{,}906\sqrt{1{,}0909} = 8{,}25 \text{ Fuß}.$$

§. 400 **Hydraulischer Druck.** Wenn das in einem Gefäße eingeschlossene Wasser in Bewegung ist, so drückt es gegen die Gefäßwände schwächer, als wenn es in Ruhe bleibt. Man hat daher den hydrodynamischen oder hydraulischen Wasserdruck von dem hydrostatischen Drucke des Wassers zu unterscheiden. Ist $p_1$ der Druck auf jede Einheit des Wasserspiegels $H_1 R_1 = G_1$, Fig. 677, $p$ der Druck außerhalb der Mündung $F$, und $h$ die Druckhöhe $F G_1$, so hat man für die Ausflußgeschwindigkeit:

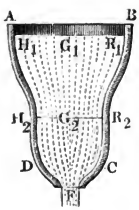
$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2},$$

oder:

$$h + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g};$$

ist ferner in einem anderen Querschnitte $H_2 R_2 = G_2$, welcher um die Höhe $F G_2 = h_1$ über der Mündung steht, der Druck $= p_2$, so hat man ebenso:

Fig. 677.




$$h_1 + \frac{p_2 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Subtrahirt man beide Ausdrücke von einander, so folgt:

$$h - h_1 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

oder, wenn man die Druckhöhe $\overline{G_1 G_2}$ der Schicht $\overline{H_2 R_2} = G_2$, durch $h_2$ bezeichnet, das Maß des hydraulischen Wasserdrucks in $\overline{H_2 R_2}$:

$$\frac{p_2}{\gamma} = h_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber noch $\frac{Fv}{G_1}$ die Geschwindigkeit $v_1$ des Wassers in der Oberfläche $G_1$, und $\frac{Fv}{G_2}$ die Geschwindigkeit $v_2$ des Wassers im Querschnitte $G_2$, daher läßt sich einfacher

Digitized by Google

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) \text{ setzen.}$$

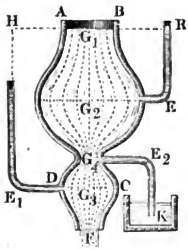
Es ist also hiernach die hydraulische Druckhöhe $\frac{p_2}{\gamma}$ an irgend einer Stelle im Gefäße gleich der hydrostatischen Druckhöhe $\frac{p_1}{\gamma} + h_2$ vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen des Wassers an dieser und an der Eintrittsstelle. Ist die freie Oberfläche $G_1$ des Wassers groß, so kann man die Zuflußgeschwindigkeit außer Acht lassen, und daher

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \frac{v_2^2}{2g}$$

setzen, und es ist hiernach die hydraulische Druckhöhe um die Geschwindigkeitshöhe kleiner, als die hydrostatische Druckhöhe. Je schneller also das Wasser in einer Röhrenleitung fließt, je schwächer drückt dasselbe gegen die Röhrenwand. Aus diesem Grunde zerspringen die Röhren oft dann erst, oder lassen erst dann Wasser durch, wenn die Bewegung des Wassers in denselben gehemmt wird, wenn sich die Röhren verstopfen u. s. w.

Durch einen in Fig. 678 abgebildeten Ausflußapparat $ABCD$ kann man die Verschiedenheit zwischen dem hydraulischen und dem hydrostatischen Drucke vor Augen führen. Führt man von dem Querschnitte $G_2$ ein Röhrchen $ER$ in die Höhe, so füllt sich dasselbe mit Wasser, und dieses steigt in demselben über das Niveau des Wasserspiegels, wenn $G_2 > G_1$, also $v_2 < v_1$ ist, denn da der Druck $p_1$ auf den Wasserspiegel durch den Luftdruck an der Röhrenmündung aufgehoben wird, so läßt sich die den Druck in $G_2$ messende Höhe

Fig. 678.




$$x = \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

setzen, und es fällt also $x > h_2$ aus, wenn $\frac{v_2^2}{2g} < \frac{v_1^2}{2g}$ ist. Ist dagegen der Querschnitt $G_3 < G_1$, fließt also das Wasser durch $G_3$ schneller als durch $G_1$, so hat man die Höhe der Wassersäule in dem bei $G_3$ einmündenden Röhrchen $E_1$:

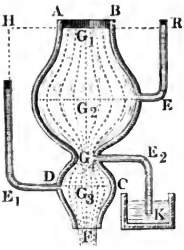
$$y = h_3 - \left(\frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

kleiner als $h_3$, und es reicht sonach dieselbe nicht bis zum Niveau $HR$ von $G_1$. Ist endlich $G_4$ sehr klein, und also die entsprechende Geschwindigkeit

Digitized by Google

$v_4$ sehr groß, so kann sogar $\frac{v_4^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} > h_4$, und daher die entsprechende hydraulische Druckhöhe $z$ negativ sein, d. h. die Luft von außen mehr drücken als das Wasser von innen. Dann wird also in einem nach unten geführten und unter Wasser ausmündenden Röhrchen $E_2K$ eine Wassersäule emporsteigen, welche in Vereinigung mit dem Wasserdrucke dem äußeren Atmosphärendrucke das Gleichgewicht hält. Ist dieses Röhrchen kurz, so steigt sogar das zu diesem Zwecke vielleicht gefärbte Wasser aus dem untergesetzten Gefäße $K$ durch das Röhrchen empor, tritt in das Ausflußreservoir und gelangt bei $F$ mit zum Ausflusse.

Fig. 679.

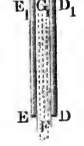



Anmerkung. Besteht das Ausflußgefäß $ACE$, Fig. 680, aus einem weiten Reservoir $AC$ und aus einer engeren vertical stehenden Röhre $CE$, so ist der hydraulische Druck an allen Stellen dieser Röhre negativ. Läßt man den Atmosphärendruck $p_1$ unberücksichtigt, so ist der Druck des Wassers in der Nähe der Ausmündung $F$, = Null zu setzen, weil hier die ganze Druckhöhe $GF = h$ auf die Erzeugung der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ verwendet wird, dagegen ist an einer Stelle $D_1E_1$, welche um die Höhe $G_1G = h_1$ unter dem Wasserspiegel steht, die hydraulische Druckhöhe

$$= h_1 - h = -(h - h_1)$$

negativ; wenn also ein Loch in diese Röhre gebohrt wird, so fließt hier kein Wasser heraus, es wird vielmehr Luft eingesaugt, die bei $F$ mit zum Ausflusse gelangt. Dieser negative Druck ist unmittelbar unter dem Gefäße am größten, weil hier $h_2$ am kleinsten ausfällt.

Fig. 680.




**§. 401 Rectanguläre Seitenöffnung.** Mit Hülfe der Formel

$$Q = Fv = F\sqrt{2gh}$$

läßt sich die in einer Secunde ausfließende Wassermenge nur dann unmittelbar berechnen, wenn die Mündung horizontal ist, weil nur hier im ganzen Querschnitte $F$ einerlei Geschwindigkeit vorkommt; hat aber der Querschnitt der Mündung eine Neigung gegen den Horizont, befindet sich z. B. die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefäßes, so fließen die in verschiedenen Tiefen befindlichen Wasserelemente mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, und es kann die Wassermenge $Q$ nicht als ein Prisma angesehen werden, und daher auch die Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Es ist allgemein

Digitized by Google

$$Q = F_1\sqrt{2gh_1} + F_2\sqrt{2gh_2} + F_3\sqrt{2gh_3} + \cdots$$
$$= \sqrt{2g}(F_1\sqrt{h_1} + F_2\sqrt{h_2} + F_3\sqrt{h_3} + \cdots)$$

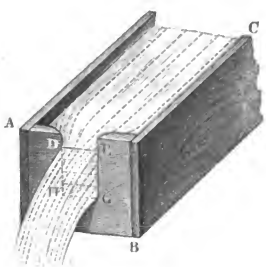
zu setzen, wobei $F_1$, $F_2$, $F_3$ ... die Inhalte und $h_1$, $h_2$, $h_3$ ... die Druckhöhen der Theile der Mündung bezeichnen.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß durch einen Wandeinschnitt oder der sogenannte Ueberfall, Fig. 681, dar. Dieser Wandeinschnitt bildet eine rectanguläre Ausflußöffnung $DEGH$, deren Breite $DE = GH$ durch $b$ und Höhe $DH = EG$ durch $h$ bezeichnet werden möge. Zerlegen wir diese Fläche $bh$ durch Horizontallinien in eine sehr große Anzahl $n$ gleich breiter Streifen, so können wir innerhalb eines jeden einerlei Geschwindigkeit voraussetzen. Da, von oben nach unten gegangen, die Druckhöhen dieser Streifen

$$\frac{h}{n},\ \frac{2h}{n},\ \frac{3h}{n} \text{ u. s. w.}$$

sind, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten:

Fig. 681.




$$\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}},$$

und da ferner der Inhalt eines Streifens $= b\cdot\frac{h}{n} = \frac{bh}{n}$ ist, so hat man die zugehörigen Wassermengen:

$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.;}$$

und folglich das Wasserquantum durch den ganzen Querschnitt:

$$Q = \frac{bh}{n}\left(\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} + \cdots\right)$$
$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n})\cdot$$

Nun ist aber, wie im „Ingenieur“, Seite 88, angegeben wird,

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n},$$

oder:

$$1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + \cdots + n^{1/2}, = \frac{n^{1+1/2}}{1+1/2} = {}^2/_3\, n^{3/2} = {}^2/_3\, n\sqrt{n};$$

daher folgt die in Frage stehende Wassermenge:

Digitized by Google

$$Q = \frac{b h \sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}} \cdot {}^2/_3 n\sqrt{n} = {}^2/_3 b h \sqrt{2gh} = {}^2/_3 b \sqrt{2gh^3}.$$

Versteht man unter der mittleren Geschwindigkeit $v$ diejenige, welche an allen Stellen vorhanden sein müßte, damit ebenso viel Wasser ausfließt, als bei den verschiedenen Ausflußgeschwindigkeiten innerhalb des ganzen Querprofiles, so läßt sich setzen:

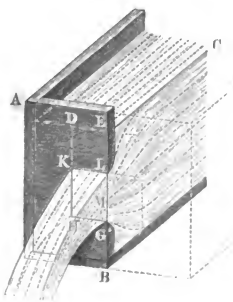
$$Q = bh.v, \text{ und es folgt sonach:}$$

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2gh},$$

d. h. es ist die mittlere Geschwindigkeit des durch einen rectangulären Wandeinschnitt ausfließenden Wassers zwei Drittel von der Geschwindigkeit an der Schwelle oder unteren Kante des Einschnittes.

Reicht die rectanguläre Ausflußöffnung $KG$, Fig. 682, mit horizontaler Schwelle $GH$ nicht bis zum Wasserspiegel $CE$, so findet man die Ausflußmenge, wenn man dieselbe als die Differenz zweier Wandeinschnitte $DEGH$ und $DELK$ ansieht. Ist $h_1$ die Tiefe $EG$ der unteren und $h_2 = EL$ die der oberen Kante, so hat man die Ausflußmenge dieser Einschnitte:

Fig. 682.




$${}^2/_3 b \sqrt{2g h_1^3},$$

und

$${}^2/_3 b \sqrt{2g h_2^3},$$

daher das Wasserquantum für die rectanguläre Oeffnung $GHKL$:

$$Q = {}^2/_3 b \sqrt{2g h_1^3} - {}^2/_3 b \sqrt{2g h_2^3} = {}^2/_3 b \sqrt{2g}\,(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}),$$

und die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{b\,(h_1 - h_2)} = {}^2/_3 \sqrt{2g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

Ist $h$ die mittlere Druckhöhe $EM = \dfrac{h_1 + h_2}{2}$, oder die Tiefe des Mittelpunktes der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und $a$ die Oeffnungshöhe $KH = LG = h_1 - h_2$, so kann man setzen:

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2g} \cdot \frac{\left(h + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(h - \frac{a}{2}\right)^{3/2}}{a}, \text{ oder annähernd:}$$

$$= \left[1 - {}^1/_{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right] \sqrt{2gh}.$$

Digitized by Google

**Beispiel.** Wenn eine rectanguläre Ausflußöffnung 3 Fuß breit und $1\frac{1}{4}$ Fuß hoch ist, und die untere Kante um $2\frac{3}{4}$ Fuß unter dem Wasserspiegel liegt, so ist die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q = \tfrac{2}{3} \cdot 7{,}906 \cdot 3\ (2{,}75^{3/2} - 1{,}5^{3/2}) = 15{,}812\ (4{,}560 - 1{,}837)$$
$$= 15{,}812 \cdot 2{,}723 = 43{,}06 \text{ Cubikfuß.}$$

Nach der Näherungsformel beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \left[1 - \tfrac{1}{96}\left(\frac{1{,}25}{2{,}125}\right)^2\right] \cdot 7{,}906\sqrt{2{,}125} = (1 - 0{,}0036) \cdot 11{,}525$$
$$= 11{,}525 - 0{,}042 = 11{,}483 \text{ Fuß,}$$

und daher die Ausflußmenge:

$$Q = 3 \cdot \tfrac{5}{4} \cdot 11{,}483 = 43{,}06 \text{ Cubikfuß.}$$

Anmerkung. Wenn der Wandeinschnitt unter dem Winkel $\delta$ gegen den Horizont geneigt ist, so hat man die Mündungshöhe $\frac{h_1 - h_2}{\sin.\,\delta}$ statt ihrer Verticalprojection $(h_1 - h_2)$ einzuführen, weshalb

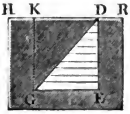
$$Q = \tfrac{2}{3} \frac{b\sqrt{2g}}{\sin.\,\delta} (\sqrt{h_1^3} - \sqrt{h_2^3})$$

zu setzen ist. Ist der Querschnitt des Ausflußreservoirs parallel zur Mündung nicht bedeutend größer als der Querschnitt der Mündung, so hat man noch die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{F}{G} v$ des ankommenden Wassers zu berücksichtigen, und deshalb zu setzen:

$$Q = \tfrac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\left[\left(h + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

**Trianguläre Seitenöffnung.** Außer rectangulären Seitenöffnungen kommen noch trianguläre und kreisförmige Mündungen in der Praxis vor. Handeln wir zunächst von dem Ausflusse durch eine triangulären Mündung $DEG$, Fig. 683, mit horizontaler Basis $EG$ und der im Wasserspiegel $HR$ befindlichen Spitze $D$. Setzen wir die Basis $EG = b$ und die Höhe $DE = h$, theilen wir die letztere in $n$ gleiche Theile und führen wir durch die Theilpunkte Parallellinien zur Basis, so zerlegen wir die ganze Fläche in schmale Elemente von den Inhalten $\frac{b}{n} \cdot \frac{h}{n}$, $\frac{2b}{n} \cdot \frac{h}{n}$, $\frac{3b}{n} \cdot \frac{h}{n}$ u. s. w., und den Druckhöhen $\frac{h}{n}$, $\frac{2h}{n}$, $\frac{3h}{n}$ u. s. w. Für diese folgen die Ausflußmengen:

Fig. 683.




§. 402

$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g \cdot \frac{h}{n}},\ \frac{2bh}{n^2}\sqrt{2g \cdot \frac{2h}{n}},\ \frac{3bh}{n^2}\sqrt{2g \cdot \frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.}$$

und es ergiebt sich durch Summation derselben die Ausflußmenge für die ganze trianguläre Mündung:

Digitized by Google

$$Q = \frac{b\,h}{n^2}\sqrt{2\,g\,\frac{h}{n}}\,(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n})$$
$$= \frac{b\,h\sqrt{2\,g\,h}}{n^2\sqrt{n}}\,(1^{3/2} + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \cdots + n^{3/2}),$$

oder da die Reihe in der Parentheſe, $= \frac{n^{3/2+1}}{3/2 + 1} = {}^2/_5\,n^{5/2}$ giebt,

$$Q = {}^2/_5\,b\,h\sqrt{2\,g\,h} = {}^2/_5\,b\sqrt{2\,g\,h^3}.$$

Liegt die Baſis $DK$ der Mündung $DGK$ im Waſſerſpiegel und die Spitze $G$ um $h$ tiefer, ſo hat man, da durch das Rechteck $DEGK$, ${}^2/_3\,b\,h\sqrt{2\,g\,h}$ ausfließt, die entſprechende Waſſermenge:

$$Q = {}^2/_3\,b\,h\sqrt{2\,g\,h} - {}^2/_5\,b\,h\sqrt{2\,g\,h} = {}^4/_{15}\,b\,h\sqrt{2\,g\,h}.$$

Durch das Trapez $ABCD$, Fig. 684, deſſen obere im Waſſerſpiegel liegende Baſis $AB = b_1$ und deſſen untere Baſis $CD = b_2$ und Höhe $DE = h$ iſt, findet man die Waſſermenge durch Zuſammenſetzung aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken, nämlich:

$$Q = {}^2/_3\,b_2\,h\sqrt{2\,g\,h} + {}^4/_{15}\,(b_1 - b_2)\,h\sqrt{2\,g\,h}$$
$$= {}^2/_{15}\,(2\,b_1 + 3\,b_2)\,h\sqrt{2\,g\,h}.$$

Fig. 684.

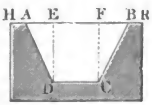
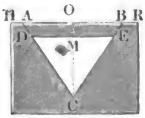



Fig. 685.

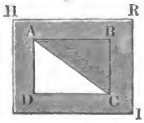



Ferner folgt noch die Ausflußmenge für ein Dreieck $CDE$, Fig. 685, deſſen Baſis $DE = b_1$ um die Höhe $OM = h_1$ und deſſen Spitze $C$ um $OC = h$ von dem Waſſerſpiegel $HR$ abſteht:

$Q$ = Waſſermenge durch $ABC$ minus Waſſermenge durch $AE$
$$= {}^4/_{15}\,b\,h\sqrt{2\,g\,h} - {}^2/_{15}\,(2\,b + 3\,b_1)\,h_1\sqrt{2\,g\,h_1}$$
$$= {}^2/_{15}\sqrt{2\,g}\,[2\,b\,(h^{3/2} - h_1^{3/2}) - 3\,b_1\,h_1^{3/2}].$$

Da ſich die Breite $AB = b$ durch die Proportion $b : b_1 = h : (h - h_1)$ beſtimmen läßt, ſo folgt:

Fig. 686.




$$Q = \frac{2\sqrt{2\,g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2\,h\,(h^{3/2} - h_1^{3/2})}{h - h_1} - 3\,h_1^{3/2}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2\,g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2\,h^{3/2} - 5\,h\,h_1^{3/2} + 3\,h_1^{5/2}}{h - h_1}\right).$$

Endlich ergiebt ſich noch für ein Dreieck $ACD$, Fig. 686, deſſen Spitze $A$ über der Baſis liegt, die Ausflußmenge:

Digitized by Google

$$Q = {}^2/_3 \sqrt{2g} \cdot b_1 (h^{3/2} - h_1^{3/2}) - \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left( \frac{2h^{5/2} - 5h h_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left( \frac{3h^{5/2} - 5h_1 h^{3/2} + 2h_1^{5/2}}{h - h_1} \right).$$

Beiſpiel. Welche Waſſermaſſe fließt durch das Quadrat $ABCD$, Fig 687, mit verticaler Diagonale $AC$ von 1 Fuß Länge, wenn der Eckpunkt $A$ bis zum Waſſerſpiegel reicht? Die obere Hälfte dieſes Quadrates giebt die Ausflußmenge:

$Q = {}^2/_5 \, b \sqrt{2g h^3} = {}^2/_5 . 1 . 7{,}906 \sqrt{1/_8} = 1{,}581 . 0{,}7071 = 1{,}118$ Cubikfuß,

und die untere die Waſſermenge:

Fig. 687.

$$Q_1 = \frac{2b\sqrt{2g}}{15} \left( \frac{2h^{5/2} - 5h h_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1} \right)$$

$$= \frac{2 . 7{,}906}{15} \left( \frac{2 - 5\,(1/2)^{3/2} + 3\,(1/2)^{5/2}}{1 - 1/2} \right)$$

$$= \frac{31{,}624}{15} (2 - 1{,}7678 + 0{,}5303)$$

$$= \frac{31{,}624 . 0{,}7625}{15} = 1{,}608 \text{ Cubikfuß},$$

folglich fließt durch die ganze Mündung die Waſſermenge:

$$Q = 1{,}118 + 1{,}608 = 2{,}726 \text{ Cubikfuß}.$$

**Kreisförmige Seitenöffnung.** Für eine kreisförmige Mündung §. 403
$AB$, Fig. 688, beſtimmt ſich die Ausflußmenge nur durch eine auf folgende Weiſe zu ermittelnde Näherungsformel. Zerlegen wir den Kreis durch concentriſche Kreiſe in gleich ſchmale Ringe, und jeden Ring in lauter gleiche, als Parallelogramme anzuſehende Elemente. Iſt nun $r$ der Halbmeſſer eines ſolchen Ringes, $b$ deſſen Breite und $n$ die Anzahl ſeiner Elemente, folglich $\frac{2\pi r}{n}$ die Länge eines Ringelementes, ſo hat man die Größe deſſelben:

Fig. 688.

$$K = \frac{2\pi r b}{n}.$$

Iſt ferner $h$ die Tiefe $CG$ des Mittelpunktes $C$ unter dem Waſſerſpiegel $HR$, und $\varphi$ der Winkel $ACK$, um welchen ein Element $K$ vom höchſten Punkte $A$ des Ringes abſteht, ſo hat man die Druckhöhe dieſes Elementes:

$$KN = CG - CL = h - r\cos.\varphi,$$

und daher die Ausflußmenge dieſes Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n} \sqrt{2g\,(h - r\cos.\varphi)}.$$

Nun iſt aber:

Digitized by Google

$$\sqrt{h - r\cos.\varphi}$$
$$= \sqrt{h}\left[1 - {}^1/_2\,\frac{r}{h}\cos.\varphi - {}^1/_8\left(\frac{r}{h}\right)^2\cos.\varphi^2 + \cdots\right]$$
$$= \sqrt{h}\left[1 - {}^1/_2\,\frac{r}{h}\cos.\varphi - {}^1/_{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2(1 + \cos.2\varphi) + \cdots\right],$$

daher folgt die Ausflußmenge eines Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[1 - {}^1/_2\cdot\frac{r}{h}\cos.\varphi - {}^1/_{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2(1 + \cos.2\varphi) + \cdots\right].$$

Die Ausflußmenge des ganzen Ringes ergiebt sich, wenn man in der Parenthese statt $1$, $n.1 = n$, statt $\cos.\varphi$ die Summe aller Cosinus $\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und statt $\cos.2\varphi$ die Summe aller Cosinus $2\varphi$ von $2\varphi = 0$ bis $2\varphi = 4\pi$ nimmt. Da aber die Summe aller Cosinus eines Vollkreises = Null ist, so fallen diese Cosinus ganz aus, und es folgt die Ausflußmenge für den Ring:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[n - {}^1/_{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2\cdot n - \cdots\right]$$
$$= 2\pi r b\sqrt{2gh}\left[1 - {}^1/_{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right].$$

Setzt man man jetzt statt $b$, $= \frac{r}{m}$ und statt $r$, $\frac{r}{m}$, $\frac{2r}{m}$, $\frac{3r}{m}$ bis $\frac{mr}{m}$, so erhält man die Ausflußmenge aller die ganze Kreisfläche ausmachenden Ringe, und es folgt zuletzt das Ausflußquantum des ganzen Kreises:

$$Q = 2\pi r\sqrt{2gh}\left(\frac{r}{m^2}(1+2+3+\cdots+m) - {}^1/_{16}\frac{r^3}{m^4h^2}(1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right)$$
$$= 2\pi r\sqrt{2gh}\cdot\left(\frac{r}{m^2}\cdot\frac{m^2}{2} - {}^1/_{16}\cdot\frac{r^3}{m^4h^2}\cdot\frac{m^4}{4}\right)$$
$$= \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right],$$

oder genauer:

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - {}^5/_{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \cdots\right].$$

Reicht der Kreis bis zum Wasserspiegel, so ist

$$Q = {}^{987}/_{1024}\,\pi r^2\sqrt{2gh} = 0{,}964\,F\sqrt{2gh},$$

wenn $F = \pi r^2$, den Inhalt der ganzen Kreisfläche bezeichnet.

Uebrigens ist leicht zu erachten, daß man in allen den Fällen, wenn die Druckhöhe im Mittelpunkte gleich oder größer ist als der Durchmesser der Mündung, den Werth der ganzen Reihe $= 1$ setzen und

$$Q = F\sqrt{2gh}$$

annehmen kann. Auch läßt sich diese Regel auf andere Mündungen anwenden, und also in allen den Fällen, wenn der Schwerpunkt einer Mündung

Digitized by Google

mindestens ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als die Mündung hoch ist, die Tiefe $h$ dieses Punktes als Druckhöhe ansehen und

$$Q = F\sqrt{2gh}$$ setzen.

Wenn man in Betracht zieht, daß das Mittel aller Cosinus des ersten Quadranten $= \frac{2}{\pi}$ und das Mittel aller Cosinus des zweiten Quadranten $= -\frac{2}{\pi}$, also das Mittel aller Cosinus des ersten und zweiten Quadranten $=$ Null ist, so bestimmt sich auf dem oben eingeschlagenen Wege die Ausflußmenge des oberen Halbkreises:

$$Q_1 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]$$
$$= F\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right],$$

und die durch den unteren Halbkreis:

$$Q_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= F\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \cdots\right],$$

wobei $F$ den Inhalt der Mündung bezeichnet.

Uebrigens gelten diese Formeln für $Q$, $Q_1$ und $Q_2$ auch bei elliptischen Mündungen mit horizontaler Axe, da die Ausflußmengen, unter übrigens gleichen Verhältnissen, den Breiten der Mündungen proportional sind, und die Breiten einer Ellipse mit den Breiten eines gleichhohen Kreises proportional wachsen (s. analyt. Hülfslehren, Art. 12).

Beispiel. Welche Wassermenge fließt stündlich durch eine kreisförmige Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser, über welcher der Wasserspiegel eine Linie hoch steht? Es ist hier:

$$\frac{r}{h} = {}^6/_7, \text{ daher } \left(\frac{r}{h}\right)^2 = {}^{36}/_{49} = 0{,}735,$$

ferner:

$$1 - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 = 1 - 0{,}023 = 0{,}977,$$

und folglich die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot 12 \cdot 7{,}906\sqrt{\frac{7}{144}} \cdot 0{,}977 = \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}906 \cdot 0{,}977\sqrt{7} = 16{,}05 \text{ Cubikzoll},$$

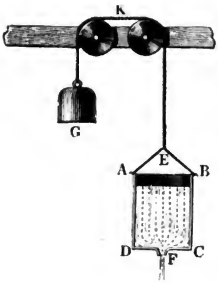
pr. Minute $= {}_{\frac{1}{2}}963$ Cubikzoll, und pr. Stunde $= 33{}^1/_2$ Cubikfuß.

**Bewegte Ausflussgefässe** Die Ausflußgeschwindigkeit ändert sich, wenn ein vorher in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindliches Gefäß in Bewegung übergeht, oder seinen Bewegungszustand ändert, weil in diesem Falle jedes Wassertheilchen außer seinem Gewichte auch noch durch seine Trägheit gegen die Umgebung wirkt. §. 404

Digitized by Google

Bewegt man das Gefäß $AC$, Fig. 689, beschleunigt vertical aufwärts, während das Wasser durch die Bodenöffnung $F$ abfließt, so findet eine Vergrößerung, und bewegt man es beschleunigt vertical abwärts, so findet eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit statt. Ist die Acceleration $p$, so drückt jedes Wassermassenelement $M$ nicht bloß durch sein Gewicht $Mg$, sondern auch durch seine Trägheit $Mp$, es ist folglich die Kraft eines jeden Elementes in einem Falle $(g + p)M$ und im zweiten $(g - p)M$, also statt $g$, $g \pm p$ zu setzen. Hiernach folgt

Fig. 689.




$$\frac{v^2}{2} = (g \pm p)\, h$$

und sonach für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\,(g \pm p)\, h}.$$

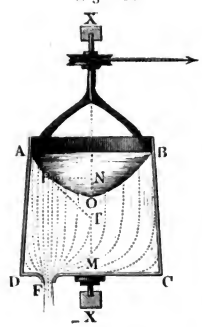
Steigt das Gefäß mit der Acceleration $g$ empor, so ist

$$v = \sqrt{2.2gh} = 2\sqrt{gh},$$

also die Ausflußgeschwindigkeit 1,414 mal so groß als beim stillstehenden Gefäße. Fällt das Gefäß durch sein eigenes Gewicht, also mit der Acceleration $g$, so ist $v = \sqrt{0} = 0$, dann fließt also kein Wasser aus. Bewegt sich das Gefäß gleichförmig auf- oder abwärts, so bleibt $v = \sqrt{2gh}$, steigt es aber verzögert, so wird $v = \sqrt{2\,(g - p)\, h}$, und fällt es verzögert, so fällt $v = \sqrt{2\,(g + p)\, h}$ aus.

Bewegt man das Ausflußgefäß horizontal oder unter einem schiefen Winkel gegen den Horizont, so stellt sich (s. §. 354) der Wasserspiegel schief gegen den Horizont und es findet daher auch eine Veränderung der Ausflußgeschwindigkeit statt.

Fig. 690.




Bei Umdrehung eines Gefäßes $AC$, Fig. 690, um seine verticale Axe $X\overline{X}$ bildet nach §. 354 der Wasserspiegel einen paraboli-schen Trichter $AOB$, es steht daher über der Mitte $M$ des Bodens eine kleinere Druckhöhe $MO$, als nahe am Rande desselben, und es fließt daher auch durch eine Mündung in der Axe das Wasser langsamer, als durch jede andere gleich große Bodenöffnung $F$. Bezeichnet $h$ die Druckhöhe $MO$ in der Mitte $M$, so wäre die Ausflußgeschwindigkeit durch eine Mündung

Digitized by Google

daselbst, $= \sqrt{2gh}$; bezeichnet aber $y$ die Entfernung $MF = NP$ einer Mündung $F$ von der Axe $X\overline{X}$, und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit, so hat man, da die Subtangente $TN$ des Parabelbogens $OP$ der doppelten Abscisse $ON$ gleich ist, die entsprechende Erhebung des Wassers über der Mitte $O$:

$$ON = {}^1/_2\, TN = {}^1/_2\, PN.tang.\, NPT,$$

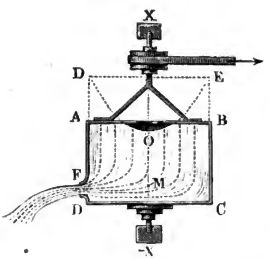
folglich, wenn man noch $tang.\, NPT = tang.\, \varphi = \frac{\omega^2 y}{g}$ (s. §. 354) einführt, und die Umdrehungsgeschwindigkeit von $F$, d. i. $\omega y$, durch $w$ bezeichnet,

$$ON = x = {}^1/_2\, y \cdot \frac{\omega^2 y}{g} = \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}.$$

Hiernach ist denn die Ausflußgeschwindigkeit für die Mündung $F$:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{w^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + w^2}.$$

Fig. 691.




Diese Formel gilt für jedes beliebig gestaltete Gefäß, und auch dann noch, wenn es oben verschlossen ist, wie z. B. für $AC$, Fig. 691, so daß sich der Trichter $DOE$ gar nicht vollständig bilden kann. Es ist auch hier $h$ die Tiefe $MO$ der Mündung unter dem Scheitel $O$ des Trichters, und $v$ die Umdrehungsgeschwindigkeit von der Mündung. Sie findet bei den Reactionsrädern und Turbinen in der Folge ihre Anwendung.

**Beispiele.** 1) Wenn das mit Wasser angefüllte Gefäß $AC$, Fig. 689, 350 Pfund wiegt und mittels eines über Leitrollen $K$ gehenden Seiles durch ein Gewicht $G$ von 450 Pfund aufgezogen wird, so steigt es mit einer Acceleration:

$$p = \frac{450 - 350}{450 + 350} \cdot g = \frac{100}{800}\, g = {}^1/_8 g,$$

und es ist deshalb die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\,(g + p)\,h} = \sqrt{2 \,.\, {}^9/_8 \,.\, gh} = \sqrt{{}^9/_4\, gh}.$$

Wäre die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, so würde folglich die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{9 \,.\, g} = 3\sqrt{31{,}25} = 16{,}77 \text{ Fuß betragen.}$$

2) Wenn sich das mit Wasser angefüllte Gefäß $AC$, Fig. 691, so umdreht, daß es in der Minute 100 Umdrehungen macht, während die Tiefe der Mündung $F$ unter dem Wasserspiegel in der Mitte 2 Fuß und die Entfernung von der Axe $X\overline{X}$, 3 Fuß beträgt, so ist die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh + w^2} = \sqrt{62{,}5 \,.\, 2 + \left(\frac{3 \,.\, \pi \,.\, 100}{30}\right)^2} = \sqrt{125 + 100 \,.\, \pi^2}$$

$$= \sqrt{125 + 987} = \sqrt{1112} = 33{,}35 \text{ Fuß.}$$

Steht das Gefäß still, so ist $v = \sqrt{125} = 11{,}18$ Fuß.



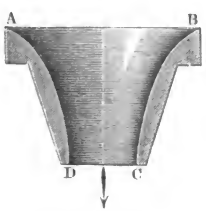
Digitized by Google

## Zweites Capitel.

## Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

§. 405 **Geschwindigkeitscoefficient.** Die in dem vorstehenden Capitel entwickelten Ausflußgesetze stimmen mit den Erfahrungen fast ganz überein, so lange die Druckhöhe in Ansehung der Mündungsweite nicht sehr klein ist, und so lange sich die Ausflußöffnung nach innen allmälig erweitert und sich, ohne Ecken und Kanten zu biden, an der Boden- oder Seitenfläche des Gefäßes anschließt. Die hierüber an glattpolirten metallenen Mundstücken angestellten Versuche von Michelotti, Eytelwein und Anderen, sowie auch die Versuche des Verfassers haben nachgewiesen, daß die effective oder wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 99 Procent von dem theoretisch bestimmten Wasserquantum ist. Das in der halben natürlichen Größe abgebildete Mundstück $AD$, Fig. 692, gab die effective Ausflußmenge, bei einer Druckhöhe von 10 Fuß, 98 Procent, bei 5 Fuß, 97 Procent und bei 1 Fuß, 96 Procent des theoretisch bestimmten Ausflußquantums (Versuche mit größeren Mündungen s. Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, zweite Abtheil.). Damit der Ausfluß durch ein solches Mundstück möglichst ungestört erfolge, muß die Abrundung desselben nicht nach einem Kreise, sondern nach einer Curve $AD = BC$ erfolgen, deren Krümmung von innen nach außen (von $A$ nach $D$) allmälig abnimmt. Da ferner bei diesem Ausflusse der Strahl mit der Mündung gleichen Querschnitt $F$ hat, so ist anzunehmen, daß diese Verminderung der Wassermenge aus einem Verluste an Geschwindigkeit hervorgeht, der in der Reibung oder Adhäsion des Wassers an dem inneren Umfange der Mündung und in der Klebrigkeit des Wassers seinen Grund hat. Wir nennen in der Folge das Verhältniß der effectiven Ausflußgeschwindigkeit zur theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ den Geschwindigkeitscoefficienten (franz. coefficient de vitesse; engl. coefficient of velocity) und bezeichnen denselben durch $\varphi$. Hiernach ist also die effective Ausflußgeschwindigkeit im einfachsten Falle:

Fig. 692.




$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh},$$

Digitized by Google

und die effective Ausflußmenge:

$$Q = Fv_1 = \varphi Fv = \varphi F\sqrt{2gh}.$$

Führen wir für $\varphi$ den mittleren Werth 0,975 ein, so erhalten wir für das Fußmaß:

$$Q = 0{,}975 \,.\, F\sqrt{2gh} = 0{,}975 \,.\, 7{,}906\, F\sqrt{h} = 7{,}708\, F\sqrt{h}.$$

Einer mit der Geschwindigkeit $v_1$ ausfließenden Wassermenge $Q$ wohnt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} \cdot v_1^2$ inne, vermöge welcher sie die mechanische Arbeit $Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{2g}$ zu leisten vermag. Da aber beim Niedersinken von der Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ das Gewicht $Q\gamma$ die Arbeit $Q\gamma \,.\, h = Q\gamma \frac{v^2}{2g}$ verrichtet, so folgt, daß durch den Ausfluß das Wasser den Arbeitsverlust

$$L = Q\gamma\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = (1 - \varphi^2)\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = (1 - 0{,}975^2)\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. i.

$$L = 0{,}049\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ oder } 4{,}9 \text{ Procent}$$

erleidet. Es wird also das ausfließende Wasser durch seine lebendige Kraft 4,9 Procent weniger Arbeit verrichten, als durch sein Gewicht beim Herabsinken von der Höhe $h$.

Anmerkung. Der Verfasser hat das durch die Formel $v = \sqrt{2gh}$ ausgedrückte Ausflußgesetz auch unter sehr verschiedenem, namentlich unter sehr hohem Druck von 100 Metern und unter sehr kleinem Druck von 0,02 Meter geprüft. Ein innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Weite gab bei den Druckhöhen:

| $h_2 =$ 0,02 Meter | 0,50 Meter | 3,5 Meter | 17 Meter | 103 Meter |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi =$ 0,959 | 0,967 | 0,975 | 0,994 | 0,994 |

s. Civilingenieur, Neue Folge, Band V, erstes und zweites Heft.

**Contractionscoefficient.** Fließt das Wasser durch eine Mündung in der dünnen Wand (franz. orifice en mince paroi; engl. orifice in a thin plate), so tritt unter übrigens gleichen Umständen eine bedeutende Verminderung der Ausflußmenge ein, indem die Wasserelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung hindurch gehen und dadurch einen zusammengezogenen oder contrahirten Wasserstrahl (franz. veine contractée; engl. contracted stream) hervorbringen. Die von Mehreren, §. 406



Digitized by Google

namentlich auch die in der neuesten Zeit von dem Verfasser angestellten Strahlenmessungen haben ergeben, daß der Strahl in einer Entfernung, die ungefähr der halben Mündungsweite gleich kommt, die stärkste Zusammenziehung und eine Dicke hat, die 0,8 des Durchmessers der Mündung gleichkommt. Ist $F_1$ der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles, sowie $F$ der Querschnitt der Mündung, so hat man hiernach:

$$F_1 = (0{,}8)^2\, F = 0{,}64\, F.$$

Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ dieser Querschnitte den Contractionscoefficienten (franz. coefficient de contraction; engl. coefficient of contraction) und bezeichnet ihn mit $\alpha$, und es ist sonach der mittlere Werth für den Ausfluß des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand $\alpha = 0{,}64$ zu setzen.

So lange man keine nähere Kenntniß über das Gesetz der Contraction der Wasserstrahlen hat, kann man annehmen, daß der durch eine kreisrunde Oeffnung $AB$, Fig. 693, fließende Strahl einen Rotationskörper $AEEA$ bilde, dessen Umfläche durch Umdrehung eines Kreisbogens $AE$ um die Axe $CD$ des Strahles entsteht. Setzen wir den Durchmesser $AA$ der Mündung, $= d$, und die Entfernung $CD$ des contrahirten Querschnittes $EE$ von der Mündung $= \frac{1}{2}d$, so erhalten wir für den Halbmesser $MA = ME = r$ des Erzeugungsbogens $AE$ mittels der Gleichung

Fig. 693.

$$\overline{AN}^2 = EN\,(2\,ME - EN)$$

oder

$$\frac{d^2}{4} = \frac{d}{10}\left(2\,r - \frac{d}{10}\right),$$

und hiernach

$$r = 1{,}3\,d.$$

Mündungen, nach dieser Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformt, geben so ziemlich die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_1 = 0{,}97\,.\,v.$$

Die Contraction des Wasserstrahles hat ihren Grund darin, daß nicht allein das Wasser, welches unmittelbar über der Mündung befindlich ist, ausfließt, sondern auch das zur Seite befindliche Wasser herbeiströmt und mit zum Ausflusse gelangt. Es findet also schon im Inneren des Gefäßes eine Convergenz der Wasserfäden, ähnlich wie sie die Figur andeutet, statt, und es besteht die Contraction des Wasserstrahles in einer bloßen Fortsetzung dieser Convergenz. Von dieser Bewegung des Wassers in der Nähe der Mündung kann man sich mit Hülfe eines gläsernen Ausflußapparates

Digitized by Google

überzeugen, wenn man kleine Körper, welche wenig leichter oder schwerer als Wasser sind, wie z. B. Sägespäne von Eichenholz, Stücke von Siegellack u. s. w., in das Wasser bringt und mit zum Ausflusse gelangen läßt.

**Contrahirte Wasserstrahlen.** Fließt das Wasser durch dreiseitige, §. 407
vierseitige Mündungen u. s. w. im dünnen Bleche, so nimmt der Wasserstrahl besondere Gestalten an. In die Augen fallend ist zumal die Umkehrung des Strahles, oder die veränderte Stellung seines Querschnittes in Hinsicht auf den Querschnitt der Mündung, vermöge welcher ein Eck dieses Querschnittes mit der Mitte einer Seite der Mündung gleichzuliegen kommt. Hiernach bildet bei einer dreiseitigen Mündung $ABC$, Fig. 694, der Querschnitt des Strahles in einem gewissen Abstande von der Mündung einen dreistrahligen Stern $DEF$, bei einer vierseitigen Mündung $ABCD$, Fig. 695, einen vierstrahligen Stern $EFGH$, ebenso bei einer fünfseitigen

Fig. 694.

Fig. 695.

Fig. 696.

Mündung $ABCDE$, Fig. 696, einen Stern $EGHKL$ mit fünf Strahlen u. s. w. Diese Querschnitte sind aber in verschiedenen Abständen von der Mündung sehr verschieden, sie nehmen auf einer gewissen Distanz ab und auf einer folgenden wieder zu u. s. w.; es besteht daher der Strahl aus Blättern oder Rippen von veränderlicher Breite und bildet dadurch, was namentlich beim Ausflusse unter sehr großem Drucke zu beobachten ist, Bäuche und Knoten, ähnlich wie die Cacteen. Ist die Mündung $ABCD$,

Fig. 697.

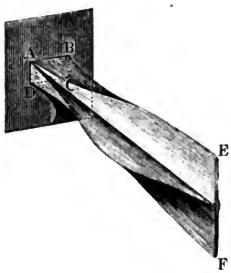



Fig. 697, rectangulär, so bildet in kleinerer Entfernung von der Mündung der Querschnitt zwar ebenfalls ein Kreuz oder einen Stern, allein in größerer Entfernung nimmt derselbe wieder mehr die Gestalt eines verwendeten Rechteckes $EF$ an.

Den Ausfluß bei den verschiedenartigsten Mündungen hat Bidone beobachtet; genaue Strahlenmessungen bei quadratischen Mündungen sind aber nur von Poncelet und Lesbros angestellt worden (s. Allgemeine Maschinenencyklopädie, Artikel „Ausfluß“). Die letzten

Digitized by Google

Messungen haben auf einen kleinen Contractionscoefficienten 0,563 geführt. Wassermessungen beim Ausflusse durch kleinere Mündungen führen aber auf größere Contractionscoefficienten, sie weisen sogar nach, daß dieselben bei langgezogenen Rechtecken größer sind als bei Rechtecken, die sich mehr den Quadraten nähern.

§. 408 **Ausflusscoefficient.** Wäre beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Geschwindigkeit gleich der theoretischen $v = \sqrt{2gh}$, so hätte man die effective Ausflußmenge

$$Q = \alpha F . v = \alpha F \sqrt{2gh},$$

weil $\alpha F$ den Querschnitt des Strahles an der Stelle der größten Zusammenziehung, wo sich die Wasserelemente in parallelen Richtungen bewegen, bezeichnet. Diesem ist aber keineswegs so, es zeigt sich vielmehr in der Erfahrung, daß $Q$ noch kleiner als $\alpha F \sqrt{2gh}$ ist, daß man also die theoretische Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ durch einen Coefficienten multipliciren muß, der kleiner als der Contractionscoefficient ist, um die effective Ausflußmenge zu erhalten. Wir müssen daher annehmen, daß beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand noch ein gewisser Geschwindigkeitsverlust eintrete, deshalb auch einen Geschwindigkeitscoefficienten $\varphi$ einführen und daher die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$$

setzen. Hiernach ist also die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = F_1 . v_1 = \alpha F . \varphi v = \alpha\varphi F v = \alpha\varphi F \sqrt{2gh}.$$

Nennen wir endlich noch das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge $Q_1$ zum theoretischen oder hypothetischen Ausflußquantum $Q$ den Ausflußcoefficienten (franz. coefficient de dépense; engl. coefficient of efflu-xion) und bezeichnen wir ihn in der Folge durch $\mu$, so haben wir:

$$Q_1 = \mu Q = \mu F v = \mu F \sqrt{2gh},$$

und daher

$$\mu = \alpha\varphi,$$

d. h. der Ausflußcoefficient ist das Product aus dem Contractions- und dem Geschwindigkeitscoefficienten.

Vielfältige Beobachtungen, namentlich aber auch die Messungen des Verfassers, haben darauf geführt, daß der Ausflußcoefficient für Mündungen in der dünnen Wand nicht constant ist, daß er bei kleinen Mündungen und kleinen Ausflußgeschwindigkeiten größer ist, als bei großen Mündungen und bei großen Geschwindigkeiten, daß er auch bei langen und schmalen Mündungen bedeutend größer ausfällt als bei Mündungen, die sich einer regelmäßigen Form oder dem Kreise nähern.

Für quadratische Mündungen von 1 bis 9 Quadratzoll Inhalt bei 7 bis

Digitized by Google

21 Fuß Druckhöhe ist, nach den Versuchen von Bossut und Michelotti, der mittlere Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}610$, für kreisförmige von $^1/_2$ bis 6 Zoll Durchmesser bei 4 bis 21 Fuß Druckhöhe aber fällt derselbe $\mu = 0{,}615$ oder ungefähr $^8/_{13}$ aus. Die einzelnen Beobachtungswerthe von Bossut und Michelotti weichen unter einander nicht unbedeutend ab, doch läßt sich aus ihnen eine Abhängigkeit von der Größe der Mündung und der Größe der Druckhöhe nicht entnehmen. Nach den Versuchen des Verfassers ist bei einem Drucke von 0,6 Meter der Ausflußcoefficient für eine kreisrunde Mündung

von 1 Centimeter Durchmesser . . . $\mu = 0{,}628$
„ 2 „ „ . . . $= 0{,}621$
„ 3 „ „ . . . $= 0{,}614$
„ 4 „ „ . . . $= 0{,}607.$

Dagegen bei einem Drucke von $^1/_4$ Meter für dieselbe Mündung

von 1 Centimeter Durchmesser . . . $\mu = 0{,}637$
„ 2 „ „ . . . $= 0{,}629$
„ 3 „ „ . . . $= 0{,}622$
„ 4 „ „ . . . $= 0{,}614.$

Man sieht aus diesen Versuchsresultaten deutlich, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn die Mündungsgröße und die Druckhöhe abnehmen.

Nehmen wir für $\mu$ den mittleren Werth $= 0{,}62$, und für $\alpha = 0{,}64$ an, so bekommen wir den Geschwindigkeitscoefficienten beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = 0{,}97,$$

also ziemlich so groß wie beim Ausflusse durch abgerundete oder conoidische Mündungen.

Anmerkungen. 1) Versuche von Buff (s. Poggendorff's Annalen, Bd. XLVI.) zeigen, daß die Ausflußcoefficienten bei kleinen Mündungen und kleinen Druckhöhen oder Geschwindigkeiten bedeutend größer sind als bei großen und mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten. Eine Mündung von 2,084 Linien Durchmesser gab bei $1^1/_2$ Zoll Druck, $\mu = 0{,}692$, bei 35 Zoll aber $\mu = 0{,}644$; dagegen eine Mündung von 4,848 Linien Weite bei $4^1/_2$ Zoll Druck, $\mu = 0{,}682$ und bei 29 Zoll, $\mu = 0{,}653$. Aehnliches hat auch der Verfasser gefunden.

2) Beim Ausflusse unter Wasser fallen, nach den Versuchen des Verfassers, die Ausflußcoefficienten nahe um $1^1/_3$ Procent kleiner aus als beim Ausflusse in die Luft.

**Versuche.** Es läßt sich der Ausflußcoefficient $\mu$, welcher einer gewissen Ausflußmündung entspricht, finden, wenn man das Wasserquantum $V$ kennt, welches in einer gewissen Zeit $t$ bei einer bekannten Druckhöhe $h$ durch den bekannten Querschnitt $F$ der Mündung ausströmt; es ist nämlich: §. 409

$$V = \mu . F . \sqrt{2gh} . t,$$

Digitized by Google

also umgekehrt,

$$\mu = \frac{V}{Ft \cdot \sqrt{2gh}}.$$

Um aber die beiden Factoren desselben, nämlich den Contractions- und den Geschwindigkeitscoefficienten zu ermitteln, bedarf es entweder noch einer Ausmessung des Strahlenquerschnittes $F_1 = \alpha F$, oder einer Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ mittels der Sprungweite des Strahles. Beide Messungen lassen sich jedoch nur bei dünnen Strahlen mit kreisförmigen Querschnitten erträglich genau bewerkstelligen.

Der kreisförmige Querschnitt $F_1$ eines Strahles bestimmt sich sehr sicher mit Hülfe eines in Fig. 698 abgebildeten, aus einem Ringe und vier spitz zulaufenden Schrauben $A$, $B$, $C$, $D$ bestehenden Apparates. Die Schrauben sind nach dem Mittelpunkte des Strahlenquerschnittes gerichtet, und werden so lange gestellt, bis ihre Spitzen die Oberfläche des Strahles berühren. Nach diesem wird der Ring von dem Strahle abgezogen und es werden die Abstände der gegenüberstehenden Schraubenspitzen von einander gemessen; zuletzt wird das Mittel $d_1$ dieser Abstände als Durchmesser des Strahles angenommen. Ist noch $d$ der Durchmesser des Mündungsquerschnittes, so hat man nun:

Fig. 698.

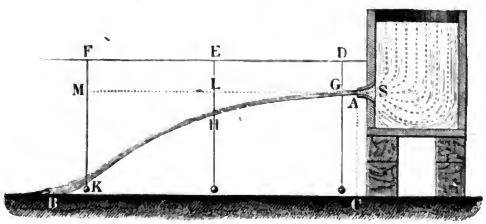
$$\alpha = \frac{F_1}{F} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2,$$

und dann:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Mißt man die Sprungweite $BC = b$ eines aus dem Mundstücke $SA$ horizontal ausfließenden Strahles $AB$, Fig. 699, welche einer gewissen Höhe $AC = a$ zukommt, so hat man nach §. 36 die Ausflußgeschwindigkeit:

Fig. 699.




Digitized by Google

$$v_1 = \sqrt{\frac{g\,b^2}{2\,a}},$$

und da nun $v_1 = \varphi\, v = \varphi\sqrt{2gh}$ ist, so erhält man dann:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{b^2}{4\,a\,h}} = \frac{b}{2\sqrt{a\,h}},$$

und hieraus: $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{2\sqrt{a\,h}\,.\,\mu}{b}$.

Die Bestimmung von $v$ ist jedoch noch sicherer, wenn man statt $a$ und $b$ die horizontalen und verticalen Coordinaten dreier Punkte der paraboliſchen Axe $AB$ des Strahles ausmißt, weil dann auch die Axe des Mundstückes eine unbekannte Neigung gegen den Horizont haben kann. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man eine horizontale Schnur $DF$ über dem Strahle ausspannt, von drei gleichweit von einander abstehenden Punkten $D$, $E$, $F$ derselben Lothe herabläßt, und an diesen die Abstände $DG$, $EH$ und $FK$ der Axe des Strahles von $DF$ abmißt. Ist $DF = x$ die horizontale Entfernung der äußersten Punkte von einander, sind ferner die Verticalabstände $DG$, $EH$ und $FK$, $= z$, $z_1$ und $z_2$, und nimmt man $G$ als Coordinatenanfangspunkt an, so hat man die Coordinaten für den Punkt $H$:

$x_1 = GL = DE = {}^1/_2\,DF = \frac{x}{2}$ und $y_1 = LH = EH - DG = z_1 - z$,

und die für den Punkt $K$:

$x_2 = GM = DF = x$ und $y_2 = MK = FK - DG = z_2 - z$.

Nach §. 39 ist nun, wenn $\alpha$ den Neigungswinkel der Strahlenaxe in $G$ bezeichnet:

$$y_1 = x_1\,tang.\,\alpha + \frac{g\,x_1^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2} \text{ und auch}$$

$$y_2 = x_2\,tang.\,\alpha + \frac{g\,x_2^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2}, \text{ oder}$$

$$y_1 - x_1\,tang.\,\alpha = \frac{g\,x_1^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2} \text{ und}$$

$$y_2 - x_2\,tang.\,\alpha = \frac{g\,x_2^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2};$$

es folgt durch Division, da $x_2 = 2\,x_1$ ist,

$\frac{y_1 - x_1\,tang.\,\alpha}{y_2 - x_2\,tang.\,\alpha} = {}^1/_4$; hieraus aber $tang.\,\alpha = \frac{4\,y_1 - y_2}{x}$.

Setzt man in eine der vorigen Formeln statt $\frac{1}{cos.\,\alpha^2} = 1 + tang.\,\alpha^2$, und führt man statt $tang.\,\alpha$ den letzten Ausdruck ein, so erhält man für die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit die Formel:

Digitized by Google

$$v_1 = \sqrt{\frac{g\,x^2}{2\,(y_2 - x\,tang.\,\alpha)\,cos.\,\alpha^2}} = \sqrt{\frac{(1 + tang.\,\alpha^2)\,g\,x^2}{2\,(2\,y_1 - 4\,y_1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{g\,[x^2 + (4\,y_1 - y_2)^2]}{4\,(y_2 - 2\,y_1)}}.$$

Der Geſchwindigkeitscoefficient iſt hiernach:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2\,g\,h}} = \sqrt{\frac{x^2 + (4\,y_1 - y_2)^2}{8\,h\,(y_2 - 2\,y_1)}}.$$

Beiſpiele. 1) Bei einem Strahle, welcher aus einem gut abgerundeten Mundſtücke von 1 Centimeter Weite ohne Contraction ausfloß, wurden folgende Meſſungsreſultate gefunden:

$x = 2{,}480$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}267 - 0{,}1135 = 0{,}1535$ Meter,
$y_2 = z_2 - z = 0{,}669 - 0{,}1135 = 0{,}5555$ „

und die Druckhöhe $h = 3{,}359$ Meter. Hiernach iſt der Geſchwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}48^2 + 0{,}059^2}{8\,.\,3{,}359\,.\,0{,}2485}} = \sqrt{\frac{6{,}185}{26{,}872\,.\,0{,}2485}} = 0{,}963.$$

Da keine Contraction ſtatt fand, ſo iſt $\alpha = 1$ und daher $\mu = \varphi$. Hiermit ſtimmen die in der Anmerkung zu §. 405 mitgetheilten Meſſungsreſultate ganz gut überein.

2) Meſſungen an einem vollſtändig contrahirten Strahle, welcher durch eine 1 Centimeter weite kreisrunde Mündung in der ebenen dünnen Wand floß, gaben bei der Druckhöhe $h = 3{,}396$ Meter Folgendes:

$x = 2{,}70$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}2465 - 0{,}1115 = 0{,}1350$ Meter, und
$y_2 = z_2 - z = 0{,}6620 - 0{,}1115 = 0{,}5505$ „

und es folgt hieraus:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}70^2 + 0{,}01^2}{8\,.\,3{,}396\,.\,0{,}2805}} = \sqrt{\frac{7{,}2901}{27{,}168\,.\,0{,}2805}} = 0{,}978.$$

Aus der gemeſſenen Ausflußmenge berechnete ſich aber $\mu = 0{,}617$, daher iſt der Contractionscoefficient $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}631$, womit auch die Strahlenquerſchnittsmeſſungen gut übereinſtimmen.

§. 410 **Rectanguläre Seitenöffnungen.** Die genaueſten Verſuche über den Ausfluß durch größere rectanguläre Seitenmündungen ſind in Metz von Poncelet und Lesbros angeſtellt worden. Die Weiten dieſer Mündungen waren 2, und in einigen Fällen 6 Decimeter und die Höhen derſelben ſehr verſchieden, nämlich 1 Centimeter bis 2 Decimeter. Um eine vollſtändige Contraction herbeizuführen, wurden zur Herſtellung dieſer Mündungen 4 Millimeter dicke Meſſingbleche verwendet. Aus den Ergebniſſen dieſer Verſuche haben dieſe Experimentatoren mit Hülfe des Interpolirens die am Ende des Paragraphen folgenden Tabellen für die Ausflußcoefficienten berechnet, die man zur Meſſung oder Berechnung der Ausflußmenge benutzen kann.

Digitized by Google

Ist $b$ die Breite der Ausflußöffnung $KL$, Fig. 700, und sind $h_1$ und $h_2$ die Wasserstände $EG$ und $EL$ über der untersten und über der obersten horizontalen Kante der Mündung, so hat man nach §. 401 die Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2g}\, (h_1^{3/2} - h_2^{3/2}).$$

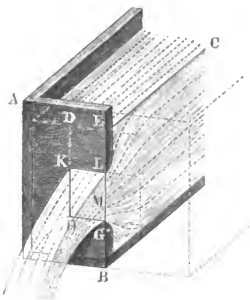
Führt man aber die Oeffnungshöhe $GL = a = h_1 - h_2$, und die mittlere Druckhöhe $EM = h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ein, so hat man annähernd:

$$Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) a\, b \sqrt{2gh},$$

und daher die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu\, Q = \left(1 - \frac{a^2}{96\, h^2}\right) \mu\, a\, b \sqrt{2gh}.$$

Fig. 700.




Setzt man noch

$$\left(1 - \frac{a^2}{96\, h^2}\right) \mu = \mu_1,$$

so erhält man einfach:

$$Q_1 = \mu_1\, a\, b \sqrt{2gh},$$

und um mit dieser einfachen oder gewöhnlichen Ausflußformel rechnen zu können, sind in den folgenden Tabellen nicht erst die Werthe für $\mu$, sondern die für $\mu_1$ angegeben.

Da das Wasser in der Nähe der Oeffnung in Bewegung ist, so steht es unmittelbar vor der Oeffnung tiefer als in größerer Entfernung vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet; es sind deshalb auch zwei Tabellen zusammengestellt worden, die eine für die in größerer Entfernung von der Mündung und die andere für die unmittelbar an der Mündungswand gemessenen Druckhöhen. Man ersieht übrigens aus beiden Tabellen, daß, wenn auch mit einigen Schwankungen, die Ausflußcoefficienten wachsen, wenn die Oeffnung niedriger und die Druckhöhe kleiner wird.

Haben die Mündungen andere Breiten, so bleibt, so lange man keine anderen Versuche zu Grunde legen kann, nichts übrig, als die Coefficienten dieser Tabellen ebenfalls anzuwenden, um die Ausflußmenge zu berechnen. Daß man hierbei nicht auf große Differenzen stößt, geht aus der Vergleichung der Coefficienten für die Mündungen 0,6 Meter mit denen für die Mündungen 0,2 Meter Breite, bei gleicher Druckhöhe u. s. w. hervor. Sind ferner die Oeffnungen nicht rectangulär, so bestimme man ihre mittlere Breite und mittlere Höhe und führe die diesen Dimensionen entsprechenden Coefficienten

Digitized by Google

in der Rechnung ein. Endlich ist es immer vorzuziehen, die Druckhöhe in einer größeren Entfernung vor der Mündungswand zu messen und die erste Tabelle anzuwenden, als unmittelbar an der Mündung, wo der Wasserspiegel gekrümmt und weniger ruhig ist als mehr oberhalb der Mündung.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt durch eine rectanguläre Oeffnung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn der Wasserspiegel $1\frac{1}{2}$ Meter über der oberen Kante steht? Hier ist:

$$b = 0{,}2,\ a = 0{,}1,\ h = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1{,}6 + 1{,}5}{2} = 1{,}55 \text{ Meter},$$

daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \sqrt{2g} \sqrt{1{,}55} = 0{,}02 \,.\, 4{,}429 \,.\, 1{,}245 = 0{,}1103 \text{ Cubikmeter}.$$

Nun giebt aber die Tabelle I. für $a = 0{,}1$ und $h_2 = 1{,}5$, $\mu_1 = 0{,}611$, daher ist die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}611 \,.\, 0{,}1103 = 0{,}0674 \text{ Cubikmeter}.$$

2) Welche Ausflußmenge entspricht einer rectangulären Mündung in der dünnen Wand von 8 Zoll Breite und 2 Zoll Höhe bei 15 Zoll Wasserhöhe über der oberen Kante? Die theoretische Ausflußmenge ist:

$$Q = \tfrac{2}{3} \,.\, \tfrac{1}{6} \,.\, 7{,}906 \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{,}8784 \,.\, 1{,}1547 = 1{,}014 \text{ Cubikfuß}.$$

Nun ist aber 2 Zoll ungefähr 0,05 Meter und 15 Zoll ungefähr 0,4 Meter, daher kann man nach der Tabelle für $a = 0{,}05$ und $h_2 = 0{,}4$, den entsprechenden Coefficient $\mu_1 = 0{,}628$ annehmen und das gesuchte Wasserquantum

$$Q_1 = 0{,}628 \,.\, 1{,}014 = 0{,}637 \text{ Cubikfuß}$$ setzen.

3) Wenn die Breite 0,25, die Höhe 0,15 und der Wasserstand $h_2 = 0{,}045$ Meter beträgt, so ist

$$Q = 0{,}25 \,.\, 0{,}15 \,.\, 4{,}429 \,.\, \sqrt{0{,}12} = 0{,}166 \,.\, 0{,}3464 = 0{,}0575 \text{ Cubikmeter}.$$

Der Höhe 0,15 entspricht für $h_2 = 0{,}01$ der Mittelwerth:

$$\mu_1 = \frac{0{,}582 + 0{,}603}{2} = 0{,}5925$$

und für $h_2 = 0{,}05$:

$$\mu_1 = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595;$$

da nun aber $h_2 = 0{,}045$ gegeben ist, so setzen wir das neue Mittel:

$$\frac{0{,}5925 + 0{,}5950}{2} = 0{,}594$$

als Ausflußcoefficient ein, und erhalten so die gesuchte Wassermenge:

$$Q_1 = 0{,}594 \,.\, 0{,}0575 = 0{,}03415 \text{ Cubikmeter}.$$

Anmerkung. Die Ausflußcoefficienten ändern sich nicht wesentlich, wenn man bei einer rectangulären Mündung die Breite mit der Höhe derselben verwechselt, wie aus folgenden Versuchen des Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques, Paris 1851) hervorgeht.

Eine Mündung von 0,60 Meter Breite und 0,02 Meter Höhe gab für die Druckhöhe $h = 0{,}30$ bis 1,50 Meter,

$$\mu_1 = \mu = 0{,}635 \text{ bis } 0{,}622,$$

und dagegen, wenn man sie aufs Hohe stellte, also die Breite 0,60 Meter zur Höhe, und die Höhe 0,02 Meter zur Breite machte:

$$\mu_1 = 0{,}610 \text{ bis } 0{,}626, \text{ und}$$
$$\mu = 0{,}638 \text{ bis } 0{,}627.$$

Digitized by Google

## Tabelle I.

**Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer dünnen verticalen Wand, nach Poncelet und Lesbros.**

**(Die Druckhöhen sind oberhalb der Mündung an einer Stelle gemessen, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann. — Die Zahlenwerthe unterhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)**

| Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern. | Mündungshöhen in Metern. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mündungsbreite = 0,2 Meter. | | | | | | Mündungsbreite = 0,6 Meter. | |
| | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,20 | 0,02 |
| 0,000 | " | " | " | " | " | " | " | " |
| 0,005 | " | " | " | " | " | 0,705 | " | " |
| 0,010 | " | " | 0,607 | 0,630 | 0,660 | 0,701 | " | 0,644 |
| 0,015 | " | 0,593 | 0,612 | 0,632 | 0,660 | 0,697 | " | 0,644 |
| 0,020 | 0,572 | 0,596 | 0,615 | 0,634 | 0,659 | 0,694 | " | 0,643 |
| 0,030 | 0,578 | 0,600 | 0,620 | 0,638 | 0,659 | 0,688 | 0,593 | 0,642 |
| 0,040 | 0,582 | 0,603 | 0,623 | 0,640 | 0,658 | 0,683 | 0,595 | 0,642 |
| 0,050 | 0,585 | 0,605 | 0,625 | 0,640 | 0,658 | 0,679 | 0,597 | 0,641 |
| 0,060 | 0,587 | 0,607 | 0,627 | 0,640 | 0,657 | 0,676 | 0,599 | 0,641 |
| 0,070 | 0,588 | 0,609 | 0,628 | 0,639 | 0,656 | 0,673 | 0,600 | 0,640 |
| 0,080 | 0,589 | 0,610 | 0,629 | 0,638 | 0,656 | 0,670 | 0,601 | 0,640 |
| 0,090 | 0,591 | 0,610 | 0,629 | 0,637 | 0,655 | 0,668 | 0,601 | 0,639 |
| 0,100 | 0,592 | 0,611 | 0,630 | 0,637 | 0,654 | 0,666 | 0,602 | 0,639 |
| 0,120 | 0,593 | 0,612 | 0,630 | 0,636 | 0,653 | 0,663 | 0,603 | 0,638 |
| 0,140 | 0,595 | 0,613 | 0,630 | 0,635 | 0,651 | 0,660 | 0,603 | 0,637 |
| 0,160 | 0,596 | 0,614 | 0,631 | 0,634 | 0,650 | 0,658 | 0,604 | 0,637 |
| 0,180 | 0,597 | 0,615 | 0,630 | 0,634 | 0,649 | 0,657 | 0,605 | 0,636 |
| 0,200 | 0,598 | 0,615 | 0,630 | 0,633 | 0,648 | 0,655 | 0,605 | 0,635 |
| 0,250 | 0,599 | 0,616 | 0,630 | 0,632 | 0,646 | 0,653 | 0,606 | 0,634 |
| 0,300 | 0,600 | 0,616 | 0,629 | 0,632 | 0,644 | 0,650 | 0,607 | 0,633 |
| 0,400 | 0,602 | 0,617 | 0,628 | 0,631 | 0,642 | 0,647 | 0,607 | 0,631 |
| 0,500 | 0,603 | 0,617 | 0,628 | 0,630 | 0,640 | 0,644 | 0,607 | 0,630 |
| 0,600 | 0,604 | 0,617 | 0,627 | 0,630 | 0,638 | 0,642 | 0,607 | 0,629 |
| 0,700 | 0,604 | 0,616 | 0,627 | 0,629 | 0,637 | 0,640 | 0,607 | 0,628 |
| 0,800 | 0,605 | 0,616 | 0,627 | 0,629 | 0,636 | 0,637 | 0,606 | 0,628 |
| 0,900 | 0,605 | 0,615 | 0,626 | 0,628 | 0,634 | 0,635 | 0,606 | 0,627 |
| 1,000 | 0,605 | 0,615 | 0,626 | 0,628 | 0,633 | 0,632 | 0,605 | 0,626 |
| 1,100 | 0,604 | 0,614 | 0,625 | 0,627 | 0,631 | 0,629 | 0,604 | 0,626 |
| 1,200 | 0,604 | 0,614 | 0,624 | 0,626 | 0,628 | 0,626 | 0,604 | 0,625 |
| 1,300 | 0,603 | 0,613 | 0,622 | 0,624 | 0,625 | 0,622 | 0,603 | 0,624 |
| 1,400 | 0,603 | 0,612 | 0,621 | 0,622 | 0,622 | 0,618 | 0,603 | 0,624 |
| 1,500 | 0,602 | 0,611 | 0,620 | 0,620* | 0,619* | 0,615* | 0,602 | 0,623 |
| 1,600 | 0,602 | 0,611 | 0,618 | 0,618 | 0,617 | 0,613 | 0,602* | 0,623 |
| 1,700 | 0,602* | 0,610* | 0,617 | 0,616 | 0,615 | 0,612 | 0,602 | 0,622 |
| 1,800 | 0,601 | 0,609 | 0,615* | 0,615 | 0,614 | 0,612 | 0,602 | 0,621* |
| 1,900 | 0,601 | 0,608 | 0,614 | 0,613 | 0,612 | 0,611 | 0,602 | 0,621 |
| 2,000 | 0,601 | 0,607 | 0,613 | 0,612 | 0,612 | 0,611 | 0,602 | 0,620 |
| 3,000 | 0,601 | 0,603 | 0,606 | 0,608 | 0,610 | 0,609 | 0,601 | 0,615 |

Anmerkung. Tabellen dieser Art für das preuß. Fußmaß theilt der „Ingenieur" Seite 432 mit.

Digitized by Google

## Tabelle II.

**Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer verticalen dünnen Wand, nach Poncelet und Lesbros.**

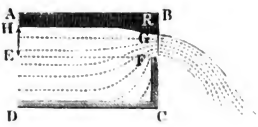
**(Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Mündung gemessen. — Die Werthe außerhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)**

| Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern. | Mündungshöhen in Metern. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mündungsweite = 0,2 Meter. | | | | | | Mündungsweite = 0,6 Meter. |
| | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,20 |
| 0,000 | 0,619 | 0,667 | 0,713 | 0,766 | 0,783 | 0,795 | 0,586 |
| 0,005 | 0,597 | 0,630* | 0,668* | 0,725* | 0,750* | 0,778* | 0,587 |
| 0,010 | 0,595 | 0,618 | 0,642 | 0 687 | 0,720 | 0,762 | 0,589 |
| 0,015 | 0,594 | 0,615 | 0,639 | 0,674 | 0,707 | 0,745 | 0,590 |
| 0,020 | 0,594* | 0,614 | 0,638 | 0,668 | 6,697 | 0,729 | 0,591 |
| 0,030 | 0,593 | 0,613 | 0,637 | 0,659 | 0,685 | 0,708 | 0,592 |
| 0,040 | 0,593 | 0,612 | 0,636 | 0,654 | 0,678 | 0,695 | 0,594* |
| 0,050 | 0,593 | 0,612 | 0,636 | 0,651 | 0,672 | 0,686 | 0,595 |
| 0,060 | 0,594 | 0,613 | 0,635 | 0,647 | 0,668 | 0,681 | 0,596 |
| 0,070 | 0,594 | 0,613 | 0,635 | 0,645 | 0,665 | 0,677 | 0,597 |
| 0,080 | 0,594 | 0,613 | 0,635 | 0,643 | 0,662 | 0,675 | 0,598 |
| 0,090 | 0,595 | 0,614 | 0,634 | 0,641 | 0,659 | 0,672 | 0,599 |
| 0,100 | 0,595 | 0,614 | 0,634 | 0,640 | 0,657 | 0,669 | 0,600 |
| 0,120 | 0,596 | 0,614 | 0,633 | 0,637 | 0,655 | 0,665 | 0,601 |
| 0,140 | 0,597 | 0,614 | 0,632 | 0,636 | 0,653 | 0,661 | 0,602 |
| 0,160 | 0,597 | 0,615 | 0,631 | 0,635 | 0,651 | 0,659 | 0,602 |
| 0,180 | 0,598 | 0,615 | 0,631 | 0,634 | 0,650 | 0,657 | 0,603 |
| 0,200 | 0,599 | 0,615 | 0,630 | 0,633 | 0,649 | 0,656 | 0,603 |
| 0,250 | 0,600 | 0,616 | 0,630 | 0,632 | 0,646 | 0,653 | 0,604 |
| 0,300 | 0,601 | 0,616 | 0,629 | 0,632 | 0,644 | 0,651 | 0,605 |
| 0,400 | 0,602 | 0,617 | 0,629 | 0,631 | 0,642 | 0,647 | 0,606 |
| 0,500 | 0,603 | 0,617 | 0,628 | 0,630 | 0,640 | 0,645 | 0,607 |
| 0,600 | 0,604 | 0,617 | 0,627 | 0,630 | 0,638 | 0,643 | 0,607 |
| 0,700 | 0,604 | 0,616 | 0,627 | 0,629 | 0,637 | 0,640 | 0,607 |
| 0,800 | 0,605 | 0,616 | 0,627 | 0,629 | 0,636 | 0,637 | 0,607 |
| 0,900 | 0,605 | 0,615 | 0,626 | 0,628 | 0,634 | 0,635 | 0,607 |
| 1,000 | 0,605 | 0,615 | 0,626 | 0,628 | 0,633 | 0,632 | 0,606 |
| 1,100 | 0,604 | 0,614 | 0,625 | 0,627 | 0,631 | 0,629 | 0,606 |
| 1,200 | 0,604 | 0,614 | 0,624 | 0,626 | 0,628 | 0,626 | 0,605 |
| 1,300 | 0,603 | 0,613 | 0,622 | 0,624 | 0,625 | 0,622 | 0,604 |
| 1,400 | 0,603 | 0,612 | 0,621 | 0,622 | 0,622 | 0,618 | 0,603 |
| 1,500 | 0,602 | 0,611 | 0,620 | 0,620* | 0,619* | 0,615* | 0,603 |
| 1,600 | 0,602 | 0,611 | 0,618 | 0,618 | 0,617 | 0,613 | 0,602 |
| 1,700 | 0,602* | 0,610* | 0,617 | 0,616 | 0,615 | 0,612 | 0,602 |
| 1,800 | 0,601 | 0,609 | 0,615* | 0,615 | 0,614 | 0,612 | 0,602 |
| 1,900 | 0,601 | 0,608 | 0,614 | 0,613 | 0,613 | 0,611 | 0,602 |
| 2,000 | 0,601 | 0,607 | 0,614 | 0,612 | 0,612 | 0,611 | 0,602 |
| 3,000 | 0,601 | 0,603 | 0,606 | 0,608 | 0,610 | 0,609 | 0,601 |

Digitized by Google

**Ueberfälle.** Fließt das Waſſer durch Ueberfälle (franz. déversoirs; engl. overfalls, notches) oder Einſchnitte in einer dünnen Wand, wie z. B. §. 411

Fig. 701.




$FB$, Fig. 701, ſo erleidet der Strahl an drei Seiten eine Contraction, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Ausflußmenge herbeigeführt wird. Es iſt daher das Ausflußquantum für dieſe Mündungen:

$$Q_1 = {}^2/_3\,\mu b h \sqrt{2gh}$$

zu ſetzen. Hier iſt aber die Druckhöhe $EH = h$, oder der Waſſerſtand über der Ueberfallsſchwelle $F$ nicht unmittelbar an der Schwelle, ſondern mindeſtens 3 Fuß vor der Wand, in welcher ſich die Mündung befindet, zu meſſen, weil der Waſſerſpiegel vor der Mündung eine Senkung erleidet, die nach der Mündung zu immer größer und größer wird, und in der Mündungsebene ſelbſt eine Größe $GR$ von 0,1 bis 0,25 der Druckhöhe $FR$ beträgt, ſo daß die Dicke $FG$ des Waſſerſtrahles in dieſer Ebene nur 0,9 bis 0,75 der Druckhöhe oder des Waſſerſtandes beträgt.

Ueber den Ausfluß des Waſſers durch Ueberfälle in dünnen Wänden ſind von Vielen Verſuche angeſtellt worden, und es bieten deren Reſultate eine große Mannigfaltigkeit, aber nicht überall die gewünſchte Uebereinſtimmung dar. Die Ergebniſſe der Verſuche von Poncelet und Lesbros an Ueberfällen von 2 und 6 Decimeter Breite enthalten folgende Tabellen.

1. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 2 Decimeter Breite, nach Poncelet und Lesbros.

| Druckhöhe $h$ in Metern. | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ausflußcoefficient $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu$. | 0,424 | 0,417 | 0,412 | 0,407 | 0,401 | 0,397 | 0,395 | 0,393 | 0,390 | 0,385 |

2. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 6 Decimeter Breite.

| Druckhöhe $h$ in Metern. | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,12 | 0,15 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ausflußcoefficient $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu$. | 0,412 | 0,409 | 0,406 | 0,403 | 0,400 | 0,395 | 0,391 | 0,391 | 0,391 | 0,390 |

Digitized by Google

Bei ungefähren Bestimmungen kann man hiernach $\mu_1 = 0{,}4$ setzen. Versuche an Ueberfällen mit größeren Breiten gaben Eytelwein im Mittel $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu = 0{,}42$ und Bidone, $\mu_1 = {}^2/_3 \,.\, 0{,}62 = 0{,}41$ u. s. w. Die ausgedehntesten Versuche sind von d'Aubuisson und Castel ausgeführt worden. Aus ihnen folgert d'Aubuisson, daß für Ueberfälle, deren Breite nicht mehr als den dritten Theil der Breite des Canales oder der Wand beträgt, worin sich der Ueberfall befindet, $\mu$ im Mittel 0,60, also ${}^2/_3\,\mu = 0{,}40$ zu setzen sei, daß dagegen für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, oder mit dem Canale einerlei Breite haben, $\mu = 0{,}665$, also $\mu_1 = 0{,}444$ angenommen werden müsse, daß endlich bei anderen Verhältnissen zwischen der Ueberfall- und Canalbreite die Ausflußcoefficienten sehr verschieden, und zwar zwischen 0,58 und 0,66 liegend, ausfallen. Die 1853 und 1854 in Hanswyk an Ueberfällen von 3 bis 6 Meter Breite und 0,1 bis 1,0 Meter Druckhöhe angestellten Versuche gaben $\mu = 0{,}64$ bis 0,65, also ${}^2/_3\,\mu = 0{,}427$ bis 0,433. S. die Zeitschrift des Archit.- und Ingen.-Vereins für Hannover 1857. Die vom Verfasser angestellten Untersuchungen über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bringen weiter unten (§. 417) die Veränderlichkeit dieser Ausflußcoefficienten auf Gesetze zurück.

Beispiele. 1) Ein Ueberfall von 0,25 Meter Breite und 0,15 Meter Wasserstand oder Druckhöhe giebt in der Secunde die Wassermenge:

$$Q = 0{,}393\,.\,b\,h\,\sqrt{2\,g\,h} = 0{,}393\,.\,4{,}429\,.\,0{,}25\,.\,(0{,}15)^{3/2} = 0{,}435\,.\,0{,}0581$$
$$= 0{,}02527 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Welche Breite hat man einem Ueberfalle zu geben, der bei einem Wasserstande von 8 Zoll eine Wassermenge von 6 Cubikfuß pro Secunde durchlassen soll? Es ist:

$$b = \frac{Q_1}{\mu_1\,\sqrt{2\,g\,h^3}} = \frac{6}{0{,}4\,.\,7{,}906\,\sqrt{(^2/_3)^3}} = \frac{6}{3{,}1624\,.\,0{,}5443} = 3{,}486 \text{ Fuß.}$$

Nimmt man nach Eytelwein $\mu_1 = 0{,}42$ an, so folgt:

$$b = \frac{6}{3{,}32\,.\,0{,}5443} = 3{,}320 \text{ Fuß.}$$

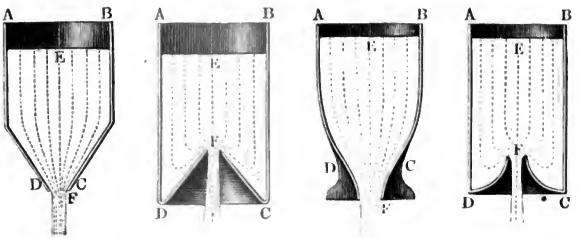
§. 412 **Maximum und Minimum der Contraction.** Bei dem Ausflusse des Wassers durch Mündungen in einer ebenen Wand steht die Axe des Strahles rechtwinkelig auf der Wandfläche und es ist deshalb die Größe der Contraction eine mittlere; bildet aber die Axe der Mündung oder des Strahles einen spitzen Winkel mit dem die Mündung enthaltenden Theile der Wand, so fällt die Contraction kleiner aus, und ist der Winkel zwischen dieser Axe und den inneren Randflächen der Oeffnung ein stumpfer, so stellt sich eine noch größere Contraction heraus. Den einen Fall repräsentirt Fig. 702, und den anderen Fig. 703. Jedenfalls hat diese Verschiedenheit der Contraction darin ihren Grund, daß dort die von den Seiten

Digitized by Google

zufließenden Wasserelemente weniger, hier aber mehr von ihrer Richtung abgelenkt werden, wenn sie durch die Mündung gehen und zu einem Strahle sich vereinigen.

Die Contraction ist ein Minimum, d. h. Null, wenn durch allmälige Zusammenziehung der die Mündung umfassenden Wand das Zufließen von der Seite ganz verhindert wird, und dagegen ein Maximum, wenn die Wand der Richtung des Strahles entgegen gerichtet ist, so daß gewisse Wasserelemente sich um 180° wenden müssen, um in die Mündung zu gelangen. Beide

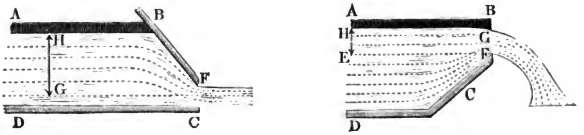
Fig. 702. Fig. 703. Fig. 704. Fig. 705.




Fälle sind in den Figuren 704 und 705 abgebildet. In dem ersten Falle ist der Ausflußcoefficient beinahe 1, nämlich 0,96 bis 0,98, und im zweiten hat er sich bei den Messungen von Borda, Bidone und von dem Verfasser im Mittel = 0,53 herausgestellt.

In der Praxis kommen, durch convergente Wände herbeigeführt, Veränderungen der Ausflußcoefficienten sehr oft vor, namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie z. B. Fig. 706 vor Augen führt. Poncelet fand für eine derartige Schutzöffnung den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}80$, wenn das Schutzbret 45° geneigt war,

Fig. 706. Fig. 707.




und dagegen $\mu$ nur = 0,74 bei einer Neigung von $63^1/_2$ Grad, d. h. bei einer Böschung von $^1/_2$. Für derartige Ueberfälle, Fig. 707, wo ebenfalls wie bei der Poncelet'schen Schütze nur an einer Seite Contraction eintritt, fand der Verfasser $\mu = 0{,}70$, also $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu = 0{,}467$ bei einer Neigung von 45°; und $\mu = 0{,}67$, also $\mu_1 = 0{,}447$, bei einer Neigung von $63^1/_2$ Grad.



Digitized by Google

Nach M. Boileau (s. dessen Traité de la mesure des eaux courants) läßt sich für einen Ueberfall, welcher aufwärts und zwar so geneigt ist, daß das Verhältniß seiner Verticalprojection zur Horizontalprojection = 3, also der Neigungswinkel $71\frac{1}{2}$ Grad beträgt, der Ausflußcoefficient = 0,973mal dem Ausflußcoefficienten für einen senkrechten Ueberfall setzen. Ferner folgert Boileau aus seinen Versuchen für senkrechte, gegen den Strom schräg gestellte Ueberfälle, daß bei der Schräge von 45 Grad der Ausflußcoefficient 0,942, und bei der von 65 Grad gar nur 0,911 von dem Werthe des Ausflußcoefficienten des normalen Ueberfalles zu setzen ist, wobei natürlich die Länge der ganzen Ueberfallkante als Mündungslänge angesehen wird.

Beispiel. Wenn das unter dem Winkel von 50 Grad geneigte Schutzbrett, welches quer über ein $2\frac{1}{4}$ Fuß breites Gerinne weggeht, $\frac{1}{2}$ Fuß hoch gezogen wird, und sich hierauf der Wasserspiegel um 4 Fuß über den Gerinnboden stellt, so läßt sich die Oeffnungshöhe:

$$a = \frac{1}{2} \sin. 50^0 = 0{,}3830 \text{ Fuß},$$

die Druckhöhe:

$$h = 4 - \frac{1}{2} . 0{,}3830 = 3{,}8085 \text{ Fuß},$$

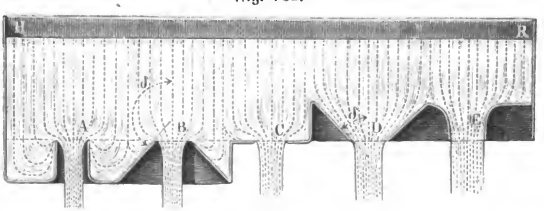
und der Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}78$, daher die Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}78 . 2{,}25 . 0{,}3830 . 7{,}906 \sqrt{3{,}8085} = 10{,}36 \text{ Cubikfuß}$$

setzen.

§. 413 **Contractionsscala.** Die Contraction eines Wasserstrahles ist um so größer, je mehr die Richtung des von der Seite zuströmenden Wassers von der Bewegungsrichtung des Strahles abweicht. Bei dem Ausflusse durch die Mündung $C$, Fig. 708, in der ebenen dünnen Wand beträgt der Winkel $\delta$, um welchen die Bewegungsrichtung der von

Fig. 708.




der Seite zuströmenden Wasserelemente von der Axen- oder Bewegungsrichtung des Strahles abweicht, den Rechtwinkel $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, bei der Mündung $A$, welche von einer dünnen Röhrenwand gebildet wird, mißt dieser Winkel $\delta$, 2 Rechte ($\pi$); bei dem Ausflusse durch ein conisch divergentes Mundstück $B$ ist $\delta$ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$, ferner bei dem Ausflusse durch ein conisch convergentes Ansatz-

Digitized by Google

stück $D$ ist $\delta$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und bei dem cylindrischen Mundstücke $E$ mit innerer Abrundung ist er $= 0$ Grad zu setzen.

Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem die Contraction mit dem Winkel $\delta$ abnimmt, hat der Verfasser an einer größeren Anzahl von Mundstücken von 2 Centimeter Mündungsweite unter verschiedenem Drucke (von 1 bis 10 Fuß) eine ganze Reihe von Versuchen angestellt; und die Ergebnisse derselben in folgender Tabelle zusammengestellt:

| $\delta$ | $180^0$ | $157\frac{1}{2}{}^0$ | $135^0$ | $112\frac{1}{2}{}^0$ | $90^0$ | $67\frac{1}{2}{}^0$ | $45^0$ | $22\frac{1}{2}{}^0$ | $11\frac{1}{4}{}^0$ | $5\frac{3}{4}{}^0$ | $0^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | 0,541 | 0,546 | 0,577 | 0,606 | 0,632 | 0,684 | 0,753 | 0,882 | 0,924 | 0,949 | 0,966 |

Diese Tabelle giebt allerdings nur die Ausflußcoefficienten ($\mu$) an, welche den verschiedenen Abweichungswinkeln $\delta$ zukommen; die Contractionscoefficienten sind noch ein bis zwei Procent größer, da bei jedem Ausflusse auch ein kleiner Verlust an Geschwindigkeit eintritt. Um bei dem Eintritte des Wassers in die Ansatzstücke $D$ und $E$ keinen Verlust an lebendiger Kraft zu erleiden, wurden diese Stücke bei der Einmündung abgerundet. Die Reibung, welche das Wasser bei der Bewegung an den Wänden dieser Mundstücke zu überwinden hat, wird im folgenden Capitel bestimmt werden.

Anmerkung. Nach den Berechnungen des Herrn Prof. Zenner (s. „Civilingenieur", Band II., Seite 55) läßt sich, den angegebenen Versuchen zufolge,

$$\mu_\delta = \mu_{\frac{1}{2}\pi}\,(1 + 0{,}33214\,(cos.\,\delta)^3 + 0{,}16672\,(cos.\,\delta)^4)$$

setzen, wenn $\mu_{\frac{1}{2}\pi}$ den Ausflußcoefficienten für die Mündung in der dünnen ebenen Wand bezeichnet, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Ausfluß $= \frac{1}{2}\pi = 90^0$ ist, und dagegen $\mu_\delta$ den Ausflußcoefficienten für eine Mündung in der conischen dünnen Wand ausdrückt, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Eintritt in die Mündung $= \delta$ mißt.

**Partielle Contraction.** Wir haben seither nur den Fall kennen §. 414
gelernt, wo das Wasser von allen Seiten her der Oeffnung zufließt und einen ringsherum contrahirten Strahl bildet, und müssen nun noch auch die Fälle, wenn das Wasser nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung strömt und deshalb einen nur theilweise contrahirten Strahl hervorbringt, in Untersuchung ziehen. Um diese Contractionsverhältnisse von einander zu unterscheiden, wollen wir den Fall, wenn der Strahl auf allen Seiten contrahirt, die vollständige, und den Fall, wenn der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges zusammengezogen ist, die unvollständige oder partielle Contraction (franz. contraction incomplète; engl. incomplete contraction) nennen. Die unvollständige Contraction wird



Digitized by Google

herbeigeführt, wenn eine Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahles auf einer oder mehreren Seiten eingefaßt ist. In Fig. 709 sind vier gleich große Mündungen *a*, *b*, *c*, *d* im Boden *AC* eines Gefäßes abgebildet. Die Contraction beim Ausflusse durch die Mündung *a* in der Mitte des Bodens ist vollständig, weil bei ihr das Wasser von allen Seiten zuströmen kann; die Contraction beim Ausflusse durch *b*, *c* und *d* ist aber unvollständig, weil bei diesen das Wasser nur von drei, zwei oder einer Seite zuströmen kann. Ebenso, wenn eine rectanguläre Seitenöffnung bis zum Boden des Gefäßes geht, so ist die Contraction partiell, weil dann dieselbe auf der Seite im Boden wegfällt; wenn ferner die Schutzöffnung bis zum Boden und bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht, so bleibt nur noch an einer Seite Contraction übrig.

Die partielle Contraction macht sich auf zweierlei Weise bemerklich. Erstens giebt sie dem Strahl eine *schiefe Richtung*, und zweitens bewirkt sie einen *stärkeren Ausfluß*.

Fig. 709.

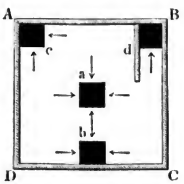
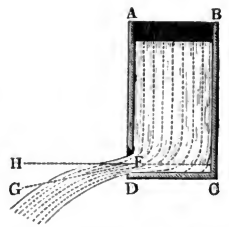



Fig. 710.




Reicht z. B. die Seitenöffnung *F*, Fig. 710, bis an den Boden *CD*, so daß daselbst eine Contraction nicht eintreten kann, so weicht die Axe *FG* des Strahles um einen Winkel *HFG* von ungefähr 9 Grad von der Normalen *FH* der Mündungsebene ab. Viel größer stellt sich aber noch die Schiefe des Strahles heraus, wenn zwei benachbarte Seiten der Mündung eingefaßt sind. Ist die Mündung an zwei gegenüber liegenden Seiten eingefaßt, und die Contraction an denselben aufgehoben, so tritt natürlich eine solche Abweichung nicht ein, wohl aber nimmt der Strahl auf den nicht eingefaßten Seiten in einiger Entfernung außerhalb der Mündung noch mehr Ausbreitung an, als wenn diese Einfassung nicht vorhanden wäre. Wenn auch durch die partielle Contraction eine größere Ausflußmenge erzielt wird, so muß man sie doch in der Regel zu vermeiden suchen, weil durch sie der Strahl eine abweichende Richtung und eine große Ausbreitung erleidet.

Versuche über den Ausfluß des Wassers bei partieller Contraction sind von *Bidone* und von dem Verfasser angestellt worden. Sie haben gezeigt, daß die Ausflußcoefficienten mit dem Verhältnisse des eingefaßten Theiles

Digitized by Google

zum ganzen Umfange fast gleichmäßig zunehmen; doch ist leicht zu ermessen, daß diese Beziehung eine andere wird, wenn der Umfang beinahe oder ganz eingefaßt und die Contraction beinahe oder ganz aufgehoben ist. Setzen wir das Verhältniß der Einfassung zum ganzen Umfange, $= n$, und verstehen wir unter $\varkappa$ eine Erfahrungszahl, so können wir, wenn auch nur annähernd, das Verhältniß des entsprechenden Ausflußcoefficienten $\mu_n$ der partiellen Contraction zum Ausflußcoefficienten $\mu_0$ bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = 1 + \varkappa n, \text{ und folglich } \mu_n = (1 + \varkappa n)\mu_0 \text{ setzen.}$$

Die Versuche Bidone's geben für kleine kreisförmige Mündungen $\varkappa = 0{,}128$ und für quadratische, $\varkappa = 0{,}152$; die des Verfassers haben für kleine rectanguläre Mündungen, $\varkappa = 0{,}134$, für größere (Poncelet-mündungen), bei 0,2 Meter Breite und 0,1 Meter Höhe aber, $\varkappa = 0{,}157$ geliefert (s. die Zeitschrift: „der Ingenieur", Bd. 2). In der Anwendung kommen fast nur rectanguläre Mündungen mit Einfassungen vor; wir werden für sie den mittleren Werth $\varkappa = 0{,}155$ annehmen und hiernach

$$\mu_n = (1 + 0{,}155 . n)\mu_0$$

setzen. Bei einer rectangulären Seitenöffnung von der Höhe $a$ und Breite $b$ ist $n = \frac{b}{2(a+b)}$, wenn die Contraction an einer Seite $b$ wegfällt, wenn z. B. diese Seite in der Ebene des Bodens liegt, ferner $n = {}^1/_2$, wenn eine Seite $a$ und eine Seite $b$ eingefaßt sind, und $n = \frac{2a+b}{2(a+b)}$, wenn auf einer Seite $b$ und auf beiden Seiten $a$ die Contraction verhindert wird, wenn z. B. die Mündung die ganze Breite des Reservoirs einnimmt und bis zur Bodenebene reicht.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert der Ausfluß des Wassers durch eine 3 Fuß breite und 10 Zoll hohe verticale Schußöffnung, bei einem Drucke von $1{}^1/_2$ Fuß über der oberen Mündungsseite, wenn die untere Mündungsseite in den Gerinnboden fällt, und daher die Contraction am Boden wegfällt. Die theoretische Ausflußmenge ist:

$Q = {}^{10}/_{12} . 3 . 7{,}906 \sqrt{1{,}5 + {}^5/_{12}} = {}^5/_2 . 7{,}906 \sqrt{1{,}9166} = 27{,}35$ Cubikfuß.

Nach der Poncelet'schen Tabelle ist bei vollständiger Contraction, $\mu = 0{,}604$ zu setzen, nun hat man aber:

$$n = \frac{3}{2\,(3 + {}^{10}/_{12})} = \frac{9}{18+5} = {}^9/_{23},$$

daher ist für den vorliegenden Fall der partiellen Contraction:

$\mu_n = (1 + 0{,}155 . {}^9/_{23}) . 0{,}604 = 1{,}060 . 0{,}604 = 0{,}640$

und das effective Ausflußquantum:

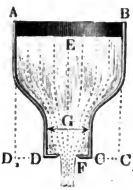
$Q_1 = 0{,}640\ Q = 0{,}640 . 27{,}35 = 17{,}50$ Cubikfuß.

**Unvollkommene Contraction.** Die Contraction des Wasserstrahles §. 415
ist auch noch davon abhängig, ob das Wasser vor der Mündung ziem-

Digitized by Google

lich in Ruhe steht, oder ob es mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben ankommt; je schneller das Wasser der Ausflußöffnung zuströmt, je weniger ist auch der Strahl zusammengezogen, desto größer fällt auch die Ausflußmenge aus. Die oben angegebenen und untersuchten Contractions- und Ausflußverhältnisse beziehen sich nur auf den Fall, wenn sich die Mündung in einer großen Wand befindet, und nun angenommen werden kann, daß das Wasser nur mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit der Mündung zufließt; wir müssen daher auch die Contractions- und Ausflußverhältnisse kennen lernen, wenn der Mündungsquerschnitt nicht viel kleiner ist als der Querschnitt des zufließenden Wassers, wenn folglich das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit an der Mündung ankommt. Um diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir die Contraction bei stillstehendem Oberwasser die vollkommene und die bei bewegtem Oberwasser die unvollkommene Contraction (franz. contraction imparfaite; engl. imperfect contraction) nennen. Unvollkommen ist z. B. die Contraction beim Ausfluß aus dem Gefäße $A\,C$, Fig. 711, weil der Querschnitt $F$ der Mündung nicht viel kleiner ist als der Querschnitt $G$ des ankommenden Wassers oder der Inhalt der Wand $CD$, in welcher sich diese Mündung befindet. Hätte dagegen das Gefäß die Form $A\,B\,C_1\,D_1$, wäre also der Inhalt der Bodenfläche $C_1\,D_1$ viel größer als der Mündungsquerschnitt $F$, so würde der Ausfluß mit vollkommener Contraction vor sich gehen. Uebrigens unterscheidet sich der unvollkommen contrahirte Wasserstrahl nicht bloß durch seine größere Stärke, sondern auch dadurch von dem vollkommen contrahirten Wasserstrahle, daß er nicht so durchsichtig und krystallähnlich ist wie dieser.

Fig. 711.




Setzt man das Verhältniß zwischen den Flächenräumen der Mündung $F$ und der Mündungswand $G$, also $\frac{F}{G}$, $= n$, den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, $= \mu_0$ und den bei unvollkommener Contraction $= \mu_n$, so kann man mit großer Genauigkeit, den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen und Rechnungen zufolge, setzen:

1) für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0\,[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)],$$ und

2) für rectanguläre Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0\,[1 + 0{,}0760\,(9^n - 1)]\ ^*).$$

Zur Erleichterung der Rechnung in Fällen der Anwendung sind die Cor-

*) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers u. s. w. Leipzig 1843.

Digitized by Google

rectionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ der Ausflußcoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction in folgenden kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Oeffnungen.

| $n$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,007 | 0,014 | 0,023 | 0,034 | 0,045 | 0,059 | 0,075 | 0,092 | 0,112 | 0,134 |

| $n$ | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,161 | 0,189 | 0,223 | 0,260 | 0,303 | 0,351 | 0,408 | 0,471 | 0,546 | 0,631 |

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Oeffnungen.

| $n$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,009 | 0,019 | 0,030 | 0,042 | 0,056 | 0,071 | 0,088 | 0,107 | 0,128 | 0,152 |

| $n$ | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,178 | 0,208 | 0,241 | 0,278 | 0,319 | 0,365 | 0,416 | 0,473 | 0,537 | 0,608 |

Bei diesen Tabellen stehen oben verschiedene Werthe von den Querschnittsverhältnissen $n = \frac{F}{G}$, und unmittelbar darunter die entsprechenden Zusätze der Ausflußcoefficienten wegen der Unvollkommenheit der Contraction. Z. B. für das Querschnittsverhältniß $n = 0{,}35$, d. i. für den Fall, wenn der Inhalt der Mündung 35 Hundertel vom Inhalte der ganzen Mündungswand ist, hat man bei kreisförmigen Mündungen

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}075,$$

und bei rectangulären Mündungen $= 0{,}088$; es ist also der Ausflußcoef-

Digitized by Google

ficient bei vollkommener Contraction im ersten Falle um 75 Tausendtel und im zweiten um 88 Tausendtel größer zu machen, um den entsprechenden Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction zu erhalten. Wäre der Ausflußcoefficient $\mu_0 = 0{,}615$, so hätte man daher im ersten Falle:

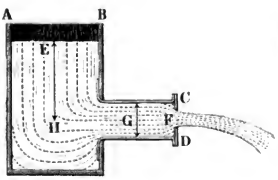
$$\mu_{0,35} = 1{,}075 \,.\, 0{,}615 = 0{,}661,$$

und im zweiten Falle:

$$\mu_{0,35} = 1{,}088 \,.\, 0{,}615 = 0{,}669.$$

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt die rectanguläre $1\frac{1}{4}$ Fuß breite und $\frac{1}{2}$ Fuß hohe Seitenmündung $F$, wenn dieselbe in einer rectangulären Wand $CD$, Fig. 712, von 2 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe ausgeschnitten ist, und die Druckhöhe $EH = h$ im stillstehenden Wasser 2 Fuß beträgt? Die theoretische Wassermenge ist:

Fig. 712.




$$Q = 1{,}25 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}906\ \sqrt{2}$$
$$= 4{,}941 \,.\, 1{,}414 = 6{,}987 \text{ Cubikfuß},$$

und der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction ist nach Poncelet:

$$\mu_0 = 0{,}610;$$

nun ist aber das Querschnittsverhältniß

$$n = \frac{F}{G} = \frac{1{,}25 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 1} = 0{,}312,$$

und für $n = 0{,}312$, nach Tabelle II., Seite 807,

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}071 + {}^{12}/_{50}\,(0{,}088 - 0{,}071) = 0{,}071 + 0{,}004 = 0{,}075$$

zu setzen, daher folgt der Ausflußcoefficient für den vorliegenden Fall:

$$\mu_{0,312} = 1{,}075 \,.\, \mu_0 = 1{,}075 \,.\, 0{,}610 = 0{,}6557$$

und die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}6557 \,.\, Q = 0{,}6557 \,.\, 6{,}987 = 4{,}581 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 416 **Ausfluss des bewegten Wassers.** Wir haben seither angenommen, daß die Druckhöhe im stillstehenden Wasser gemessen worden ist, und müssen nun noch den Fall abhandeln, wenn nur der Wasserstand des bewegten, der Mündung mit einer gewissen Geschwindigkeit zufließenden Wassers gemessen werden kann. Setzen wir eine rectanguläre Seitenöffnung voraus, bezeichnen wir deren Breite durch $b$ und die Wasserstände in Hinsicht auf die beiden horizontalen Kanten durch $h_1$ und $h_2$, die der Geschwindigkeit $c$ des zufließenden Wassers entsprechende Höhe aber durch $k$, so haben wir die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2g}\, [(h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2}].$$

Diese Formel läßt sich aber nicht unmittelbar anwenden zur Bestimmung der Wassermenge, weil die Geschwindigkeitshöhe

$$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2$$

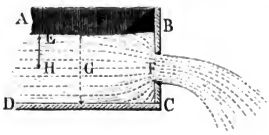
Digitized by Google

wieder von $Q$ abhängt, und die weitere Umformung auf eine complicirte höhere Gleichung führt; es ist daher weit einfacher, wenn man die effective Wassermenge

$$Q_1 = \mu_1 a b \sqrt{2gh}$$

setzt, und unter $\mu_1$ nicht den bloßen Ausfluß-, sondern einen vorzüglich vom Querschnittsverhältnisse abhängigen Coefficienten versteht. Am häufigsten kommt dieser Fall vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Canälen fließende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflußöffnung enthaltende Querwand $BC$, Fig 713, so hoch aufzustauen, daß die Mündungsfläche $F$ nur einen kleinen Theil von dem Querschnitt des zufließenden Wasserstromes ausmacht und daher die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein gegen die mittlere Geschwindigkeit ausfällt.

Fig. 713.




Aus den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen mit den Poncelet'schen Mündungen, wobei die Druckhöhe ein Meter oberhalb der Mündungsebene gemessen wurde, hat sich ziemlich genau

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641 \left(\frac{F}{G}\right)^2 = 0{,}641 \cdot n^2$$

ergeben, wobei $n = \frac{F}{G}$ das Querschnittsverhältniß, welches jedoch nicht viel über $^1/_2$ sein soll, ferner $\mu_0$ den aus der Poncelet'schen Tabelle genommenen Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, und $\mu_n$ den derselben Mündung im vorliegenden Falle entsprechenden Ausflußcoefficienten bezeichnet. Ist $b$ die Breite, $a$ die Höhe der Mündung, $b_1$ die Breite und $a_1$ die Höhe des Wasserstromes und bezeichnet $h$ die Tiefe der oberen Mündungsseite unter dem Wasserspiegel, so hat man hiernach die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu_0 . a b \left[1 + 0{,}641 \left(\frac{a b}{a_1 b_1}\right)^2\right] \sqrt{2g\left(h + \frac{a}{2}\right)}.$$

Folgende Tabelle dient zur Abkürzung der Rechnung in Fällen der Anwendung.

| $n$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,002 | 0,006 | 0,014 | 0,026 | 0,040 | 0,058 | 0,079 | 0,103 | 0,130 | 0,160 |

Beispiel. Um das durch ein 3 Fuß breites Gerinne zugeführte Wasserquantum zu finden hat man eine Spundwand mit einer 2 Fuß weiten und 1 Fuß hohen

Digitized by Google

rectangulären Mündung eingesetzt, und dadurch das Wasser endlich so aufgestaut, daß es beim Eintritt des Beharrungszustandes um eine Höhe von $2\frac{1}{4}$ Fuß über der Sohle und $1\frac{3}{4}$ Fuß über der unteren Kante der Mündung stand. Die entsprechende theoretische Wassermenge ist:

$$Q = a\,b\,\sqrt{2\,g\,h} = 1\,.\,2\,.\,7{,}906\,\sqrt{1{,}25} = 15{,}812\,.\,1{,}118$$
$$= 17{,}68 \text{ Cubikfuß},$$

der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction läßt sich 0,602 setzen, und das Querschnittsverhältniß:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{a\,b}{a\,b_1} = \frac{1\,.\,2}{2{,}25\,.\,3} = 0{,}296,$$

daher folgt der Ausflußcoefficient für das vorstehende Ausflußverhältniß

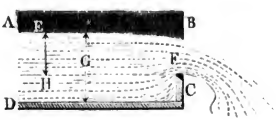
$$\mu_n = (1 + 0{,}641\,.\,0{,}296^2)\;\mu_0 = 1{,}056\,.\,0{,}602 = 0{,}6357$$

und das effective Ausflußquantum

$$Q_1 = 17{,}68\,.\,0{,}6357 = 11{,}24 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 417. Die unvollkommene Contraction kommt auch beim Ausflusse durch Ueberfälle, wie Fig. 714, vor, wenn der Querschnitt $F$ des über der Schwelle bei $C$ wegfließenden Wassers ein ansehnlicher Theil vom Querschnittte $G$ des zufließenden Wassers ist. Die Ueberfälle können aber entweder nur einen Theil der Breite des Reservoirs oder Canales einnehmen, oder sie können über die ganze Breite des Gerinnes weggehen. In dem letzten Falle ist auch die Contraction an den Seiten der Mündung Null, und es fließt also aus diesem Grunde mehr Wasser durch, als bei den Ueberfällen der ersten Art. Auch über diese Ausflußverhältnisse hat der Verfasser Versuche angestellt, und aus den Ergebnissen derselben Formeln abgeleitet, wodurch sich mit ziemlicher Sicherheit mit Hülfe des Querschnittsverhältnisses $n = \frac{F}{G}$ der entsprechende Ausflußcoefficient berechnen läßt.

Fig. 714.




Ist $h$ die Druckhöhe $EH$ über der Ueberfallschwelle, $a_1$ die ganze Wasserhöhe, $b$ die Breite des Ueberfalles und $b_1$ die des zufließenden Wassers, so haben wir hier:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{h\,b}{a_1\,b_1},$$

und 1) für die Poncelet'schen Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1{,}718\left(\frac{F}{G}\right)^4 = 1{,}718\,.\,n^4,$$

dagegen 2) für die die ganze Gerinnbreite einnehmenden Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}041 + 0{,}3693\,n^2;$$

Digitized by Google

es ist daher im ersten Falle die Ausflußmenge:

$$Q_1 = {}^2/_3\,\mu_0 \,.\, b\left[1 + 1{,}718\left(\frac{h\,b}{a_1\,b_1}\right)^4\right]\sqrt{2\,g\,h^3},$$

und im zweiten Falle:

$$Q_1 = {}^2{}_3\,\mu_0 \,.\, b\left[1{,}041 + 0{,}3693\,\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right]\sqrt{2\,g\,h^3},$$

wo $h$ den etwa 1 Meter vor dem Ueberfall gemessenen Wasserstand $EH$ über der Ueberfallschwelle $F$ bezeichnet.

In folgenden Tabellen sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ für die einfachsten Werthe von $n$ zusammengestellt.

## Tabelle I.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Ueberfälle.

| $n$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,003 | 0,007 | 0,014 | 0,026 | 0,044 | 0,070 | 0,107 |

## Tabelle II.

Correctionen für Ueberfälle über die ganze Wand, oder ohne Seitencontraction.

| $n$ | 0,00 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,041 | 0,042 | 0,045 | 0,049 | 0,056 | 0,064 | 0,074 | 0,086 | 0,100 | 0,116 | 0,133 |

Beispiel. Um das in einem 5 Fuß breiten Canale fortgeführte Wasserquantum zu bestimmen, hat man eine Spundwand mit einer nach außen abgeschrägten Kante eingezogen, und das Wasser über diese wegfließen lassen. Nachdem das Steigen des Oberwassers aufgehört hatte, ergab sich der Wasserstand über dem Grundboden $3\frac{1}{2}$ Fuß, und über der Schwelle $1\frac{1}{2}$ Fuß; es war daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3 \,.\, 5 \,.\, 7{,}906 \,.\, \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = 48{,}41 \text{ Cubikfuß}.$$

Der Ausflußcoefficient fällt hier, da $\frac{h}{a_1} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = {}^3/_7$ und $\mu_0 = 0{,}577$ ist,

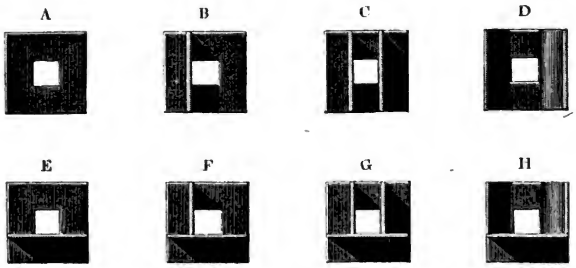
$\mu_{3/7} = [1{,}041 + 0{,}3693 \,.\, ({}^3/_7)^2] \,.\, 0{,}577 = 1{,}110 \,.\, 0{,}577 = 0{,}64$ aus, daher die effective Wassermenge:

$Q_1 = 0{,}64 \,.\, Q = 0.64 \,.\, 48{,}41 = 31$ Cubikfuß.

Digitized by Google

§. 418 **Verſuche von Lesbros.** Eine große Anzahl von Verſuchen über den Ausfluß des Waſſers durch rectanguläre Mündungen in der dünnen Wand mit verſchiedenartigen inneren und äußeren Einfaſſungswänden (bei partieller und unvollkommener Contraction des Waſſerſtrahles) ſind von dem Herrn Lesbros (ſ. deſſen Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau) ausgeführt worden. Wir theilen hiervon im Folgenden nur die Hauptreſultate der an einer rectangulären Mündung von 2 Decimeter Weite angeſtellten Verſuche mit. Die ſo verſchieden eingefaßten Mündungen ſind in der Fig. 715 durch die Buchſtaben *A*, *B*, *C* u. ſ. w. von einander unterſchieden, und zwar bezeichnet:

Fig. 715.




*A* eine gewöhnliche Mündung ohne alle Einfaſſung (wie in §. 410);

*B* eine ſolche Mündung innen an einer Seite mit einer verticalen Wand bekleidet, welche 2 Centimeter von der einen Seitenkante der Mündung abſteht, und rechtwinkelig gegen die Mündungsebene gerichtet iſt;

*C* die erſte Mündung auf jeder Seite mit einer ſolchen Wand eingefaßt;

*D* die Mündung *A* innen auf beiden Seiten mit verticalen Wänden eingefaßt, welche unter einem Winkel von 90 Grad gegen einander convergiren, und hierbei unter einem Winkel von 45 Grad, und zwar in dem Abſtande = 2 Centimeter von den Seitenkanten der Mündung, an die Mündungsebene anſtoßen;

*E* die Mündung *A* mit einer horizontalen Wand, welche quer über dem Ausflußreſervoir weggeht und genau bis an die untere Mündungskante reicht;

*F* die Mündung *B*,

*G* die Mündung *C*, und

*H* die Mündung *D* mit einer horizontalen Wand wie in *E*, welche die Contraction an der unteren Mündungskante ganz aufhebt.

Digitized by Google

## I.

### Tabelle der Ausflußcoefficienten für den freien Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. s. w.

| Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen. | Mündungshöhe. | Ausflußcoefficienten für die Mündungen: | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
| Meter. | Meter. | | | | | | | | |
| 0,020 | 0,200 | 0,572 | 0,587 | — | 0,589 | 0,599 | — | — | — |
| 0,050 | | 0,585 | 0,593 | 0,631 | 0,595 | 0,608 | 0,622 | — | 0,636 |
| 0,100 | | 0,592 | 0,600 | 0,631 | 0,601 | 0,615 | 0,628 | — | 0,639 |
| 0,200 | | 0,598 | 0,606 | 0,632 | 0,607 | 0,621 | 0,633 | 0,708 | 0,643 |
| 0,500 | | 0,603 | 0,610 | 0,631 | 0,611 | 0,623 | 0,636 | 0,680 | 0,644 |
| 1,000 | | 0,605 | 0,611 | 0,628 | 0,612 | 0,624 | 0,637 | 0,676 | 0,642 |
| 1,500 | | 0,602 | 0,611 | 0,627 | 0,611 | 0,624 | 0,637 | 0,672 | 0,641 |
| 2,000 | | 0,601 | 0,610 | 0,626 | 0,611 | 0,619 | 0,636 | 0,668 | 0,640 |
| 3,000 | | 0,601 | 0,609 | 0,624 | 0,610 | 0,614 | 0,634 | 0,665 | 0,638 |
| 0,020 | 0,050 | 0,616 | 0,627 | 0,647 | 0,631 | 0,664 | 0,663 | — | 0,678 |
| 0,050 | | 0,625 | 0,630 | 0,646 | 0,632 | 0,667 | 0,669 | 0,690 | 0,677 |
| 0,100 | | 0,630 | 0,633 | 0,645 | 0,633 | 0,669 | 0,674 | 0,688 | 0,677 |
| 0,200 | | 0,631 | 0,635 | 0,642 | 0,633 | 0,670 | 0,676 | 0,687 | 0,675 |
| 0,500 | | 0,628 | 0,634 | 0,637 | 0,632 | 0,668 | 0,676 | 0,682 | 0,671 |
| 1,000 | | 0,625 | 0,628 | 0,635 | 0,627 | 0,666 | 0,672 | 0,680 | 0,670 |
| 1,500 | | 0,619 | 0,622 | 0,634 | 0,621 | 0,665 | 0,670 | 0,678 | 0,670 |
| 2,000 | | 0,613 | 0,616 | 0,634 | 0,615 | 0,664 | 0,670 | 0,674 | 0,669 |
| 3,000 | | 0,606 | 0,609 | 0,632 | 0,608 | 0,662 | 0,669 | 0,673 | 0,668 |

Digitized by Google

## II.

### Tabelle der Ausflußcoefficienten für den Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. ſ. w. mit äußeren Anſatzgerinnen.

Die Gerinne ſchloſſen ſich genau an die Mündung an, die dadurch ihre Abſchrägungen an den Seiten und am Boden verloren. Sie waren entweder horizontal und 3 Meter lang oder, und zwar bei den mit * bezeichneten Verſuchen, um $^1/_{10}$ ihrer nur 2,5 Meter betragenden Länge geneigt.

| Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemeſſen. | Mündungshöhe. | Ausflußcoefficienten für die Mündungen: | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* | *C* | *E* | *E** | *F* | *F** | *G* | *G** | *H* |
| Meter. | Meter. | | | | | | | | | | |
| 0,020 | | 0,480 | 0,489 | 0,496 | 0,480 | 0,527 | — | — | — | — | 0,488 |
| 0,050 | | 0,511 | 0,517 | 0,531 | 0,510 | 0,553 | 0,509 | 0,546 | 0,528 | — | 0,520 |
| 0,100 | | 0,542 | 0,545 | 0,563 | 0,538 | 0,574 | 0,534 | 0,569 | 0,560 | 0,593 | 0,552 |
| 0,200 | | 0,574 | 0,576 | 0,591 | 0,566 | 0,592 | 0,562 | 0,589 | 0,589 | 0,617 | 0,582 |
| 0,500 | 0,200 | 0,599 | 0,602 | 0,621 | 0,592 | 0,607 | 0,591 | 0,608 | 0,591 | 0,632 | 0,613 |
| 1,000 | | 0,601 | 0,609 | 0,628 | 0,600 | 0,610 | 0,601 | 0,615 | 0,601 | 0,638 | 0,623 |
| 1,500 | | 0,601 | 0,610 | 0,627 | 0,602 | 0,610 | 0,604 | 0,617 | 0,604 | 0,641 | 0,624 |
| 2,000 | | 0,601 | 0,610 | 0,626 | 0,602 | 0,609 | 0,604 | 0,617 | 0,604 | 0,642 | 0,624 |
| 3,000 | | 0,601 | 0,609 | 0,624 | 0,601 | 0,608 | 0,602 | 0,616 | 0,602 | 0,641 | 0,622 |
| 0,020 | | 0,488 | 0,555 | 0,557 | 0,487 | 0,585 | 0,483 | 0,579 | 0,512 | — | 0,494 |
| 0,050 | | 0,577 | 0,600 | 0,603 | 0,571 | 0,614 | 0,570 | 0,611 | 0,582 | 0,625 | 0,577 |
| 0,100 | | 0,624 | 0,625 | 0,628 | 0,605 | 0,632 | 0,609 | 0,628 | 0,621 | 0,639 | 0,616 |
| 0,200 | | 0,631 | 0,633 | 0,637 | 0,617 | 0,645 | 0,623 | 0,643 | 0,637 | 0,649 | 0,629 |
| 0,500 | 0,050 | 0,625 | 0,630 | 0,635 | 0,626 | 0,652 | 0,630 | 0,650 | 0,647 | 0,656 | 0,636 |
| 1,000 | | 0,624 | 0,627 | 0,635 | 0,628 | 0,651 | 0,633 | 0,651 | 0,649 | 0,656 | 0,638 |
| 1,500 | | 0,619 | 0,622 | 0,634 | 0,627 | 0,650 | 0,632 | 0,651 | 0,647 | 0,656 | 0,637 |
| 2,000 | | 0,613 | 0,616 | 0,634 | 0,623 | 0,650 | 0,631 | 0,651 | 0,644 | 0,656 | 0,635 |
| 3,000 | | 0,606 | 0,609 | 0,632 | 0,618 | 0,649 | 0,628 | 0,651 | 0,639 | 0,656 | 0,632 |

Digitized by Google

Beispiel. Welches Ausflußquantum giebt eine rectanguläre Mündung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn die untere Kante derselben 0,35 Meter unter dem Wasserspiegel und mit dem Boden des Ausflußgefäßes in einerlei Höhe steht, und zwar 1) beim freien Ausfluß, und 2) beim Ausfluß durch ein kurzes horizontales Ansatzgerinne? Man hat es hier mit der Mündung $E$ zu thun, wobei die Druckhöhe über der oberen Kante, $= 0{,}35 - 0{,}10 = 0{,}25$ Meter ist. Die Tabelle I. giebt für den Werth 0,20 Meter dieser Höhe bei der Mündungshöhe $= 0{,}20$ Meter, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}621$, und dagegen bei der Mündungshöhe $= 0{,}05$ Meter, $\mu = 0{,}670$; daher möchte für den ersten Fall der Aufgabe

$$\mu_1 = \frac{0{,}621 + 0{,}670}{2} = 0{,}645 \text{ zu setzen sein.}$$

Die Tabelle II. giebt dagegen bei der Wasserhöhe 0,25 Meter über der oberen Mündungskante durch Interpolation für $\mu$ die Werthe:

$$0{,}566 + {}^5/_{30}\,(0{,}592 - 0{,}566) = 0{,}570, \text{ und}$$
$$0{,}617 + {}^5/_{30}\,(0{,}626 - 0{,}617) = 0{,}619,$$

folglich ist für den zweiten Fall

$$\mu_2 = \frac{0{,}570 + 0{,}619}{2} = 0{,}594 \text{ zu setzen.}$$

Der Querschnitt der Mündung ist:

$$F = a\,b = 0{,}20\,.\,0{,}10 = 0{,}020 \text{ Quadratmeter,}$$

und die mittlere Druckhöhe ist:

$$h = 0{,}350 - 0{,}050 = 0{,}300 \text{ Meter,}$$

folglich die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = F\sqrt{2\,g\,h} = 0{,}02\,\sqrt{2\,.\,9{,}81\,.\,0{,}3} = 0{,}02\,\sqrt{5{,}886}$$
$$= 0{,}02\,.\,2{,}425 = 0{,}0485 \text{ Cubikmeter;}$$

sowie die effective Ausflußmenge, im ersten Falle:

$$Q_1 = \mu_1\,Q = 0{,}645\,.\,0{,}0485 = 0{,}0313 \text{ Cubikmeter,}$$

und dagegen im zweiten Falle, d. i. bei einem Ansatzgerinne:

$$Q_2 = \mu_2\,Q = 0{,}594\,.\,0{,}0485 = 0{,}0288 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach der Formel $\mu_n = (1 + 0{,}155\,n)\,\mu_0$ in §. 414 für den Ausfluß bei partieller Contraction läßt sich, da hier vom ganzen Mündungsumfang ${}^2/_6 = {}^1/_3$ eingefaßt ist, $\mu_n = \mu_{1/3} = (1 + 0{,}052)\,\mu_0 = 1{,}052\,\mu_0$ setzen. Nun ist aber für eine solche Mündung bei vollständiger Contraction nach Tabelle I., Seite 797, $\mu_0 = 0{,}616$, daher folgt hiernach:

$$\mu_{1/3} = 1{,}052\,.\,0{,}616 = 0{,}648, \text{ und}$$
$$Q_1 = \mu_{1/3}\,Q = 0{,}648\,.\,0{,}0485 = 0{,}0314 \text{ Cubikmeter,}$$

also wenig größer als nach der Lesbros'schen Tabelle.

Herr Lesbros hat auch noch mittels der Mündungen $A$, $B$, $C$ u. s. w. §. 419
Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen, wobei der Wasserspiegel die obere Kante der Mündung nicht erreicht, angestellt, und es sind die Hauptergebnisse derselben in folgenden Tabellen zusammengestellt worden.

Digitized by Google

I. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den freien Ausfluß durch Ueberfälle oder Wandeinſchnitte.

| Druckhöhe über der Schwelle im ſtillſtehenden Waſſer gemeſſen. | Ausflußcoefficienten für die Mündungen: | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* |
| Meter. | | | | | | | |
| 0,015 | 0,421 | 0,450 | 0,450 | 0,441 | 0,395 | 0,371 | 0,305 |
| 0,020 | 0,417 | 0,446 | 0,444 | 0,437 | 0,402 | 0,379 | 0,318 |
| 0,030 | 0,412 | 0,437 | 0,435 | 0,430 | 0,410 | 0,388 | 0,337 |
| 0,040 | 0,407 | 0,430 | 0,429 | 0,424 | 0,411 | 0,394 | 0,352 |
| 0,050 | 0,404 | 0,425 | 0,426 | 0,419 | 0,411 | 0,398 | 0,362 |
| 0,070 | 0,398 | 0,416 | 0,422 | 0,412 | 0,409 | 0,402 | 0,375 |
| 0,100 | 0,395 | 0,409 | 0,420 | 0,405 | 0,408 | 0,405 | 0,382 |
| 0,150 | 0,393 | 0,406 | 0,423 | 0,403 | 0,407 | 0,407 | 0,383 |
| 0,200 | 0,390 | 0,402 | 0,424 | 0,403 | 0,405 | 0,408 | 0,383 |
| 0,250 | 0,379 | 0,396 | 0,422 | 0,401 | 0,404 | 0,407 | 0,381 |
| 0,300 | 0,371 | 0,390 | 0,418 | 0,398 | 0,403 | 0,406 | 0,378 |

II. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den Ausfluß durch Ueberfälle mit kurzen Anſatzgerinnen.

| Druckhöhe über der Schwelle, im ſtillſtehenden Waſſer gemeſſen. | Ausflußcoefficienten für die Mündungen: | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* | *C** | *E* | *F* | *G* | *H* |
| Meter. | | | | | | | | |
| 0,015 | — | 0,375 | 0,388 | 0,400 | — | — | — | — |
| 0,020 | 0,196 | 0,368 | 0,383 | 0,395 | 0,208 | 0,201 | 0,175 | 0,190 |
| 0,030 | 0,234 | 0,358 | 0,373 | 0,385 | 0,232 | 0,228 | 0,205 | 0,222 |
| 0,040 | 0,263 | 0,351 | 0,365 | 0,379 | 0,251 | 0,250 | 0,234 | 0,250 |
| 0,050 | 0,278 | 0,346 | 0,360 | 0,375 | 0,268 | 0,267 | 0,260 | 0,272 |
| 0,070 | 0,292 | 0,343 | 0,352 | 0,371 | 0,288 | 0,289 | 0,285 | 0,296 |
| 0,100 | 0,304 | 0,340 | 0,345 | 0,369 | 0,302 | 0,304 | 0,299 | 0,313 |
| 0,150 | 0,315 | 0,335 | 0,340 | 0,367 | 0,314 | 0,316 | 0,313 | 0,327 |
| 0,200 | 0,319 | 0,331 | 0,338 | 0,366 | 0,323 | 0,322 | 0,322 | 0,335 |
| 0,250 | 0,321 | 0,328 | 0,336 | 0,364 | 0,329 | 0,326 | 0,329 | 0,341 |
| 0,300 | 0,324 | 0,326 | 0,334 | 0,361 | 0,332 | 0,329 | 0,332 | 0,345 |

Digitized by Google

Die Vergleichung der Coefficienten in Tabelle I. und Tabelle II. zeigt, daß durch die kurzen Ansatzgerinne die Ausflußmenge bei Mündungen mit dem kurzen Gerinne kleiner ausfällt als bei Mündungen ohne dieses Gerinne, und zwar um so kleiner, je kleiner die Druckhöhe ist; auch ist aus der Vergleichung zwischen den Columnen unter $C$ und $C^*$, sowie unter $E$, $E^*$, $F$, $F^*$ und $G$, $G^*$ in den Tabellen des vorigen Paragraphen zu ersehen, daß die geneigten Ansatzgerinne den Ausfluß weniger stören als die horizontalen.

Anmerkung 1. Eine abweichende Theorie über den Ausfluß entwickelt G. Boileau in seinen Traité sur la mesure des eaux courantes. Hiernach ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers an allen Stellen des Querschnittes eine und dieselbe, und zwar entsprechend der Tiefe der oberen Begrenzungslinie des Strahles in der Ebene der Mündung unter dem Wasserspiegel im Ausflußreservoir. Dieselbe Formel wendet Boileau auch auf Ueberfälle an; wobei er natürlich stets die Kenntniß der Strahlhöhe in der Mündungsebene nöthig hat. Später, im 12. Bande der 5. Reihe von den Annales des mines, 1857, hat Herr Clarinval eine andere Formel für den Ausfluß durch Ueberfälle entwickelt, in welcher gar keine Erfahrungszahl $\mu$ vorkommt, sondern statt $\frac{2}{3}\mu$ der Factor $a\sqrt{1-\frac{a}{h}}\Big/\sqrt{2\,(h^2-a^2)}$, worin $h$ die Druckhöhe und $a$ die Strahldicke über der Ueberfallschwelle bezeichnen, einzusetzen ist. S. den „Civilingenieur" Band V. Ich halte die Begründung dieser Formel nicht für richtig.

Anmerkung 2. Herr J. Francis giebt in seinem Werke: „The Lowell Hydraulic Experiments, Boston 1855", für den Ausfluß durch breite Ueberfälle folgende Formel an:

$$Q = 3{,}33\,(l - 0{,}1\,n\,h)\,h^{3/2}$$ Cubikfuß engl.,

worin $h$ die Druckhöhe über der Schwelle, $l$ die Länge der letzteren und $n$ entweder 0 oder 1 oder 2 ist, je nachdem die Contraction des Wasserstrahles an beiden, an einer, oder an keiner Seite aufgehoben ist. Da für das englische Maß

$$\sqrt{2g} = 8{,}025$$

ist, so hat man folglich hiernach:

$$\tfrac{2}{3}\mu = \frac{3{,}33}{8{,}025} = 0{,}415.$$

Die Versuche, worauf sich diese Formel gründet, sind an 10 Fuß breiten Ueberfällen und bei 0,6 bis 1,6 Fuß Druckhöhe angestellt worden. Die Ueberfallkante wurde durch eine stromabwärts abgeschrägte eiserne Platte gebildet, das Reservoir hatte eine Breite von 13,96 Fuß, und die Schwelle stand 4,6 Fuß über dem Boden desselben. Siehe den „Civilingenieur", Band II., 1856.

Bakewell's Versuche über den Ausfluß durch Ueberfälle (s. polytechn. Centralblatt 18. Jahrgang 1852) liefern zum Theil ziemlich abweichende Resultate.

Anmerkung 3. An den Schützen der Hammerräder zu Remscheid hat Herr Röntchen $\mu = 0{,}90$ bis $0{,}93$ gefunden. S. Dingler's Journal, Bd. 158.



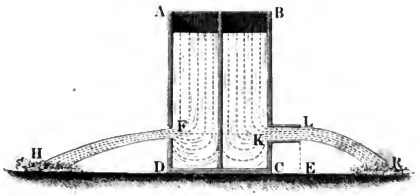
Digitized by Google

## Drittes Capitel.

## Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

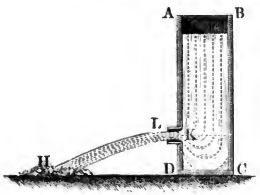
§. 420 **Kurze Ansatzröhren.** Läßt man das Wasser durch eine kurze Ansatzröhre (franz. tuyau additionel; engl. short pipe) ausfließen, so treten ganz andere Verhältnisse ein, als wenn es durch Mündungen in der dünnen, oder durch nach außen abgeschrägte Mündungen in der dicken Wand ausfließt. Ist die Ansatzröhre prismatisch, und ihre Länge $2^1/_2$ bis 3 mal so groß als ihre Weite, so giebt sie einen uncontrahirten und undurchsichtigen Strahl, welcher eine kleinere Sprungweite und daher auch eine kleinere Geschwindigkeit hat, als der durch eine Mündung in der dünnen Wand unter übrigens gleichen Umständen ausfließende Strahl. Hat also die Röhre $KL$ mit der Mündung $F$, Fig. 716, gleichen Querschnitt und ist auch die Druckhöhe von

Fig. 716.




beiden eine und dieselbe, so erhält man in $LR$ einen trüben und uncontrahirten, also dickeren, und in $FH$ einen klaren und contrahirten, also schwächeren Strahl, und es läßt sich auch wahrnehmen, daß die Sprungweite $ER$ kleiner ist als die Sprungweite $DH$. Dieses Ausflußverhältniß tritt aber nur dann ein, wenn die Röhre die angegebene Länge hat; ist die Röhre kürzer, vielleicht nur so lang als weit, so legt sich der Strahl $KR$, Fig. 717, gar nicht an die Röhrenwand an, es bleibt die Röhre ganz ohne Einwirkung auf den Ausfluß, und der Strahl fällt wie beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand aus.

Fig. 717.

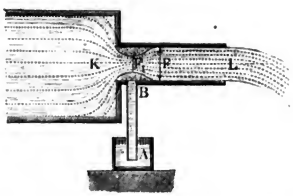



Zuweilen findet auch bei Röhren von größerer Länge ein Ausfüllen der Röhre durch den Strahl nicht statt, nämlich dann, wenn dem Wasser keine

Digitized by Google

Gelegenheit gegeben worden ist, mit der Röhrenwand in Berührung zu kommen; verschließt man aber in diesem Falle die äußere Mündung durch die Hand oder durch ein Brett auf einige Augenblicke, so bildet sich nachher ein die Röhre vollkommen füllender Strahl, und es findet ein sogenannter **voller Ausfluß** (franz à gueule bée; engl. of filled tube) statt. Die Contraction des Wasserstrahles findet auch beim Ausfluß durch Röhren statt, nur fällt hier der contrahirte Theil in das Innere der Röhre. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man sich gläserner Ansatzröhren, wie $KL$ Fig. 718, bedient, und kleine Körper im Wasser schwimmen läßt, denn man bemerkt in diesem Falle, daß nur in der Mitte des Querschnittes $F_1$ nahe hinter der Eintrittsstelle $K$, nicht aber am Umfange desselben progressive Bewegung vorhanden ist, daß hier vielmehr nur eine wirbelnde Bewegung stattfindet. Es ist aber die Capillarität oder die Adhäsion des Wassers an der Röhrenwand, welche macht, daß das Wasser das Ende $FL$ der Röhre ganz ausfüllt. Das aus der Röhre fließende Wasser hat nur den der Atmosphäre gleichen Druck, nun ist aber der contrahirte Querschnitt $F_1$ nur $\alpha$ mal so groß als der Querschnitt $F$ der Röhre, und deshalb die Geschwindigkeit $v_1$ in ihm $\frac{1}{\alpha}$ mal so groß als die Ausflußgeschwindigkeit $v$, daher ist auch der Druck des Wassers in der Nähe von $F_1$ kleiner als beim Austritte, oder als der Atmosphärendruck. Bohrt man bei $F_1$ ein enges Loch in die Röhre, so findet auch wirklich kein Ausfluß durch dasselbe, sondern vielmehr ein Einsaugen von Luft statt, auch hört endlich der volle Ausfluß und die Einwirkung der Ansatzröhre ganz auf, wenn man das Loch weiter macht, oder mehrere Löcher anbringt. Ebenso kann man auch das Wasser in der Röhre $AB$ zum Steigen und zum Ausfluß durch die Röhre $KL$ bringen, wenn man dieselbe bei $F_1$ in die letztere einmünden läßt. Der volle Ausfluß hört bei der einfachen cylindrischen Röhre ganz auf, wenn die Druckhöhe ein gewisse Größe erreicht, siehe §. 439, Capitel IV.

Fig. 718.




**Cylindrische Ansatzröhren.** Ueber den Ausfluß des Wassers durch §. 421
kurze cylindrische Ansatzröhren sind von Vielen Versuche angestellt worden, doch weichen die Resultate derselben ziemlich viel von einander ab. Namentlich sind es die Bossut'schen Ausflußcoefficienten, welche durch ihre Kleinheit (0,785) von den von Anderen gefundenen bedeutend abweichen.



Digitized by Google

Aus den Versuchen von Michelotti mit $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll weiten Röhren und bei 3 bis 20 Fuß Druckhöhe folgt im Mittel dieser Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}813$. Die Versuche von Bidone, Eytelwein und d'Aubuisson weichen hiervon nur wenig ab. Im Mittel läßt sich aber, namentlich auch den Versuchen des Verfassers entsprechend, der Ausflußcoefficient für kurze cylindrische Ansatzröhren $\mu = 0{,}815$ setzen. Da wir denselben für runde Mündungen in der dünnen Wand 0,615 gefunden haben, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen durch kurze Ansatzröhren $\frac{0{,}815}{0{,}615} = 1{,}325$ mal so viel Wasser ausfließt als durch runde Mündungen in der dünnen Wand. Uebrigens wachsen diese Ausflußcoefficienten, wenn die Röhrenweite kleiner wird, und nehmen auch wenig zu bei Abnahme der Druckhöhe oder Ausflußgeschwindigkeit. Nach den bei einem Drucke von 0,23 bis 0,60 Meter angestellten Versuchen des Verfassers ist für Röhren, welche 3 mal so lang als weit sind:

| bei | 1 | 2 | 3 | 4 Centimeter Weite |
|---|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,843 | 0,832 | 0,821 | 0,810 |

Dieser Tabelle zufolge nehmen also die Ausflußcoefficienten merklich zu, wenn die Röhrenweite kleiner wird. Ebenso fand Buff bei einer 2,79 Linien weiten und 4,3 Linien langen Röhre die Ausflußcoefficienten allmälig von 0,825 bis 0,855 zunehmend, wenn die Druckhöhe von 33 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll nach und nach herabsank.

Beim Ausflusse des Wassers durch kurze parallelepipedische Ansatzröhren fand der Verfasser einen Ausflußcoefficienten von 0,819.

Sind die Ansatzröhren $KL$, Fig. 719, inwendig theilweise eingefaßt, stoßen sie z. B. mit der einen Seite an den Boden $CD$ des Gefäßes an, und wird dadurch eine partielle Contraction herbeigeführt, so steigt, nach den Versuchen des Verfassers, der Ausflußcoefficient nicht ansehnlich, wohl aber fließt das Wasser an verschiedenen Stellen des Querschnittes mit verschiedenen Ge-

Fig. 719.

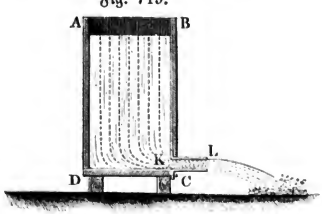
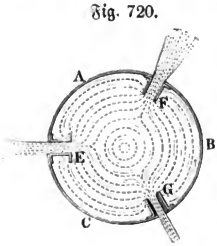



Fig. 720.




Digitized by Google

schwindigkeiten, und zwar auf der Seite $C$ schneller aus, als auf der gegenüberliegenden.

Wenn die innere Stirnfläche einer Ansatzröhre nicht in die Wandfläche fällt, sondern vorsteht, wie $E$, $F$, $G$, Fig. 720, so nennt man diese Röhre eine innere Ansatzröhre. Ist die Stirnfläche dieser Röhre mindestens $^1/_5$mal so breit als die Röhre weit, wie z. B. $E$, so bleibt der Ausflusscoefficient derselbe, als wenn die Stirnfläche in der Ebene der Wand läge, ist aber die Stirnfläche schmaler, wie z. B. $F$ und $G$, so fällt der Ausflusscoefficient kleiner aus. Bei einer sehr schmalen fast verschwindenden Stirnfläche wird derselbe den Versuchen Bidone's und des Verfassers zufolge 0,71, wenn der Strahl die Röhre ausfüllt; dagegen 0,53 (vergl. §. 412), wenn er sich gar nicht an die innere Röhrenwand anlegt. Im ersten Falle ($F$) ist der Strahl ganz zerrissen und besenförmig divergirend, im zweiten ($G$) aber stark zusammengezogen und ganz krystallrein.

**Widerstandscoefficient.** Da das Wasser ohne Contraction aus der §. 422
prismatischen Ansatzröhre tritt, so folgt, daß bei dem Ausflusse durch diese Mundstücke der Contractionscoefficient $\alpha = \text{Eins}$ und der Geschwindigkeitscoefficient $\varphi = \text{dem Ausflußcoefficienten } \mu$ ist. Eine mit der Geschwindigkeit $c$ ausströmende Wassermenge $Q$ besitzt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} v^2$ und kann dadurch die mechanische Arbeit $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (s. §. 74) verrichten. Nun ist aber bei dem Ausflusse die theoretische Geschwindigkeit $= \frac{v}{\varphi}$, daher entspricht der ausfließenden Wassermasse die Leistung $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, und es verliert sonach die Wassermenge $Q$ durch den Ausfluß die mechanische Arbeit:

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma.$$

Beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand ist $\varphi$ im Mittel $= 0{,}975$, daher beträgt hier der Arbeitsverlust:

$$\left[\left(\frac{1}{0{,}975}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0{,}052 \frac{v^2}{2g} Q\gamma;$$

beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansätze ist dagegen $\varphi = 0{,}815$ und es stellt sich der entsprechende Verlust an Arbeit

$$= \left[\left(\frac{1}{0{,}815}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0{,}505 \frac{v^2}{2g} Q\gamma,$$

d. i. nahe 10mal so groß heraus, als beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand. Bei Benutzung der lebendigen Kraft des ausfließenden Wassers ist es folglich besser, das Wasser durch Mündungen in der dünnen

Digitized by Google

Wand als durch prismatische Ansatzröhren ausfließen zu lassen. Wenn man aber die inneren Kanten, womit die Röhre an die Gefäßwand stößt, abrundet und dadurch einen allmäligen Uebergang aus dem Gefäße in die Röhre hervorbringt, so wird der Ausflußcoefficient auf 0,96 gesteigert und zugleich der Arbeitsverlust auf $8^1/_2$ Procent herabgezogen. Bei kürzeren, genau abgerundeten oder nach der Form des contrahirten Wasserstrahles gebildeten Mundstücken ist $\mu = \varphi = 0{,}975$ und daher der Arbeitsverlust wie bei Mündungen in der dünnen Wand 5 Procent.

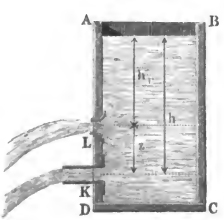
Dem Arbeitsverluste $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma$ entspricht eine Druckhöhe $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g}$; man kann sich daher auch vorstellen, daß durch die Hindernisse des Ausflusses die Druckhöhe den Verlust $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g}$ erleide, und annehmen, daß nach Abzug dieses Verlustes der übrigbleibende Theil der Druckhöhe auf die Erzeugung der Geschwindigkeit verwendet werde. Diesen mit dem Quadrate der Ausflußgeschwindigkeit proportional wachsenden Verlust $z = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g}$ kann man Widerstandshöhe (franz. hauteur de résistance; engl. height of resistance) und den Coefficienten $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, womit die Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren ist, um die Widerstandshöhe zu erhalten, den Widerstandscoefficienten nennen. Wir werden in der Folge diesen, auch das Verhältniß der Widerstandshöhe zur Druckhöhe ausdrückenden Coefficienten durch den Buchstaben $\zeta$ bezeichnen, also die Widerstandshöhe selbst durch $z = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$ ausdrücken. Durch die Formeln

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \text{ und}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$$

läßt sich aus dem Geschwindigkeitscoefficienten der Widerstandscoefficient, und aus diesem wieder jener berechnen.

Fig. 721.




Bei derselben Ausflußgeschwindigkeit $v$ ist die Druckhöhe für eine Mündung $K$, Fig. 721, welcher der Geschwindigkeitscoefficient $\varphi$ entspricht, $h = \frac{v^2}{2g\varphi^2}$, und die

Druckhöhe der Mündung $L$, durch welche das Wasser mit der theoretischen Geschwindigkeit ausfließt, $h_1 = \frac{v^2}{2g}$, folglich muß die erste Mündung um die Größe $KL = z = h - h_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \zeta\frac{v^2}{2g}$, welche wir die Widerstandshöhe genannt haben, tiefer liegen als die letztere. Wenn beide einen gleichen Querschnitt $F$ haben, und das Wasser durch beide ohne Contraction ausfließt, so ist auch die Ausflußmenge $Q = Fv$ für beide Mündungen eine und dieselbe.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt unter einer Druckhöhe von 3 Fuß durch eine 2 Zoll weite Röhre aus, welcher der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}4$ entspricht? Es ist

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1{,}4}} = 0{,}845, \text{ daher:}$$

$$v = 0{,}845 \,.\, 7{,}906\,\sqrt{3} = 11{,}574 \text{ Fuß, ferner:}$$

$$F = (1/12)^2\,\pi = 0{,}02182 \text{ Quadratfuß,}$$

folglich das gesuchte Wasserquantum:

$$Q = 0{,}02182 \,.\, 11{,}574 = 0{,}253 \text{ Cubikfuß.}$$

2) Wenn eine Röhre von 2 Zoll Weite unter einem Drucke von 2 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser liefert, so ist ihr Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} = \frac{10}{60\,.\,0{,}02182\,.\,7{,}906\,.\,\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}035\,\sqrt{2}} = 0{,}683,$$

der Widerstandscoefficient: $\zeta = \left(\frac{1}{0{,}683}\right)^2 - 1 = 1{,}143,$

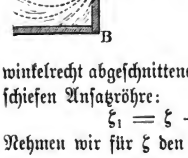
und endlich der durch die Hindernisse der Röhre bewirkte Verlust an Druckhöhe:

$$z = \zeta\frac{v^2}{2g} = 1{,}143\,.\frac{v^2}{2g} = 1{,}143\,.0{,}016\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0{,}0183\,.\,\frac{1}{0{,}1309^2}$$

$$= 1{,}066 \text{ Fuß.}$$

**Schiefe Ansatzröhren.** Schief angesetzte oder schief abgeschnittene Ansatzröhren geben ein kleineres Wasserquantum als rechtwinkelig angesetzte oder rechtwinkelig abgeschnittene Ansatzröhren, weil die Richtung des Wassers in denselben eine Aenderung erleidet. Die hierüber in nicht unbedeutender Ausdehnung angestellten Versuche haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Ist $\delta$ der Winkel $LKN$, welchen die Röhrenaxe $KL$, Fig. 722, mit der Normale $KN$ zur Ebene $AB$ der Einmündung einschließt, und bezeichnet $\zeta$ den Widerstandscoefficienten für die winkelrecht abgeschnittene Röhre, so hat man den Widerstandscoefficienten der schiefen Ansatzröhre: §. 423

Fig. 722.




$$\zeta_1 = \zeta + 0{,}303\,\sin.\,\delta + 0{,}226\,\sin.\,\delta^2.$$

Nehmen wir für $\zeta$ den mittleren Werth 0,505 an, so erhalten wir:

Digitized by Google

| bei $\vartheta^0 =$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 Grad. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| den Widerstandscoefficienten $\zeta_1 =$ | 0,505 | 0,565 | 0,635 | 0,713 | 0,794 | 0,870 | 0,937 |
| den Ausflußcoefficienten $\mu_1 =$ | 0,815 | 0,799 | 0,782 | 0,764 | 0,747 | 0,731 | 0,719 |

Hiernach ist z. B. der Widerstandscoefficient einer kurzen Ansatzröhre bei 20 Grad Axenabweichung, $\zeta_1 = 0{,}635$ und der Ausflußcoefficient

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1{,}635}} = 0{,}782,$$

dagegen bei 35° Axenabweichung, der erstere $= 0{,}753$ und der letztere $= 0{,}755$.

In der Regel sind diese schiefen Ansatzröhren länger, als wir seither angenommen haben, auch müssen dieselben länger sein, wenn sie vom Wasser vollkommen ausgefüllt werden sollen. Die vorstehende Formel giebt nur denjenigen Theil des Widerstandes an, welcher dem Röhrenstück an der Einmündung entspricht, das dreimal so lang als die ganze Röhre weit ist. Der Widerstand, welchen das übrige Röhrenstück der Bewegung des Wassers entgegensetzt, wird in der Folge angegeben.

**Beispiel.** Wenn die Einmündungsebene $AB$ eines horizontal liegenden Teichgerinnes $KL$, Fig. 723, sowie die Innenfläche des Teichdammes 40 Grad gegen den Horizont geneigt ist, so schließt die Röhrenaxe mit der Normale dieser Ebene einen Winkel von 50 Grad ein, und es ist daher der Widerstandscoefficient für den Ausfluß durch das Einmündungsstück dieser Röhre, $\zeta_1 = 0{,}870$, und wenn nun dem übrigen und längeren Röhrenstücke der Widerstandscoefficient 0,650 entspräche, so wäre der Widerstandscoefficient für die ganze Röhre

Fig. 723.

$$\zeta = 0{,}870 + 0{,}650 = 1{,}520,$$

und daher der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 1{,}520}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}520}} = 0{,}630.$$

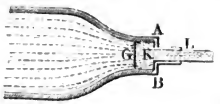
Bei 10 Fuß Druckhöhe und 1 Fuß Röhrenweite ergäbe sich folglich die Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}630 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}906\sqrt{10} = 12{,}37 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 424 **Unvollkommene Contraction.** Mündet eine kurze cylindrische Ansatzröhre $KL$, Fig. 724, in einer ebenen Wand $AB$ ein, deren Inhalt $G$ den Querschnitt $F$ der Röhre nicht vielmal übertrifft, so kommt

das Wasser mit einer nicht zu vernachlässigenden Geschwindigkeit an der Einmündungsstelle an, und es tritt deshalb nur mit unvollkommener Contraction in das Rohr, weshalb wieder die Ausflußgeschwindigkeit eine größere ist, als wenn das Wasser als stillstehend vor dem Eintritt in die Röhre angenommen werden kann. Ist wieder $\frac{F}{G} = n$ das Verhältniß des Röhrenquerschnittes zum Inhalte der Wandfläche, ferner $\mu_0$ der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction, wo $\frac{F}{G}$ der Null gleich gesetzt werden kann, so hat man, den Versuchen des Verfassers zufolge, den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction oder dem Querschnittsverhältnisse $n$ zu setzen:

Fig. 724.




$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3, \text{ oder}$$

$$\mu_n = \mu_0\,(1 + 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3).$$

Nimmt z. B. der Röhrenquerschnitt den sechsten Theil der ganzen Wandfläche ein, so ist:

$$\mu_{1/6} = \mu_0\,(1 + 0{,}102\,.\,{}^1/_6 + 0{,}067\,.\,{}^1/_{36} + 0{,}046\,.\,{}^1/_{216})$$
$$= \mu_0\,(1 + 0{,}017 + 0{,}0019 + 0{,}0002) = 1{,}019\,\mu_0,$$

oder $\mu_0 = 0{,}815$ gesetzt:

$$\mu_{1/6} = 0{,}815\,.\,1{,}019 = 0{,}830.$$

Etwas genauer giebt die Correctionswerthe $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ folgende, zum Gebrauch bequeme Tabelle an.

## Tabelle

der Correctionen der Ausflußcoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction, beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

| $n$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,006 | 0,013 | 0,020 | 0,027 | 0,035 | 0,043 | 0,052 | 0,060 | 0,070 | 0,080 |

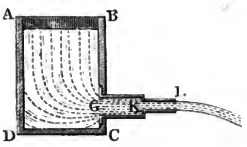
| $n$ | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ | 0,090 | 0,102 | 0,114 | 0,127 | 0,138 | 0,152 | 0,166 | 0,181 | 0,198 | 0,227 |

Digitized by Google

Beim Ausflusse durch kurze parallelepipedische Röhren sind diese Correctionen ziemlich die nämlichen.

Diese Coefficienten finden ihre Anwendung vorzüglich beim Ausflusse des Wassers durch zusammengesetzte Röhren, wie z. B. in dem durch die Fig. 725 dargestellten Falle, wo die kurze Ansatzröhre $KL$ in einer weiteren kurzen Ansatzröhre $GK$ und diese wieder in dem Gefäße $AC$ einmündet. Hier ist beim Eintritt des Wassers aus der weiteren Röhre in die engere unvollkommene Contraction vorhanden und daher der Ausflußcoefficient nach der letzten Regel zu bestimmen.

Fig. 725.




Setzen wir den diesem Ausflußcoefficienten entsprechenden Widerstandscoefficienten $= \zeta_1$, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt aus dem Gefäße in die weitere Röhre, $= \zeta$, die Druckhöhe $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ und das Verhältniß $\frac{F}{G}$ der Röhrenquerschnitte, $= n$, also die Geschwindigkeit des Wassers in der weiteren Röhre, $= nv$, so gilt die Formel:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{(nv)^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$h = (1 + n^2\zeta + \zeta_1)\,\frac{v^2}{2g}, \text{ und es ist daher:}$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + n^2\zeta + \zeta_1}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge liefert der in Fig. 725 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, die Weite der engeren Röhre 2 Zoll und die der weiteren 3 Zoll beträgt? Es ist:

$$n = (2/3)^2 = 4/9, \text{ daher } \mu_{4/9} = 1{,}069 \,.\, 0{,}815 = 0{,}871$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}871}\right)^2 - 1 = 0{,}318; \text{ nun hat man aber:}$$

$$\zeta = 0{,}505 \text{ und } n^2 \,.\, \zeta = {}^{16}/_{81} \,.\, 0{,}505 = 0{,}099, \text{ daher folgt:}$$

$$1 + n^2\zeta + \zeta_1 = 1 + 0{,}099 + 0{,}318 = 1{,}417,$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906 \,.\, \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}417}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{1{,}417}} = 13{,}29 \text{ Fuß.}$$

Da endlich der Röhrenquerschnitt $F = \frac{\pi}{144} = 0{,}02182$ Quadratfuß ist, so folgt die Ausflußmenge:

$$Q = 13{,}29 \,.\, 0{,}02182 = 0{,}290 \text{ Cubikfuß.}$$

Digitized by Google

**Conische Ansatzröhren.** Conische Ansatzröhren geben andere §. 425
Ausflußmengen als prismatische oder cylindrische Ansatzröhren. Sie sind entweder conisch convergent oder conisch divergent; im ersten Falle ist die Ausmündung kleiner, im zweiten Falle aber ist sie größer als die Einmündung. Die Ausflußcoefficienten bei den ersteren Röhren sind größer und die bei den letzteren kleiner, als bei den cylindrischen Röhren. Eine und dieselbe conische Röhre giebt allerdings mehr Wasser, wenn man die weitere Mündung zur Ausmündung macht, wie $K$ in Fig. 726, als wenn man sie nach innen richtet wie $L$ in derselben Figur; allein sie giebt nicht in demselben Verhältniß mehr, als die weitere Mündung die engere übertrifft. Wenn Manche, wie z. B. Venturi und Eytelwein, für conisch divergente Röhren größere Ausflußcoefficienten angeben, als für conisch convergente, so ist zu berücksichtigen, daß sie immer den engeren Querschnitt als Mündung behandeln. Den Einfluß der Conicität der Röhren auf die Ausflußmenge führen folgende, unter Druckhöhen von 0,25 bis 3,3 Meter angestellte Versuche mit einer 9 Centimeter langen Röhre $AD$, Fig. 727, vor Augen. Die Weite dieser Röhre betrug an einem Ende $DE$, $= 2{,}468$, am anderen Ende $AB$, $= 3{,}228$ Centimeter, und der Convergenzwinkel, d. i. der Winkel $AOB$, unter den die gegenüberliegenden Seiten $AE$ und $BD$ eines Längenaxenschnittes zusammenlaufen, $= 4^0\,50'$. Beim Ausflusse durch die engere Mündung war der Ausflußcoefficient $= 0{,}920$; bei dem Ausflusse durch die weitere Mündung aber $= 0{,}553$; und wenn man die engere Einmündung als Querschnitt in die Rechnung einführt, ergab er sich $= 0{,}946$. Der Strahl war im ersten Falle, wo die Röhre als conisch convergentes Mundstück gebraucht wurde, wenig contrahirt, dicht und glatt, im zweiten Falle aber, wo er als conisch divergentes Mundstück diente, war er stark divergent, zerrissen und stark pulsirend. Ueber den Ausfluß durch conisch divergente Röhren haben noch Venturi und Eytelwein experimentirt. Beide Hydrauliker haben noch diese conischen Röhren an cylindrische und conoidische, nach der Form des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke angesetzt. Durch eine solche Verbindung, wie Fig. 728 (a. f. S.) darstellt, wo das divergente Ausmündungsstück $KL$ innen 12 und außen $21\frac{1}{2}$ Linien weit, und $8\frac{13}{16}$ Zoll lang war, wobei Convergenzwinkel $5^0\,9'$ maß, fand Eytelwein $\mu = 1{,}5526$, wenn er das

Fig. 726.

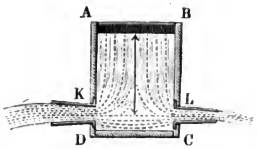
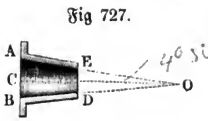



Fig 727.




Digitized by Google

engere Ende als Mündung behandelte, und dagegen $\mu$ nur $= 0{,}483$, wenn er, wie recht, das weitere Ende als Mündung anſah. Allerdings fließt

Fig. 728.

durch dieſes combinirte Mundſtück $\frac{1{,}5526}{0{,}615} = 2{,}5$ mal ſo viel, als durch die einfache Mündung in der dünnen Wand, und $\frac{1{,}5526}{0{,}815} = 1{,}9$ mal ſo viel als durch die kurze cylindriſche Anſatzröhre. Bei großen Geſchwindigkeiten und bei größerer Divergenz iſt es übrigens gar nicht möglich, ſelbſt durch vorhergegangenes Zuhalten der Röhren, den vollen Ausfluß herbeizuführen.

Auch fand der Verfaſſer für eine kurze coniſch divergente Anſatzröhre von 4 Centimeter Länge, 1 Centimeter innere und 1,54 Centimeter äußere Weite, wobei der Divergenzwinkel 8 Grad 4 Minuten maß, bei 0,4 Meter Druckhöhe, je nach dieſelbe innen abgerundet war oder nicht, entweder

$$\mu = 0{,}738 \text{ oder } \mu = 0{,}395.$$

§. 426 Die ausführlichſten Verſuche über den Ausfluß durch coniſch convergente Anſatzröhren ſind von d'Aubuiſſon und Caſtel angeſtellt worden. Die hierzu in Anwendung gekommenen Röhren waren von großer Mannigfaltigkeit, verſchieden in den Längen, Weiten und in den Convergenzwinkeln. Am ausgedehnteſten waren die Verſuche mit Röhren von 1,55 Centimeter Weite in der Ausmündung und von 2,6 mal ſo großer, d. i. von 4 Centimeter Länge, weswegen wir ihre Ergebniſſe auch in folgender Tabelle hier mittheilen. Die Druckhöhe war durchgängig 3 Meter. Die Ausflußmengen wurden durch ein beſonderes Aichgefäß gemeſſen, um aber außer den Ausflußcoefficienten auch noch die Geſchwindigkeits- und Contractionscoefficienten zu erhalten, wurden die gegebenen Höhen entſprechenden Sprungweiten der Waſſerſtrahlen gemeſſen und hieraus die Ausflußgeſchwindigkeiten (ſ. §. 408) berechnet.

Das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der effectiven Geſchwindigkeit $v$ zur theoretiſchen Geſchwindigkeit $\sqrt{2gh}$ gab den Geſchwindigkeitscoefficienten $\varphi$, ſowie das Verhältniß $\frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ der effectiven Ausflußmenge $Q$ zur theoretiſchen Ausflußmenge $F\sqrt{2gh}$ auf den Ausflußcoefficienten $\mu$ führte und das Verhältniß zwiſchen beiden Coefficienten, d. i. $\frac{\mu}{\varphi}$, endlich den Contractionscoefficienten $\alpha$ beſtimmte.

Dieſe Beſtimmung iſt aber bei großen Ausflußgeſchwindigkeiten nicht hinreichend genau, weil hier der Widerſtand der Luft zu groß ausfällt.

Digitized by Google

Tabelle

der Ausfluß- und Geſchwindigkeitscoefficienten für den Ausfluß durch coniſch convergente Röhren.

| Convergenzwinkel. | Ausflußcoefficienten. | Geſchwindigkeitscoefficienten. | Convergenzwinkel. | Ausflußcoefficienten. | Geſchwindigkeitscoefficienten. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0′ | 0,829 | 0,829 | 13° 24′ | 0,946 | 0,963 |
| 1° 36′ | 0,866 | 0,867 | 14° 28′ | 0,941 | 0,966 |
| 3° 10′ | 0,895 | 0,894 | 16° 36′ | 0,938 | 0,971 |
| 4° 10′ | 0,912 | 0,910 | 19° 28′ | 0,924 | 0,970 |
| 5° 26′ | 0,924 | 0,919 | 21° 0′ | 0,919 | 0,972 |
| 7° 52′ | 0,930 | 0,932 | 23° 0′ | 0,914 | 0,974 |
| 8° 58′ | 0,934 | 0,942 | 29° 58′ | 0,895 | 0,975 |
| 10° 20′ | 0,938 | 0,951 | 40° 20′ | 0,870 | 0,980 |
| 12° 4′ | 0,942 | 0,955 | 48° 50′ | 0,847 | 0,984 |

Man erſieht aus dieſer Tabelle, daß die Ausflußcoefficienten bei einer Röhre von $13\frac{1}{2}^0$ Seitenconvergenz ihr Maximum 0,946 erreicht haben, daß dagegen die Geſchwindigkeitscoefficienten immer größer und größer ausfallen, je größer der Convergenzwinkel iſt. Wie in vorkommenden Fällen der Praxis dieſe Tabelle zu gebrauchen iſt, mag folgendes Beiſpiel lehren.

Beiſpiel. Welche Waſſermenge liefert eine kurze coniſche Anſatzröhre von $1\frac{1}{2}$ Zoll Weite in der Ausmündung und von 10 Grad Convergenz bei einem Drucke von 16 Fuß? Nach des Verfaſſers Verſuchen giebt eine cylindriſche Röhre von dieſer Weite, $\mu = 0{,}810$, die Röhre von d'Aubuiſſon aber gab $\mu = 0{,}829$, alſo um $0{,}829 - 0{,}810 = 0{,}019$ mehr; nun iſt aber der Tabelle zufolge, für die Röhre von 10° Convergenz, $\mu = 0{,}937$, daher möchte es angemeſſen ſein, für die gegebene Röhre, $\mu = 0{,}937 - 0{,}019 = 0{,}918$ zu ſetzen, wonach dann die Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}918 \cdot \frac{\pi}{4.8^2} \cdot 7{,}906\sqrt{16} = \frac{0{,}918 \,.\, 7{,}906 \,.\, \pi}{64} = 0{,}3563 \text{ Cubikfuß}$$

folgt.

**Reibungswiderſtand.** Lange prismatiſche oder cylindriſche Anſatzröhren verzögern den Ausfluß um ſo mehr, je länger dieſelben ſind; es iſt daher anzunehmen, daß die Röhrenwände durch Reibung, Adhäſion oder Klebrigkeit des Waſſers an denſelben der Bewegung des Waſſers in den Röhren ein Hinderniß entgegenſetzen. Vernunftgründen und vielfachen Beobachtungen und Meſſungen zufolge läßt ſich annehmen, daß dieſer Reibungswiderſtand ganz unabhängig iſt vom Drucke, daß er aber direct wie die Länge $l$ und §. 427

umgekehrt wie die Weite $d$ derſelben wächſt, daß er alſo dem Verhältniſſe $\frac{l}{d}$ proportional iſt. Außerdem hat ſich auch noch herausgeſtellt, daß dieſes Hinderniß größer iſt bei größeren und kleiner bei kleineren Geſchwindigkeiten des Waſſers, und daß es beinahe mit dem Quadrate der Geſchwindigkeit $v$ des Waſſers ſelbſt wächſt. Meſſen wir dieſes Hinderniß durch die Höhe einer Waſſerſäule, die nachher von der ganzen Druckhöhe $h$ abzuziehen iſt, um die zur Erzeugung der Geſchwindigkeit nöthige Höhe zu erhalten, ſo können wir dieſe Höhe, die wir in der Folge Reibungswiderſtandshöhe nennen wollen, ſetzen:

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es iſt hierbei unter $\zeta$ eine Erfahrungszahl, welche wir den Reibungscoefficienten nennen können, zu verſtehen. Man verliert alſo hiernach durch die Reibung des Waſſers in der Röhre um ſo mehr an Druck oder Druckhöhe, je größer das Verhältniß $\frac{l}{d}$ der Länge zur Weite und je größer die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ iſt. Aus der Waſſermenge $Q$ und dem Röhrenquerſchnitte

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

folgt die Geſchwindigkeit:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

und daher die Reibungshöhe:

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \zeta \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{l Q^2}{d^5}.$$

Um durch das Fortleiten einer gewiſſen Waſſermenge $Q$ in einer Röhre möglichſt wenig Verluſt an Druckhöhe oder Gefälle zu erhalten, ſoll man die Röhre möglichſt weit und nicht unnöthig lang machen. Die doppelte Weite beanſprucht z. B. zur Ueberwindung der Reibung nur $(1/2)^5 = 1/32$ mal ſo viel Gefälle als die einfache Weite.

Iſt der Querſchnitt einer Röhre ein Rechteck von der Höhe $a$ und der Breite $b$, ſo hat man ſtatt

$$\frac{1}{d} = 1/4 \cdot \frac{\pi d}{1/4\, \pi d^2} = 1/4 \cdot \frac{\text{Umfang}}{\text{Inhalt}} = 1/4 \cdot \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{2ab}$$

einzuſetzen, weshalb folgt:

$$h = \zeta \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Digitized by Google

Mit Hülfe dieser Formel für den Röhrenreibungswiderstand lassen sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und das Ausflußquantum finden, welches eine Röhre von einer gegebenen Länge und Weite unter einem gegebenen Drucke fortleitet. Uebrigens ist es vollkommen gleich, ob die Röhre $KL$, Fig. 729, horizontal ist, fällt, oder aufsteigt, wenn nur unter der Druckhöhe die Tiefe $RL$ des Mittelpunktes $L$ der Röhrenmündung unter dem Wasserspiegel $HO$ des Ausflußreservoirs verstanden wird.

Fig. 729.

Ist $h$ die Druckhöhe, $h_1$ die Widerstandshöhe für das Einmündungsstück und $h_2$ die Widerstandshöhe für den übrigen Theil der Röhre, so hat man:

$$h - (h_1 + h_2) = \frac{v^2}{2g}, \text{ oder } h = \frac{v^2}{2g} + h_1 + h_2.$$

Bezeichnet $\xi_0$ den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück, und $\xi$ den Coefficienten des Reibungswiderstandes der übrigen Röhre, so ist zu setzen:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \xi_0 \cdot \frac{v^2}{2g} + \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

oder:

$$1)\ h = \left(1 + \xi_0 + \xi \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g},$$

und:

$$2)\ v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \xi_0 + \xi \cdot \frac{l}{d}}}.$$

Aus der letzteren Formel ergiebt sich die Wassermenge $Q = Fv$.

Bei sehr langen Röhren fällt $1 + \xi_0$ sehr klein gegen $\xi \frac{l}{d}$ aus, weshalb dann einfach

$$h = \xi \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\xi} \cdot \frac{d}{l} \cdot 2gh} \text{ folgt.}$$

Der Reibungscoefficient ist, wie die Ausflußcoefficienten, nicht ganz §. 428 constant, er ist bei kleinen Geschwindigkeiten größer und bei großen Geschwindigkeiten kleiner, d. h. der Reibungswiderstand des Wassers in den Röhren wächst nicht genau mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, sondern auch noch mit einer anderen Potenz der Geschwindigkeit. Prony und

Digitized by Google

Eytelwein haben angenommen, daß die durch den Reibungswiderstand verlorene Druckhöhe wie die einfache Geschwindigkeit und wie das Quadrat derselben wachse, und für sie den Ausdruck:

$$h = (\alpha v + \beta v^2) \frac{l}{d},$$

wo $\alpha$ und $\beta$ Erfahrungscoefficienten bezeichnen, festgesetzt. Um diese Coefficienten zu bestimmen, haben die genannten Hydrauliker 51 Versuche benutzt, welche zu verschiedenen Zeiten von Couplet, Bossut und du Buat über die Bewegung des Wassers durch lange Röhren angestellt worden sind. Prony fand hieraus:

$$h = (0{,}0000693\, v + 0{,}0013932\, v^2) \frac{l}{d},$$

Eytelwein:

$$h = (0{,}0000894\, v + 0{,}0011213\, v^2) \frac{l}{d},$$

d'Aubuisson nimmt an:

$$h = (0{,}0000753\, v + 0{,}001370\, v^2) \frac{l}{d} \text{ Meter.}$$

Noch genauer an die Beobachtungen schließt sich eine von dem Verfasser aufgefundene Formel an, welche die Form

$$h = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

hat und sich auf die Voraussetzung gründet, daß der Reibungswiderstand wie das Quadrat und wie die Quadratwurzel aus dem Cubus der Geschwindigkeit zugleich wächst. Man hat also hiernach den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$$

und die Reibungswiderstandshöhe einfach

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ zu setzen.}$$

Zur Ermittelung des Widerstandscoefficienten $\zeta$ oder der Hülfsconstanten $\alpha$ und $\beta$ sind aber von dem Verfasser nicht nur die schon bei den Prony'schen und Eytelwein'schen Bestimmungen zu Grunde gelegten 51 Versuche von Couplet, Bossut und du Buat, sondern auch noch 11 Versuche vom Verfasser und 1 Versuch von einem Herrn Gueymard in Grenoble benutzt worden. Die älteren Versuche erstrecken sich nur auf Geschwindigkeiten von 0,043 bis 1,930 Meter, durch die Versuche des Verfassers ist aber die letzte Grenze der Geschwindigkeiten bis auf 4,648 Meter hinausgerückt worden. Die Weiten der Röhren waren bei den älteren Versuchen 27, 36, 54, 135 und 490 Millimeter, und die neuen Versuche wurden an

Digitized by Google

Röhren von 33, 71 und 275 Millimetern angestellt. Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate ist nun aus den zum Grunde gelegten 63 Versuchen gefunden worden:

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

oder:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

oder für das preußische Maß:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Bei Berücksichtigung anderer Versuche von Herrn Prof. Zeuner, angestellt an einer Zinkröhre von $2\frac{1}{2}$ Centimeter Weite bei 0,1356 bis 0,4287 Meter Geschwindigkeit, ist

$$\zeta = 0{,}014312 + \frac{0{,}010327}{\sqrt{v}}$$

zu setzen, wenn $v$ in Metern gegeben ist. (Siehe „Civilingenieur", Bd. I, 1854.)

Anmerkung 2. Neuere Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhren unter großen und sehr großen Geschwindigkeiten sind 1856 und 1858 vom Verfasser angestellt worden. Siehe „Civilingenieur", Band V, Heft 1 und 3, sowie Band IX, Heft 1. Die Ergebnisse dieser Versuche enthält folgende Tabelle.

| Bezeichnung der Röhren. | Weite der Röhre ($d$) | Mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre ($v$) | Reibungscoefficient $\zeta$ |
|---|---|---|---|
| Engere Glasröhre . . . . | 1,03 Ctm. | 8,51 Meter. | 0,01815 |
| Weitere Glasröhre . . . . | 1,43 „ | 10,18 „ | 0,01865 |
| Engere Messingröhre . . . | 1,04 „ | 8,64 „ | 0,01869 |
| Desgl., kürzer gemacht . . . | 1,04 „ | 12,32 „ | 0,01784 |
| Desgl., unter sehr hohem Drucke . . . . . | 1,04 „ | 20,99 „ | 0,01690 |
| Weitere Messingröhre . . . | 1,43 „ | 8,66 „ | 0,01719 |
| Desgl., abgekürzt . . . . . | 1,43 „ | 12,40 „ | 0,01736 |
| Desgl., unter sehr hohem Drucke . . . . . | 1,43 „ | 21,59 „ | 0,01478 |
| Weitere Zinkröhre . . . . | 2,47 „ | 3,19 „ | 0,01962 |
| Desgl., kürzer . . . . . | 2,47 „ | 4,73 „ | 0,01838 |
| noch kürzer . . . . . | 2,47 „ | 6,24 „ | 0,01790 |
| noch kürzer . . . . . | 2,47 „ | 9,18 „ | 0,01670 |



Digitized by Google

Die Werthe in der letzten Columne weisen von Neuem nach, daß der Widerstandscoefficient $\zeta$ für die Reibung des Wassers in Röhren abnimmt, sowohl wenn die Geschwindigkeit ($v$), als auch, jedoch weit langsamer, wenn die Röhrenweite ($d$) eine größere wird. Uebrigens ist bei großen Geschwindigkeiten die Uebereinstimmung der Formel

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

mit diesen neuen Erfahrungsgrößen noch eine leidliche, z. B. $v = 9$ Meter, giebt

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00316 = 0{,}01755,$$

und $v = 16$ Meter,

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00237 = 0{,}01676,$$

was mit den nahe entsprechenden Werthen in der letzten Tabelle recht gut übereinstimmt.

Anmerkung 3. Herr de Saint-Venant findet, daß die bekannte Formel für den Widerstand des Wassers in Röhren sich noch mehr an die Erfahrungen anschließt, wenn man die Reibungshöhe nicht $v^2$ oder $\frac{v^2}{2g}$, sondern $v^{12/7}$ proportional wachsend annimmt. (Siehe dessen „Mémoire sur des formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes".) Es ist hiernach:

$$h = \frac{4l}{d} \cdot 0{,}00029557\, v^{12/7} = 0{,}00118228\, \frac{l}{d} \cdot v^{12/7} = 0{,}023197\, v^{-2/7} \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

zu setzen. Die Annahme eines gebrochenen Exponenten der Potenz von $v$ ist gar nicht neu; schon Woltmann setzte $v^{7/4}$ statt $v^2$, und Eytelwein brachte $v^{35/18}$ statt $v^2$ in Vorschlag (siehe den vom Verfasser bearbeiteten Artikel „Ausfluß", Band I., Seite 554, der allgemeinen Maschinenencyclopädie von Hülsse).

Anmerkung 4. Neue und sehr ausführliche Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen sind vom Herrn H. Darcy angestellt worden. (S. den Rapport der Akademie der Wissenschaften zu Paris in den „Comptes rendus etc.", Tom. 38, 1854, sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux.) Herr Darcy folgert für die Fälle, wo die Geschwindigkeit $v$ des Wassers nicht unter 2 Decimeter ist, aus diesen Versuchen die Formel:

$$h = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{r}\right) \frac{l}{r} \cdot v^2$$

$$= \left(0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

wonach der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d} \text{ zu setzen wäre.}$$

Jedenfalls kann diese Formel bei kleinen Geschwindigkeiten nicht ausreichend genau sein.

§. 429 Zur Erleichterung der Rechnung ist folgende Tabelle der Widerstandscoefficienten zusammengestellt worden. Man ersieht aus ihr, daß allerdings die Veränderlichkeit dieser Coefficienten nicht unbedeutend ist, da dieser Coefficient für 0,1 Meter Geschwindigkeit, $= 0{,}0443$, für 1 Meter, $= 0{,}0239$ und für 5 Meter, $= 0{,}0186$ ausfällt.

Digitized by Google

Tabelle der Reibungscoefficienten des Wassers.

| | v | Zehntel Meter. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ganze Meter. | 0 | ∞ | 0,0443 | 0,0356 | 0,0317 | 0,0294 | 0,0278 | 0,0266 | 0,0257 | 0,0250 | 0,0244 |
| | 1 | 0,0239 | 0,0234 | 0,0230 | 0,0227 | 0,0224 | 0,0221 | 0,0219 | 0,0217 | 0,0215 | 0,0213 |
| | 2 | 0,0211 | 0,0209 | 0,0208 | 0,0206 | 0,0205 | 0,0204 | 0,0203 | 0,0202 | 0,0201 | 0,0200 |
| | 3 | 0,0199 | 0,0198 | 0,0197 | 0,0196 | 0,0195 | 0,0195 | 0,0194 | 0,0193 | 0,0193 | 0,0192 |
| | 4 | 0,0191 | 0,0191 | 0,0190 | 0,0190 | 0,0189 | 0,0189 | 0,0188 | 0,0188 | 0,0187 | 0,0187 |

Man findet in dieser Tabelle die einer gewissen Geschwindigkeit entsprechenden Widerstandscoefficienten, wenn man die ganzen Meter in der ersten Vertical- und die Zehntel in der ersten Horizontalcolumne auffucht, von der ersten Zahl horizontal und von der letzten vertical fortgeht bis zur Stelle, wo sich beide Bewegungen begegnen. Z. B. für $v = 1{,}3$ Meter ist $\xi = 0{,}0227$, für $v = 2{,}8$, $\xi = 0{,}0201$.

Für das preußische Fußmaß läßt sich setzen:

| v | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 Fuß. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ζ | 0,0679 | 0,0522 | 0,0453 | 0,0411 | 0,0383 | 0,0362 | 0,0346 | 0,0333 | 0,0322 |

| v | 1 | 1¼ | 1½ | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 20 Fuß. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ζ | 0,0313 | 0,0296 | 0,0282 | 0,0263 | 0,0242 | 0,0229 | 0,0213 | 0,0204 | 0,0192 | 0,0182 |

Anmerkung. Eine ausgedehntere und bequemere Tafel giebt der „Ingenieur", Seite 442 und 443.

**Lange Röhren.** In Ansehung der Bewegung des Wassers in langen Röhren oder Röhrenleitungen können folgende drei Hauptaufgaben zur Lösung vorkommen. §. 430

1) Es ist die Länge $l$ und Weite $d$ der Röhre und das fortzuführende Wasserquantum $Q$ gegeben, und man sucht die entsprechende Druckhöhe. Hier hat man zunächst die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{4\,Q}{\pi\,d^2} = 1{,}2732 \cdot \frac{Q}{d^2}$$

zu berechnen, dann den diesem Werthe entsprechenden Reibungscoefficienten ζ



Digitized by Google

in einer der letzten Tafeln aufzuſuchen, und zuletzt die Werthe $d$, $l$, $v$, $\zeta$ und $\zeta_0$, wo $\zeta_0$ den Widerſtandscoefficienten für das Einmündungsſtück bezeichnet, in der erſten Hauptformel

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

zu ſubſtituiren.

2) Es iſt die Länge und Weite der Röhre, ſowie die Druckhöhe oder das Gefälle gegeben, und die Waſſermenge zu beſtimmen. Hier iſt zunächſt die Geſchwindigkeit durch die Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}$$

zu finden; da aber der Widerſtandscoefficient nicht ganz conſtant iſt, ſondern ſich mit $v$ etwas ändert, ſo muß man $v$ vorher ſchon annähernd kennen, um darnach $\zeta$ ermitteln zu können.

Aus $v$ folgt dann:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = 0{,}7854\, d^2 v.$$

3) Es iſt die Waſſermenge, die Druckhöhe und die Länge der Röhre gegeben, und die nöthige Weite der Röhre zu beſtimmen.

Da $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$, alſo $v^2 = \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}$, ſo hat man:

$$2gh = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}, \text{ oder:}$$

$$2gh \cdot \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 = (1 + \zeta_0) \frac{1}{d^4} + \zeta \cdot \frac{l}{d^5}, \text{ oder:}$$

$$2gh \cdot \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 d^5 = (1 + \zeta_0)\, d + \zeta l;$$

daher iſt die Röhrenweite:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d + \zeta l}{2gh} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Nun iſt aber $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}6212$; $1 + \zeta_0$ im Mittel $= 1{,}505$ und für das preuß. Maß, $\frac{1}{2g} = 0{,}016$, daher läßt ſich ſetzen:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505 \,.\, d + \zeta l) \frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß.}$$

Auch dieſe Formel iſt nur als Näherungsformel zu gebrauchen, weil in

Digitized by Google

ihr die Unbekannte $d$ und auch der von der Geschwindigkeit $v = \frac{4\,Q}{\pi d^2}$ abhängige Coefficient $\zeta$ mit vorkommen.

Beispiele. 1) Welche Druckhöhe beansprucht eine Röhrenleitung von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, wenn dieselbe in der Minute 25 Cubikfuß Wasser fortleiten soll? Hier ist:

$$v = 1{,}2732 \cdot \frac{25 \,.\, 12^2}{60 \,.\, 5^2} = 3{,}056 \text{ Fuß},$$

daher läßt sich $\zeta = 0{,}0242$ setzen, und es folgt nun die Druckhöhe oder das totale Röhrengefälle:

$$h = \left(1{,}505 + 0{,}0242 \cdot \frac{150 \,.\, 12}{5}\right) \cdot 0{,}016 \,.\, 3{,}056^2$$
$$= (1{,}505 + 8{,}712)\; 0{,}016 \,.\, 9{,}330 = 1{,}525 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Wassermenge wird eine Röhrenleitung von 48 Fuß Länge und 2 Zoll Weite bei 5 Fuß Druckhöhe liefern? Es ist:

$$v = \frac{7{,}906\sqrt{5}}{\sqrt{1{,}505 + \zeta \cdot \frac{48 \,.\, 12}{2}}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288 \,.\, \zeta}}.$$

Vorläufig $\zeta = 0{,}020$ angenommen, erhält man:

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}26}} = \frac{17{,}678}{2{,}7} = 6{,}5,$$

aber $v = 6{,}5$ giebt richtiger $\zeta = 0{,}0211$, daher hat man genauer:

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288 \,.\, 0{,}0211}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

und das Wasserquantum:

$$Q = 0{,}7854 \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2 \cdot 6{,}42 = 0{,}140 \text{ Cubikfuß} = 242 \text{ Cubikzoll}.$$

3) Welche Weite muß man einer 100 Fuß langen Röhrenleitung geben, die bei 5 Fuß Druckhöhe in jeder Secunde einen halben Cubikfuß Wasser liefert? Es ist:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505\, d + 100\, \zeta) \cdot \tfrac{1}{5}\,(\tfrac{1}{2})^2} = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}075\, d + 5\, \zeta}.$$

Setze ich vorläufig $\zeta = 0{,}02$, so erhalte ich:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}075\, d + 0{,}100}, \text{ oder annähernd:}$$

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}100} = 0{,}30, \text{ also genauer:}$$

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}0225 + 0{,}100} = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}1225} = 0{,}3165 \text{ Fuß} = 3{,}8 \text{ Zoll}.$$

Dieser Weite entspricht der Querschnitt:

$$F = 0{,}7854 \,.\, 0{,}3165^2 = 0{,}0787 \text{ Quadratfuß}, \text{ die Geschwindigkeit:}$$

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{0{,}5}{0{,}0787} = 6{,}35 \text{ Fuß},$$

und letzterer wieder der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0211$. Führt man den letzteren genaueren Werth ein, so erhält man:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}1280} = 0{,}319 \text{ Fuß} = 3{,}83.$$

Anmerkung 1. Versuche mit $2\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$ Zoll weiten ordinären Holzröhren haben dem Verfasser den Widerstandscoefficienten 1,75 mal so groß gegeben, als

Digitized by Google

bei den Metallröhren, auf die ſich die in den Tabellen des vorigen Paragraphen aufgeführten Werthe beziehen. Während alſo z. B. für die Geſchwindigkeit von 3 Fuß bei Metallröhren, $\zeta = 0{,}0242$ iſt, müſſen wir ihn bei Holzröhren, $= 0{,}0242 \,.\, 1{,}75 = 0{,}04235$ ſetzen; während wir im Beiſpiel 1. die Druckhöhe in einer 150 Fuß langen Metallröhre 1,527 Fuß gefunden haben, wird ſie bei einer gleich weiten Holzröhre unter denſelben Umſtänden

$$h = (1{,}505 + 0{,}04235 \,.\, 360) \,.\, 0{,}016 \,.\, 9{,}339 = 16{,}75 \,.\, 0{,}1494 = 2{,}50 \text{ Fuß}$$

geſetzt werden müſſen.

Nach den Verſuchen Darcy's wächſt der Widerſtandscoefficient $\zeta$ überhaupt ſehr bedeutend mit der Rauhigkeit der Röhrenwand und ſteigt bei ſehr rauhen Wänden auf das Zwei- bis Dreifache. Dieſelbe Erfahrung hat in der neueſten Zeit auch der Verfaſſer gemacht.

Anmerkung 2. Einen nicht unbedeutenden Einfluß übt noch die Temperatur auf den Widerſtand des Waſſers in Röhren aus. Hierauf Bezug habende Verſuche ſind von Gerſtner (ſ. deſſen „Handbuch der Mechanik", Bd. II.) und in der neueſten Zeit von Herrn Geh. Rath Hagen (ſ. deſſen „Abhandlungen über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Waſſers in Röhren", Berlin, 1854) angeſtellt worden. Durch die allerdings nur an ſehr engen Röhren ($d = 0{,}108$ bis $0{,}227$ Zoll) angeſtellten Verſuche des Letzteren hat ſich ergeben, daß unter übrigens gleichen Verhältniſſen die Geſchwindigkeit des Waſſers in Röhren nicht ohne Grenze mit der Temperatur deſſelben zunimmt, ſondern daß es für jede Röhre eine gewiſſe Temperatur giebt, wo dieſe Geſchwindigkeit im Maximum iſt. Für die Verſuche außerhalb dieſes Maximums findet Hagen folgende Formel:

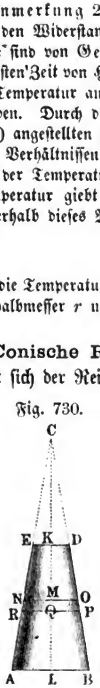
$$h = m\, l\, r^{-1{,}25} \,.\, v^{1{,}75}, \text{ und}$$

$$m = 0{,}000038941 - 0{,}0000017185\ \sqrt{t},$$

wo die Temperatur $t$ in R.-Graden, und die Druckhöhe $h$, die Länge $l$, der Rohrenhalbmeſſer $r$ und die Geſchwindigkeit $v$ in Zollen auszudrücken ſind.

(§. 431) **Coniſche Röhren.** Bei einer coniſchen Röhre $AD$, Fig. 730, läßt ſich der Reibungswiderſtand auf folgende Weiſe finden. Es ſei der halbe Convergenzwinkel der Röhrenwand $ACL = BCL = \delta$, der Durchmeſſer $AB$ der Einmündung, $= d_1$, der Durchmeſſer $DE$ der Ausmündung $= d$, ferner die Länge $KL$ der Röhre, $= l$, und die Ausflußgeſchwindigkeit (bei $DE$) $= v$.

Fig. 730.




In einem Abſtande $KM = x$ von der Ausmündung iſt der Durchmeſſer der Röhre:

$$NO = y = \tfrac{1}{2}DE + 2\,KM\ tang.\,\delta$$
$$= d + 2\,x\ tang.\,\delta,$$

und daher die Geſchwindigkeit $w$ daſelbſt, da ſich

$$\frac{w}{v} = \frac{d^2}{y^2} \text{ ſetzen läßt:}$$

$$w = \frac{d^2}{y^2}\,v = \frac{v}{\left(1 + \frac{2\,x}{d}\ tang.\,\delta\right)^2}.$$

Digitized by Google

Für ein Element $NOPR$ des Röhrenstückes von der Länge

$$OP = NR = \frac{MQ}{\cos.\delta} = \frac{\partial x}{\cos.\delta}$$

ist daher die Widerstandshöhe der Reibung:

$$\partial h = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y \cos.\delta} \cdot \frac{v^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y \cos.\delta \left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^4} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\partial x}{d \cos.\delta \left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^5} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es folgt die Reibungswiderstandshöhe für die ganze Röhre:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^5 \cos.\delta}.$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^5 \cos.\delta}$$

$$= \frac{d}{2 \sin.\delta} \int \left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^{-5} \partial \left(\frac{2x}{d} \tang.\delta\right)$$

$$= -\frac{d}{8 \sin.\delta} \left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^{-4}, \text{ daher ergiebt sich:}$$

$$\int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d} \tang.\delta\right)^5 \cos.\delta}$$

$$= \frac{d}{8 \sin.\delta} \left[1 - \left(1 + \frac{2l}{d} \tang.\delta\right)^{-4}\right], \text{ oder:}$$

$$= \frac{d}{8 \sin.\delta} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^{-4}\right] = \frac{d}{8 \sin.\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

da $d + 2l \tang.\delta$ den Durchmesser $d_1$ der Einmündung ausdrückt.

Es ist folglich die gesuchte Widerstandshöhe:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \cdot \frac{d}{8 \sin.\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]$$

$$= \tfrac{1}{8} \frac{\zeta}{\sin.\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g} = \tfrac{1}{8} \zeta \operatorname{cosec}.\delta \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Einmündung viel weiter als die Ausmündung, so kann man $\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 =$ Null setzen, und erhält hiernach:

$$h = \tfrac{1}{8} \frac{\zeta}{\sin.\delta} \cdot \frac{v^2}{2g} = \tfrac{1}{8} \zeta \operatorname{cosec}.\delta \cdot \frac{v^2}{2g};$$

Digitized by Google

es hängt also in diesem Falle der Reibungswiderstand gar nicht von der Länge der Röhre ab.

**Beispiel.** Bei einem Feuerspritzenmundstück $AK$, Fig. 731, ist der Convergenzwinkel des Ausmündungsstückes $BK$, $2\delta = 5^0$, und der des Einmündungsstückes $AB$, $2\delta_1 = 18^0$, ferner die Weite der Ausmündung, $d = 7$ Linien, die Weite der Einmündung, $d_1 = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= 18$ Linien, und die ganze Länge des Gußstückes $AK = l = 6$ Zoll $= 72$ Linien, welche Größe hat der Widerstandscoefficient desselben? Setzen wir die Länge des Ausmündungsstückes $BK = l_1$, und die des Einmündungsstückes $AB = l_2$, so haben wir:

$$l_1 + l_2 = l \text{ und } l_1 \, tang. \, \delta + l_2 \, tang. \, \delta_1 = \frac{d_1 - d}{2},$$

in Zahlen:

$$l_1 + l_2 = 72 \text{ und } l_1 \, tang. \, 2\tfrac{1}{2}^0 + l_2 \, tang. \, 9^0 = 11/2, \text{ oder:}$$
$$0{,}04362 \, l_1 + 0{,}15838 \, l_2 = 5{,}5.$$

Fig. 731.

Hieraus folgt: $l_1 = 51{,}54$ und $l_2 = 20{,}46$ Linien, und die Weite bei $B$, wo die Kegelflächen zusammenstoßen:

$$d_2 = d + 2 l_1 \, tang. \, \delta = 7 + 2 \, . \, 51{,}54 \, . \, 0{,}04362 = 11{,}53 \text{ Linien.}$$

Da diese Stelle abzurunden ist, möge aber $d_2 = 13$ Linien gesetzt werden. Nun folgt für das Ausmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{sin. \, \delta} = [1 - (7/13)^4] \, . \, cosec. \, 2\tfrac{1}{2}^0$$
$$= 0{,}9159 \, . \, 22{,}926 = 21{,}08,$$

und für das Einmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right] cosec. \, \delta_1 = [1 - (13/18)^4] \, . \, cosec. \, 9^0$$
$$= 0{,}7795 \, . \, 6{,}392 = 4{,}98,$$

daher ist für das ganze Gußstück die Widerstandshöhe:

$$h = \frac{\zeta}{8}\left[21{,}08 + 4{,}98 \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= \frac{\zeta}{8}\left[21{,}08 + 4{,}98 \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} = 21{,}5 \cdot \frac{\zeta}{8} \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= 2{,}7 \, \zeta \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und wenn man $\frac{1}{2g} = 0{,}016$ einführt, so wie $\zeta = 0{,}02$ annimmt:

$$h = 0{,}054 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. i. beinahe $5\frac{1}{2}$ Procent der Geschwindigkeitshöhe, womit auch die angestellten Versuche übereinstimmen.

§. 432 **Röhrenleitungen.** Eine Röhrenleitung mündet entweder unter Wasser oder in freier Luft aus. Beide Fälle sind in den Figuren 732 und 733 abgebildet. Im ersten Falle ist als Druckhöhe $h$ der Niveauabstand $RC$ beider Wasserspiegel von einander, im zweiten aber die senkrechte Tiefe $RO$ der Ausmündung $O$ unter dem Wasserspiegel $H$ des Zuflußapparates anzunehmen. Behält nun die Röhre überall eine und dieselbe Weite $d$, so finden in beiden Fällen die im §. 430 entwickelten Formeln ihre unmittelbare An-

Digitized by Google

wendung, verengert oder erweitert sich aber die Röhre an einer Stelle, so hat man es mit verschiedenen Röhrengeschwindigkeiten zu thun, und es ist daher

Fig. 732.

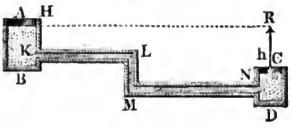
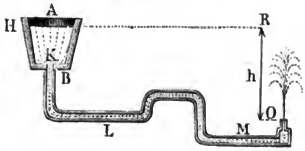



Fig. 733.




der Reibungswiderstand für jede Röhre besonders zu berechnen. Einen solchen Fall bietet z. B. die Wasserleitung in Fig. 733 mit einem springenden Strahle dar, wo das Mundstück $O$ enger ist als die Zuleitungsröhre $BLM$. Setzen wir, wie gewöhnlich, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, die Weite der Ausmündung $O$, $= d$, die Weite der Röhre aber $= d_1$, so haben wir die Geschwindigkeit des Wassers in derselben:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v,$$

und bezeichnet nun noch $l_1$ die Länge der Röhre $BLM$ und $\zeta_1$ den Reibungscoefficienten, so folgt die entsprechende Reibungshöhe:

$$h_1 = \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ist nun noch $\zeta_0$ der Widerstandscoefficient für das Einmündungsstück $K$ und $\zeta$ der für das Ausmündungsstück $O$, so folgt der Druckhöhenverlust, welchen das erstere verursacht,

$$h_0 = \zeta_0 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

dagegen der, welcher aus der Bewegung durch das zweite entspringt,

$$h_2 = \zeta \frac{v^2}{2g};$$

und hiernach hat man nun das ganze Gefälle:

$$h = \frac{v^2}{2g} + h_0 + h_1 + h_2 = \left[1 + \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta\right] \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta}}.$$

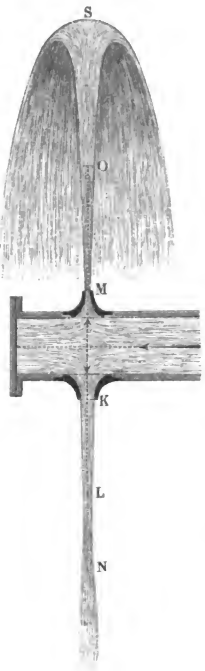
Die Mund- oder Ausgußstücke müssen zur Erzielung einer großen Steighöhe nicht bloß dem Wasser einen möglichst kleinen Widerstand darbieten, sondern auch das Ausströmen in möglichst parallelen Fäden bewirken, damit dieselben beim Aufsteigen einen lang zusammenhängenden Strahl bilden, der

Digitized by Google

durch die Luft weniger gestört wird als ein gleich anfangs zerrissener Strahl. Aus diesem Grunde zieht man die kurzen cylindrischen oder wenig conischen Mundstücke mit abgerundeter Einmündung den Ausmündungen in der dünnen Wand oder den nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformten Mundstücken vor, obgleich sie einen etwas größeren Geschwindigkeitsverlust verursachen als diese. Die Knoten und Bäuche, welche der aus den letzteren Mündungen kommende Strahl bildet oder zu bilden sucht, geben der äußeren Luft mehr Gelegenheit zum Eindringen als ein cylindrischer Strahl.

§. 433 **Springende Strahlen.** So lange der aus einer horizontalen Mündung $K$, Fig. 734, senkrecht abwärts fließende Strahl $KLN$ noch ein Continuum bildet, und nicht von der Luft zerrissen wird, nimmt dessen Querschnitt $L$ immer mehr und mehr ab, wenn der Abstand $KL = x$ von der Mündung wächst. Ist $c$ die Ausflußgeschwindigkeit, und $v$ die Geschwindigkeit in $L$, so hat man:

Fig. 734.




$$v^2 = 2gx + c^2;$$

und bezeichnet $F$ die Querschnittsfläche der Ausmündung, sowie $Y$ die Querschnittsfläche des Strahles in $L$, so gilt auch die Gleichung:

$$Fc = Yv, \text{ oder } F^2c^2 = Y^2v^2,$$

und es folgt schließlich die Gleichung:

$$Y^2(c^2 + 2gx) = Fc^2, \text{ oder:}$$

$$Y^2 = \frac{F^2c^2}{c^2 + 2gx}$$

für die Gestalt des die sogenannte Newton'sche Cataracte bildenden Wasserstrahles $KN$ (siehe Newtoni Principia Philosophiae, Tom. II, Sect. VII). Ist der Querschnitt der Mündung $K$ ein Kreis vom Durchmesser $d$, so bildet der Querschnitt $L$ einen Kreis vom Durchmesser $y$, für welchen hiernach

$$y^4 = \frac{c^2d^4}{c^2 + 2gx}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gx}{c^2}}} \text{ ist.}$$

Ueber die innere Beschaffenheit der fallenden Wasserstrahlen sind von Savart

Digitized by Google

Versuche angestellt worden, siehe Poggendorff's Annalen der Physik, Bd. 33.

Bei dem aus einer horizontalen Mündung $M$ senkrecht aufsteigenden Strahl $MS$ nimmt dagegen der Querschnitt $O$ mit der Entfernung $MO = x$ von der Mündung $M$ allmälig zu; denn es ist hier die Geschwindigkeit des Wassers in $O$,

$$v = \sqrt{c^2 - 2gx}, \text{ und daher}$$

$$Y^2 = \frac{F^2 c^2}{c^2 - 2gx},$$

folglich für den Querschnittsdurchmesser $y$ in $O$,

$$y^4 = \frac{c^2 d^4}{c^2 - 2gx}, \text{ oder } y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{2gx}{c^2}}}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch $h$, so ist einfach und allgemein:

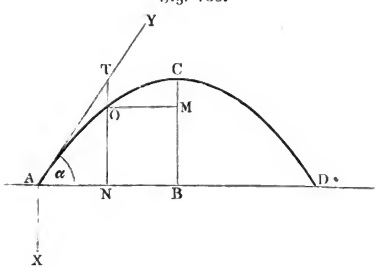
$$y_1 = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}.$$

Diese Formel verliert jedoch in ihren Grenzen ihre Richtigkeit; ihr zu Folge wäre z. B. beim steigenden Strahle für $x = h$, also im Scheitel $S$, der Durchmesser des Strahles

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - 1}} = \frac{d}{0} = \infty.$$

Dies ist jedoch nicht der Fall, weil die einzelnen Wasserfäden, aus welchen der Strahl besteht, an der höchsten Stelle nicht ganz in Ruhe sind, sondern daselbst in Richtung radial-auswärts eine kleine Geschwindigkeit haben.

Fig. 735.




Wenn der Wasserstrahl $AOC$, Fig. 735, in einer gegen den Horizont geneigten Richtung ausströmt, so bleibt die Formel

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}$$

noch anwendbar, wenn man nur darin statt $x$ die Verticalprojection $NO$ des Strahles $AO$

einſetzt. Tritt der Strahl unter dem Neigungswinkel $v$ aus der Mündung, ſo iſt die größte Steighöhe $BC$:

$$a = \frac{c^2 (sin.\, v)^2}{2g} = h\,(sin.\, v)^2 \text{ (ſ. §. 39)},$$

daher der Durchmeſſer deſſelben (im Scheitel $C$):

$$y = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{a}{h}}} = \frac{d}{\sqrt{1 - (sin.\, v)^2}} = \frac{d}{\sqrt{cos.\, v}}.$$

Im niedergehenden Strahltheile $CD$ wird $y$ wieder allmälig kleiner und kleiner, und beim Auffallen auf die Horizontalebene $AD$, von der er ausgegangen iſt, würde $y$ wieder $= d$ ſein, wenn die Luft keine Störungen in der Bewegung des Strahles hervorbrächte.

§. 434. Die Steighöhe $s$ eines vertical ſpringenden Waſſerſtrahles iſt nur bei kleinen Ausflußgeſchwindigkeiten ($c$) nahe gleich der Geſchwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$; bei größeren Ausflußgeſchwindigkeiten fällt dagegen in Folge des Widerſtandes der Luft die Steighöhe $s$ namhaft kleiner aus als die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$. Aus den vom Verfaſſer angeſtellten Verſuchen (ſ. die Verſuche über die Steighöhe ſpringender Waſſerſtrahlen bei verſchiedenen Mundſtücken im 5. Bande der Zeitſchrift des Vereins deutſcher Ingenieure) ſind folgende Thatſachen über ſpringende Waſſerſtrahlen hervorgegangen:

1) Der Widerſtand der Luft iſt bei kleinen Ausflußgeſchwindigkeiten von 5 bis 20 Fuß, oder bei Steighöhen von 1 bis 6 Fuß ſo klein, daß hier die Sprunghöhe $s$ ohne merklichen Fehler der Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ des ausſtrömenden Waſſers gleichgeſetzt werden kann.

2) Wenn die Geſchwindigkeitshöhe nicht über 75 Fuß, oder die Ausflußgeſchwindigkeit nicht über 56 Fuß iſt, ſo läßt ſich das Verhältniß der Steighöhe $s$ zur Geſchwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ ſetzen:

$$\frac{s}{h} = \frac{1}{\alpha + \beta h + \gamma h^2},$$

wobei $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ für jede Mündung beſonders zu beſtimmende Erfahrungscoefficienten bezeichnen.

3) Bei Waſſerſtrahlen, welche aus Mündungen in der dünnen Wand emporſpringen, läßt ſich die Conſtante $\alpha =$ Eins ſetzen, folglich auch annehmen, daß der Widerſtand beim Durchgang durch die Mündung bei einer kleinen Geſchwindigkeit ziemlich Null iſt, und erſt bei größeren Ausfluß-

Digitized by Google

geschwindigkeiten meßbar wird. Hiernach ist also auch der Widerstandscoefficient $\zeta$ für diese Mündungen nicht constant, sondern wächst von Null an allmälig mit der Geschwindigkeit und der §. 408 angegebene Werth $\zeta = 0{,}97$ kann nur als ein mittlerer angesehen werden.

4) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit wächst die Steighöhe mit der Dicke des Strahles oder der Weite der Ausflußmündung; es ist folglich der Widerstand der Luft bei dicken Strahlen kleiner als bei schwachen. Die Steighöhe ist deshalb nicht allein bei großen Druckhöhen, sondern auch bei starken Strahlen größer als bei kleinen Druckhöhen und bei schwachen Strahlen.

5) Unter übrigens gleichen Verhältnissen springen die Wasserstrahlen aus kreisförmigen Mündungen höher als die aus quadratischen oder anders geformten Mündungen.

6) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit und gleicher Mündungsweite springen die ohne Contraction ausfließenden Wasserstrahlen höher als die contrahirten Wasserstrahlen, und zwar nicht allein, weil diese Strahlen im Ganzen dünner sind als jene, sondern auch weil sie durch ihre abwechselnden Zusammenziehungen und Anschwellungen dem Eindringen der Luft weniger Widerstand entgegensetzen.

Unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen und bei nicht sehr kleinen Ausflußgeschwindigkeiten erreichen die durch kurze conoidische und längere conische Ansatzröhren mit innerer Abrundung ausfließenden Strahlen die größten Steighöhen.

Mariotte folgert aus seinen Versuchen über die Steighöhe springender Strahlen (s. die Mening'sche Uebersetzung von Mariotte's Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik), an Mündungen in der dünnen Wand von 4 und 6 Linien Durchmesser und bei Druckhöhen von $5\frac{1}{2}$ bis 35 Fuß, daß die zur Erlangung der Steighöhe $s$ nöthige Druck- oder Geschwindigkeitshöhe

$$h = s + \frac{s^2}{300} \text{ Pariser Fuß}$$

sein müsse, wonach folglich

$$\frac{h}{s} = 1 + \frac{s}{300} = 1 + 0{,}0033335 \text{ zu setzen wäre.}$$

Die weit ausgedehnteren und sehr mannigfaltigen Versuche des Verfassers, welche derselbe bei Druckhöhen von 3 bis 70 Fuß angestellt hat, geben dagegen für Kreismündungen in der dünnen Wand,

1) von 1 Centimeter Durchmesser:

$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}0036354\,h + 0{,}00005732\,h^2, \text{ und}$$

2) von 1,41 Centimeter Durchmesser:

Digitized by Google

$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}0024424\,h + 0{,}000059475\,h^2,$$

wobei $h$ in preuß. Fußen zu geben iſt.

Für ein coniſches Mundſtück $ABC$, Fig. 736, von 15 Centimeter Länge und 1 Centimeter Weite in der Ausmündung $C$ und 3 Centimeter in der übrigens gut abgerundeten Einmündung $A$, iſt gefunden worden:

Fig. 736.

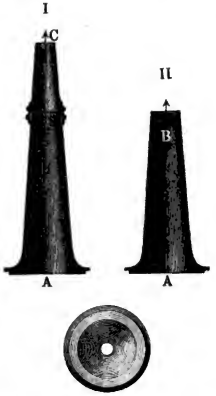



Fig. 737.




$$3)\quad \frac{h}{s} = 1{,}0453 + 0{,}0001171\,h + 0{,}00008462\,h^2,$$

und dagegen für das abgekürzte Mundſtück $AB$, Fig. 737, von 1,41 Weite in der Ausmündung $B$:

$$4)\quad \frac{h}{s} = 1{,}0216 + 0{,}0007511\,h + 0{,}00003219\,h^2.$$

Mit Hülfe dieſer Formeln iſt folgende Tabelle der Steighöhen ſpringender Waſſerſtrahlen berechnet worden.

| Geſchwindigkeitshöhe $h$ = | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 Fuß. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sprunghöhe $s$, ad (1) . . . . | 9,60 | 18,26 | 25,85 | 32,33 | 37,74 | 42,12 | 45,60 |
| „ „ „ (2) . . . . | 9,71 | 18,65 | 26,62 | 33,53 | 39,35 | 44,10 | 47,87 |
| „ „ „ (3) . . . . | 9,48 | 18,49 | 26,67 | 33,75 | 38,60 | 44,22 | 47,63 |
| „ „ „ (4) . . . . | 9,69 | 19,06 | 27,96 | 36,26 | 43,87 | 50,74 | 56,82 |

**Beiſpiel.** Wenn an einem Springbrunnen die Leitungsröhre 350 Fuß lang und 2 Zoll weit und das coniſche Mundſtück deſſelben $\frac{1}{2}$ Zoll weit iſt, wie hoch wird bei einer Druckhöhe $h_0$ von 40 Fuß der Strahl ſpringen, vorausgeſetzt, daß außer der Reibung alle übrigen Röhrenwiderſtände klein genug ſind, um ſie vernachläſſigen zu können. Es iſt hier, wenn man

$\zeta_1 = 0{,}025$, $\zeta_0 = 0{,}5\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = (1/4)^4 = 1/256$ und $\frac{l_1}{d_1} = \frac{350}{2/12} = 2100$ ſetzt,

die Höhe, welche der Ausflußgeſchwindigkeit entſpricht:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{h_0}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4} = \frac{40}{1 + (0{,}5 + 0{,}025 \,.\, 2100) \cdot 1/256}$$

$$= \frac{40}{1{,}207} = 33{,}14 \text{ Fuß},$$

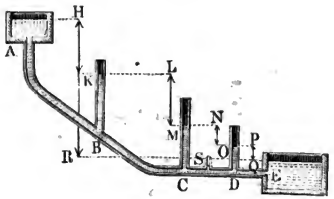
Digitized by Google

und daher die zu erwartende Steighöhe, bei ruhiger Luft, nach Formel (4):

$$s = \frac{h}{1{,}0216 + 0{,}0007511\,h + 0{,}00003219\,h^2} = \frac{33{,}14}{1{,}0216 + 0{,}0249 + 0{,}0354}$$
$$= \frac{33{,}14}{1{,}0515} = 30{,}63 \text{ Fuß}.$$

**Piëzometer.** Die Druckverluste, welche das Wasser in einer Röhrenleitung $ABCDE$, Fig. 738, durch Verengungen, Reibung u. s. w. erleidet, kann man durch die Wassersäulen messen, welche sich in senkrecht aufgesetzten Röhren $BK$, $CM$, $DO$ erhalten, die man, wenn sie lediglich zu diesem Zwecke dienen, Piëzometer nennt. (S. §. 386.) §. 435

Fig. 738.




Ist $v$ die Geschwindigkeit des Wassers an der Stelle $B$, Fig. 738, wo ein Piëzometer einmündet, $l$ die Länge, $d$ die Weite des Röhrenstückes $AB$, $h$ die Druckhöhe oder die Tiefe des Punktes $B$ unter dem Wasserspiegel, ist ferner $\zeta_0$ der Widerstandscoefficient für den Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre, und $\zeta$ der Reibungscoefficient, so hat man für den, den Druck in $B$ messenden Piëzometerstand:

$$z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen ist bei der Länge $l_1$ und dem Gefälle $h_1$ des Röhrenstückes $BC$, der Piëzometerstand in $C$:

$$z_1 = h + h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l}{d} + \zeta\frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g}.$$

Es folgt daher die Differenz der Piëzometerstände:

$$z_1 - z = h_1 - \zeta\frac{l_1}{d}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, die Widerstandshöhe des Röhrenstückes $BC$

$$\zeta\frac{l_1}{d}\cdot\frac{v^2}{2g} = h_1 + z - z_1 = \text{Gefälle des Röhrenstückes}$$
$$\text{plus Differenz der Piëzometerstände.}$$

Man ersieht hieraus, daß die Piëzometer dazu dienen können, die Widerstände, welche das Wasser in den Röhrenleitungen zu überwinden hat, zu messen. Befindet sich in der Röhre ein besonderes Hinderniß, hat sich z. B. ein kleiner Körper in derselben festgesetzt, so wird dieses sogleich durch das Sinken des Piëzometerstandes angezeigt und die Größe des erzeugten Widerstandes ausgedrückt werden. Die Widerstände, welche durch Regulirungs-

Digitized by Google

apparate, wie Hähne, Schieber u. ſ. w., von welchen im folgenden Capitel die Rede iſt, erzeugt werden, laſſen ſich ebenfalls durch Piëzometerſtände ausdrücken. So ſteht z. B. das Piëzometer in $D$ tiefer als das in $C$, nicht allein wegen der Reibung des Waſſers in dem Röhrenſtücke $CD$, ſondern auch wegen der Verengung, welche der Schieber $S$ in der Röhre hervorbringt. Iſt bei völlig geöffnetem Schieber die Differenz $NO$ der Piëzometerſtände $= h_1$, bei eingeſtelltem Schieber aber $= h_2$, ſo giebt die neue Differenz oder Senkung $h_2 - h_1$ die Widerſtandshöhe, welche dem Durchgange des Waſſers durch den Schieber entſpricht.

Endlich läßt ſich auch aus dem Piëzometerſtande die Ausflußgeſchwindigkeit des Waſſers berechnen. Iſt der Piëzometerſtand $PQ = z$, die Länge des letzten Röhrenſtückes $DE = l$ und die Weite deſſelben $= d$, ſo hat man:

$$z = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeſchwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{\zeta \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{d}{l} \cdot \frac{2gz}{\zeta}}.$$

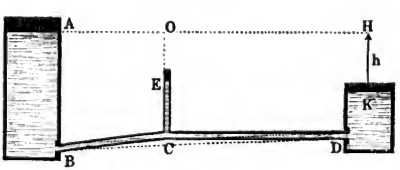
Beiſpiel. Iſt bei der Leitung in Fig. 738, der Piëzometerſtand $PQ = z$ $^3/_4$ Fuß, die Länge der Röhre $DE$, vom Piëzometer bis zur Ausmündung gemeſſen, $l = 150$ Fuß, und die Röhrenweite $3^1/_2$ Zoll, ſo folgt bei dem Widerſtandscoefficienten $\zeta = 0{,}025$ die Ausflußgeſchwindigkeit:

$$v = 7{,}906 \sqrt{\frac{3{,}5}{150 \,.\, 12} \cdot \frac{0{,}75}{0{,}025}} = 7{,}906 \,.\, 0{,}2415 = 1{,}91 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge: $Q = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3{,}5}{12}\right)^2 \cdot 1{,}91 = 0{,}127$ Cubikfuß.

Anmerkung. Die Bewegung des Waſſers in einer Röhrenleitung $BCD$, Fig. 739, kann ſehr leicht durch Luft geſtört werden, welche ſich entweder aus dem

Fig. 739.




Waſſer entwickelt, oder von außen in die Röhre eindringt. Damit keins von beiden eintrete, muß bei der Anlage der Röhrenleitung dafür geſorgt werden, daß der Druck an jeder Stelle $C$ derſelben poſitiv bleibe, oder vielmehr den Atmoſphärendruck übertreffe, alſo in jedem Piëzometer eine Waſſerſäule $CE$ ſtehe. Die Höhe dieſer Waſſerſäule iſt:

Digitized by Google

$$z = h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g},$$

wenn $h_1$ die Druckhöhe $C\,O$ in $C$, $l_1$ die Länge des Röhrenstückes $B\,C$, und $v$ die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bezeichnet. Es ist also nöthig, daß

$$h_1 > \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

sei, daß z. B. der Wasserstand im Zuflußreservoir mindestens die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Röhre übertreffe. Außerdem ist zu befürchten, daß die Röhre in einem Wirbel Luft nachsauge.

Auch läßt sich $h_1 > \dfrac{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}}{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}}\, h$ setzen, wenn $h$ das ganze Röhrengefälle $H\,K$ und $l$ die ganze Röhrenlänge $B\,C\,D$ bezeichnet.

Um das Ansammeln von Luft in der Röhre mit Sicherheit zu verhindern, ist es sehr zweckmäßig, dieselbe steigend zu legen, weil dann die Luftblasen vom fließenden Wasser mit fortgenommen werden.

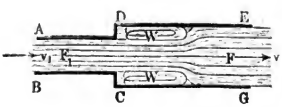
---

## Viertes Capitel.

## Von den Hindernissen in der Bewegung des Wassers bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen.

**Plötzliche Erweiterung.** Veränderungen in dem Querschnitte einer Röhre oder eines anderen Ausflußreservoirs geben auch Veränderungen in der Geschwindigkeit des Wassers. Die Geschwindigkeit ist dem Querschnitte des Wasserstromes umgekehrt proportional; je weiter das Gefäß ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit, und je enger das Gefäß, desto größer die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers. Aendert sich der Querschnitt eines Gefäßes plötzlich, wie z. B. bei der Röhre $A\,C\,E$, Fig. 740, so tritt §. 436

Fig. 740.




auch eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein, und hiermit ist wieder ein Verlust an lebendiger Kraft und eine entsprechende Abnahme an Druck verbunden. Dieser Verlust läßt sich genau so berechnen, wie der Arbeitsverlust beim Stoße unelastischer Körper (s. §. 335). Jedes Wasserelement, welches aus der engeren Röhre $B\,D$ in



Digitized by Google

die weitere Röhre $DG$ tritt, stößt gegen die langsamer gehende Wassermasse in dieser Röhre und geht nach dem Stoße mit dieser vereinigt fort. Genau so ist es aber auch bei dem Zusammentreffen fester und unelastischer Körper, auch diese Körper gehen nach dem Stoße mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit fort. Wenn wir nun gefunden haben, daß der Arbeitsverlust beim Stoße dieser Körper

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

ist, so können wir hier, da das stoßende Wasserelement $G_1$ unendlich klein ist gegen die gestoßene Wassermasse $G_2$, setzen:

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} G_1,$$

und folglich den entsprechenden Verlust an Druckhöhe:

$$h = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

Es entsteht also durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein Druckhöhenverlust, welcher durch die dieser Veränderung entsprechende Geschwindigkeitshöhe gemessen wird.

Ist nun der Querschnitt der einen Röhre $AC$, $= F_1$, und der Querschnitt der anderen Röhre $CE$, welche mit der ersteren ein Ganzes bildet, $= F$, die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhre, $= v_1$ und die in der anderen, $= v$, so hat man:

$$v_1 = \frac{Fv}{F_1},$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus einer Röhre in die andere:

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und den entsprechenden, schon von Borda gefundenen Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Die gefundene Druckhöhe

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

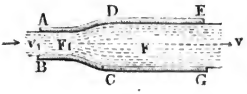
kann natürlich nicht spurlos verloren gehen, man muß vielmehr annehmen, daß die ihr entsprechende mechanische Arbeit auf die Zertheilung und die schwingende Bewegung der vorher ein Continuum bildenden Wassertheile, zumal auf die Wirbelbewegung in $W$, $W$ verwendet wird.

Die hierüber angestellten Versuche des Verfassers stimmen mit der Theorie

Digitized by Google

gut überein. Damit die Röhre $DG$ vom Waſſer ausgefüllt werde, iſt es nöthig, daß ſie nicht ſehr kurz und nicht ſehr viel weiter ſei als die Röhre $AC$. Dieſer Verluſt verſchwindet, wenn, wie Fig. 741 repräſentirt, durch Abrundung der Kanten ein allmäliger Uebergang aus der einen Röhre in die andere herbeigeführt wird.

Fig. 741.




Beiſpiel. Wenn der Durchmeſſer der einen Röhre in der Zuſammenſetzung von Fig. 740 noch einmal ſo groß iſt als der der anderen Röhre, ſo iſt $\frac{F}{F_1} = (2/1)^2 = 4$, daher der Widerſtandscoefficient $\zeta = (4-1)^2 = 9$ und die entſprechende Widerſtandshöhe für den Uebergang aus der engeren Röhre in die weitere, $= 9 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Iſt die Geſchwindigkeit des Waſſers in der letzteren Röhre, $= 10$ Fuß, ſo folgt die Widerſtandshöhe $= 9 . 0{,}016 . 10^2 = 14{,}4$ Fuß.

**Verengung.** Eine plötzliche Geſchwindigkeitsveränderung tritt §. 437 auch dann ein, wenn das Waſſer aus einem Gefäße $AB$, Fig. 742, in eine engere Röhre $DG$ tritt, zumal wenn an der Eintrittsſtelle $CD$ ein Diaphragma ſitzt, deſſen Oeffnung noch kleiner iſt als der Querſchnitt des Rohres $DG$. Iſt der Inhalt der Verengung, $= F_1$, und $\alpha$ der Contractionscoefficient, ſo hat man den Querſchnitt $F_2$ des contrahirten Waſſerſtrahles, $= \alpha F_1$, und iſt dagegen $F$ der Querſchnitt des Rohres und $v$ die Ausflußgeſchwindigkeit, ſo findet man die Geſchwindigkeit des Waſſers im contrahirten Querſchnitte $F_2$ durch die Formel

$$v_2 = \frac{F}{\alpha F_1} v,$$

daher den Druckhöhenverluſt beim Uebergange aus $F_2$ in $F$ oder aus $v_2$ in $v$:

$$h = \frac{(v_2 - v)^2}{2g} = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

und den entſprechenden Widerſtandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2.$$

Fig. 742.

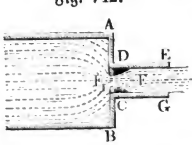
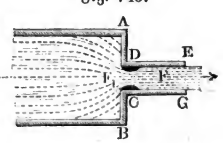



Fig. 743.




Ohne Diaphragma erhält man eine bloße Anſatzröhre, Fig. 743, daher iſt hier $F = F_1$ und



Digitized by Google

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2,$$

sowie umgekehrt,

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta}}.$$

Nimmt man $\alpha = 0{,}64$ an, so erhält man:

$$\zeta = \left(\frac{1 - 0{,}64}{0{,}64}\right)^2 = (9/16)^2 = 0{,}316.$$

Durch den Widerstand beim Eintritt in die Röhre und durch die Reibung des Wassers im äußeren Röhrenstücke steigert sich aber $\zeta$ auf 0,505 (§. 422).

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch eine Ansatzröhre mit verengtem Eintritte, wie Fig. 742 vorstellt, haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch ein Diaphragma und für den Anschluß an die weitere Röhre kann durch die Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$$

ausgedrückt werden; es ist aber zu setzen:

| Für $\frac{F_1}{F}$ = | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ = | 0,616 | 0,614 | 0,612 | 0,610 | 0,607 | 0,605 | 0,603 | 0,601 | 0,598 | 0,596 |
| und folgt: | | | | | | | | | | |
| $\zeta$ = | 231,7 | 50,99 | 19,78 | 9,612 | 5,256 | 3,077 | 1,876 | 1,169 | 0,734 | 0,480 |

Hiernach ist z. B. in dem Falle, wenn der verengte Querschnitt halb so groß ist als der Querschnitt der Röhre, der Widerstandscoefficient $\zeta = 5{,}256$, d. h. der Durchgang durch diese Verengung nimmt eine Druckhöhe in Anspruch, welche $5\,1/4$ mal so groß ist als die Geschwindigkeitshöhe.

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt der in Fig. 742 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $1\,1/2$ Fuß, die Weite der kreisförmigen Verengung $1\,1/2$ und die der Röhre $CE$, = 2 Zoll ist? Hier hat man:

$$\frac{F_1}{F} = \left(\frac{1\,1/2}{2}\right)^2 = (3/4)^2 = 9/16 = 0{,}56, \text{ daher } \alpha = 0{,}606, \text{ und}$$

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \,.\, 0{,}606} - 1\right)^2 = \left(\frac{16 - 5{,}454}{5{,}454}\right)^2 = \left(\frac{10{,}546}{5{,}454}\right)^2 = 3{,}74.$$

Setzt man nun $h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2g}$, so erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

Digitized by Google

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{7{,}906\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{4{,}74}} = 4{,}45 \text{ Fuß},$$

und folglich das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} \cdot 4 \,.\, 12 \,.\, 4{,}45 = 53{,}4 \,.\, \pi = 168 \text{ Cubikzoll}.$$

**Einfluss der unvollkommenen Contraction.** Bei dem im letzten §. 438
Paragraphen betrachteten Falle, wo das Wasser aus einem großen Gefäße kommt, konnte die Contraction als eine vollkommene angesehen werden; ist aber der Querschnitt des Gefäßes oder des an einer Verengung ankommenden Wasserstromes nicht sehr groß in Ansehung auf den Querschnitt $F_1$, Fig. 744, der Verengung, so ist die Contraction eine unvollkommene und daher auch der entsprechende Widerstandscoefficient kleiner als in dem oben untersuchten Falle. Gelten wieder die vorigen Bezeichnungen, so hat man auch hier die Widerstandshöhe oder die durch den Durchgang durch $F_1$ verzehrte Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

nur sind für $\alpha_1$ veränderliche, und zwar um so größere Zahlen einzusetzen, je größer das Verhältniß $\frac{F_1}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Verengung und dem Querschnitt $G$ der Zuleitungsröhre $AB$ ist. Befindet sich das Dia-

Fig. 744.

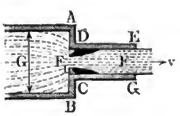
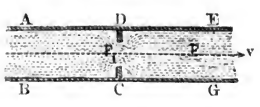



Fig 745.




phragma $CD$ in einer gleichweiten Röhre $AG$, Fig. 745, so findet ganz dieselbe Bestimmung statt, nur hängt hier der Coefficient $\alpha$ von $\frac{F_1}{F}$ ab.

Nach den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen hat man in der Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2$$

für die Widerstandscoefficienten zu setzen:

Digitized by Google

| bei $\frac{F_1}{F}$ = | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ = | 0,624 | 0,632 | 0,643 | 0,659 | 0,681 | 0,712 | 0,755 | 0,813 | 0,892 | 1,000 |

und es folgt:

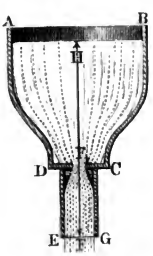
| $\zeta$ = | 225,9 | 47,77 | 30,83 | 7,801 | 3,753 | 1,796 | 0,797 | 0,290 | 0,060 | 0,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Diese Verluste werden kleiner, wenn man durch Abrundung der Kanten die Contraction vermindert oder aufhebt, und sie lassen sich fast ganz beseitigen, wenn man, wie Fig. 746 repräsentirt, ein sich allmälig erweiterndes Durchgangsstück $MN$ einsetzt.

Fig. 746.

Beispiel. Welche Druckhöhe wird erfordert, damit der in Fig. 747 abgebildete Apparat in der Minute 8 Cubikfuß Wasser liefere? Ist die Weite des Diaphragma $F_1$, = 1½, die Weite der Ausflußröhre $DG$, = 2 Zoll und die untere Weite des Gefäßes $AC$, = 3 Zoll, so hat man:

Fig. 747.




$$\frac{F_1}{G} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ daher } \alpha = 0{,}637,$$

ferner:

$$\frac{F}{F_1} = \left(\frac{2}{1\frac{1}{2}}\right)^2 = (\tfrac{4}{3})^2 = \tfrac{16}{9},$$

und den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \,.\, 0{,}637} - 1\right)^2 = \left(\frac{10{,}267}{5{,}733}\right)^2 = 3{,}207.$$

Nun folgt die Ausflußgeschwindigkeit:

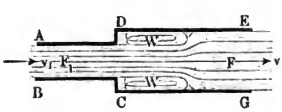
$$v = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2} = \frac{4 \,.\, 8}{60 \,.\, \pi\ (\frac{1}{6})^2} = \frac{19{,}2}{\pi} = 6{,}112 \text{ Fuß},$$

und daher die in Frage stehende Druckhöhe:

$$h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2\,g} = 4{,}207 \,.\, 0{,}016 \,.\, 6{,}112^2 = 2{,}51 \text{ Fuß}.$$

§. 439 **Druckverhältnisse in cylindrischen Röhren.** Mit Hülfe der Borda'schen Formel lassen sich nun auch die Druckverhältnisse in einer Ausflußröhre mit verschiedenen Weiten, wie z. B. $ACE$ Fig. 748, ermitteln. Ist $p_1$ der Druck und $v_1$ die Geschwindigkeit des Wassers in $F_1$, sowie $p$ der Druck und $v$ die Geschwindigkeit desselben in $F$, so hat man:

Fig. 748.




Digitized by Google

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}, \text{ und daher}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_1^2 + (v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \frac{(v_1 - v)v}{g}, \text{ oder}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)\frac{v^2}{g}.$$

Nun iſt aber die ganze Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

daher hat man auch

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{2(v_1 - v)v}{v^2 + (v_1 - v)^2}h,$$

$$= \frac{p}{\gamma} - \frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}.$$

In dem Falle, wo das Waſſer mit dem Querſchnitte $F$ in die freie Luft ſtrömt, iſt $\frac{p}{\gamma}$ = dem Waſſerbarometerſtande $b$, daher die Piëzometerhöhe in $F_1$,

$$z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = b - \frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}.$$

So lange nun $p_1$ poſitiv ausfällt, fließt auch das Waſſer mit gefülltem Querſchnitt $F$ bei $EG$ aus; ſtellt ſich hingegen $p_1$ negativ heraus, ſo hört das vorausgeſetzte Ausflußverhältniß ganz auf, und es fließt das Waſſer durch die äußere Röhre $CE$ ſo aus, als wenn dieſelbe gar nicht vorhanden wäre, und zwar mit der theoretiſchen Ausflußgeſchwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Damit der volle Ausfluß bei $EG$ eintrete, iſt folglich nöthig, daß

$$\frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2} < b, \text{ oder daß}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)} \text{ ſei.}$$

Wenn alſo die durch dieſe Formel angegebene Grenze von der Druckhöhe $h$ übertroffen wird, hört der Ausfluß mit gefülltem Querſchnitte auf.

Digitized by Google

Dieſe Formel findet auch ihre Anwendung bei der Röhre $CE$, Fig. 742, mit Diaphragma; hier iſt nur ſtatt $F_1$, $\alpha_1 F_1$ einzuſetzen, daher für den vollen Ausfluß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)} \text{ zu fordern.}$$

Läßt man das Diaphragma weg, hat man es alſo bloß mit einer kurzen cylindriſchen Anſatzröhre $CE$, Fig. 743, zu thun, ſo iſt $F_1 = F$ und daher

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \text{ zu ſetzen.}$$

Führt man $\alpha = 0{,}64$, alſo $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}5625$ ein, ſo ergiebt ſich für dieſe Röhren die Grenze des Ausfluſſes mit gefülltem Querſchnitt:

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 0{,}3164}{2 \,.\, 0{,}5625}, \text{ d. i. } \frac{h}{b} < 1{,}17.$$

Nimmt man $b = 33$ Fuß an, ſo folgt, daß bei Druckhöhen über $1{,}17 \,.\, 33 = 38{,}6$ Fuß der volle Ausfluß durch eine kurze cylindriſche Anſatzröhre aufhört.

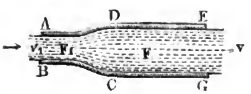
Hiermit ſtimmen auch die Ergebniſſe der Verſuche des Verfaſſers vollkommen überein (ſ. den betreffenden Aufſatz im 9. Bande des Civilingenieur, über den Ausfluß des Waſſers unter hohem Drucke).

Beim Ausfluß des Waſſers in einen luftverdünnten Raum tritt dieſe Grenze noch eher ein, da dann $b$ kleiner als 33 Fuß iſt; wäre z. B. der Waſſerbarometerſtand in dieſem Raume nur 3 Fuß, ſo würde der volle Ausfluß durch eine kurze cylindriſche Anſatzröhre bei der Druckhöhe $h = 1{,}17 \,.\, 3 = 3{,}51$ Fuß aufhören.

Wenn das Waſſer durch eine ſich allmälig erweiternde Röhre $ACE$, Fig. 749, fließt, ſo iſt der Piëzometerſtand im Einmündungsſtück $AB$:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]h,$$

Fig. 749.




folglich wenn man $\frac{p}{\gamma} = b$ ſetzt

$$z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = b - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]h.$$

Es iſt daher hier

$$\frac{h}{b} < \frac{1}{\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1}$$

Digitized by Google

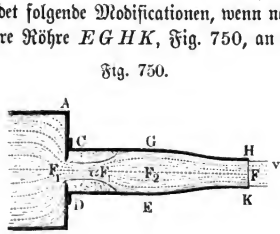
zu fordern, damit der Ausfluß mit gefülltem Querschnitte erfolge. Setzt man $\frac{h}{b} = 1{,}17$, also $\frac{b}{h} = 0{,}8547$, so erhält man das Querschnittsverhältniß, bei welchem unter der Druckhöhe $h = 38{,}6$ Fuß der volle Ausfluß aufhört:

$$\frac{F}{F_1} = \sqrt{1 + 0{,}8547} = 1{,}362,$$

**Druckverhältnisse in conischen Röhren.** Das Ausfluß- und Druckverhältniß bei einer cylindrischen Röhre $CE$ mit oder ohne Diaphragma erleidet folgende Modificationen, wenn noch ein besonderes Mundstück oder eine andere Röhre $EGHK$, Fig. 750, an diese Röhre angeschlossen ist. Es bezeichne $F$ den Querschnitt, $v$ die Geschwindigkeit und $p$ den Druck des Wassers an der Ausmündung $HK$, ferner $F_1$ den Querschnitt der Einmündung, $\alpha F_1$ den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahles, sowie $v_1$ die Geschwindigkeit und $p_1$ den Druck des Wassers in demselben; ebenso sei $F_2$ der Röhrenquerschnitt an der Stelle, wo sich der Wasserstrahl wieder an die Röhre anlegt, endlich bezeichne $v_2$ die Geschwindigkeit und $p_2$ den Druck des Wassers an eben dieser Stelle.

§. 440

Fig. 750.




Dann hat man

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} \text{ und daher}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g}$$

$$= \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 + v_2^2}{2g} - \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2}{2g},$$

oder, da $\alpha F_1 v_1 = F_2 v_2 = F v$ ist, also

$$v_1 = \frac{F v}{\alpha F_1} \text{ und } v_2 = \frac{F v}{F_2} \text{ gesetzt werden kann,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \left[1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber hier die zur Erzeugung der Ausflußgeschwindigkeit nöthige Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

daher folgt auch

Digitized by Google

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2} h = \frac{p}{\gamma} + \frac{\frac{1}{F^2} - \frac{2}{\alpha F_1 F_2} + \frac{1}{F_2^2}}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

$$\text{d. i. } z_1 = \frac{p}{\gamma} - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

oder beim Ausflusse in die freie Luft,

$$z_1 = b - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h.$$

Damit ein voller Ausfluß erfolge, muß hiernach

$$\frac{h}{b} < \frac{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2}{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \frac{h}{b}}{F^2} > \left(\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \frac{1}{F_2^2}\right)\frac{h}{b} - \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2 \text{ sein.}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich nun auch die Ausflußverhältnisse der conischen Röhren $ABDE$, Fig. 751 und Fig. 752, angeben;

Fig. 751.

Fig. 752.

wenn man in denselben statt $F_2$ den Querschnitt der Röhre an der Stelle, wo sich der Strahl anlegt, einführt. Bezeichnet $\delta$ die Hälfte des Divergenzwinkels $ACB$ der einen oder des Convergenzwinkels der anderen Röhre, und setzt man voraus, daß die Länge $F_1 F_2$ des Wirbels gleich der Mündungsweite $AB = d$ sei, so läßt sich die Weite der Röhren an der Stelle, wo sich das Wasser an die Röhrenwand anlegt, setzen:

$$d_2 = d_1 \pm 2\, d_1\, tang.\, \delta = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)\, d_1,$$

Digitized by Google

und daher das Querschnittsverhältniß

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = (1 \pm 2\,tang.\,\delta)^2,$$

wobei das Pluszeichen für die divergente Röhre in Fig. 751 und das Minuszeichen für die convergente Röhre in Fig. 752 in Anwendung zu bringen ist. Z. B. für $\delta = 2^1/_2$ Grad, ist $2\,tang.\,\delta = 0{,}0875$, und

$$\frac{F_2}{F_1} = (1 \pm 0{,}0875)^2 \text{ entweder } = 1{,}1827 \text{ oder } 0{,}8327;$$

daher die Ausflußgeschwindigkeit im ersten Falle:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1{,}1827}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + 0{,}514\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}},$$

und dagegen im zweiten:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{0{,}8327}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + 0{,}1308\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}.$$

Der entsprechende Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}514\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der divergenten Röhre ist natürlich ansehnlich kleiner als der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}1308\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der convergenten Röhre.

Wären z. B. die Röhren drei Mal so lang als in der Einmündung weit, so hätte man im ersten Falle:

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 + 6\,tang.\,\delta)^4 = 1{,}2625^4 = 2{,}5405, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}306}} = 0{,}659, \text{ dagegen im zweiten Falle:}$$

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 - 6\,tang.\,\delta)^4 = 0{,}7375^4 = 0{,}2958, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}0387}} = 0{,}981 \text{ (vergl. §. 425).}$$

Damit der Ausfluß durch diese Röhren mit gefülltem Querschnitte erfolge, muß

Digitized by Google

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2}{\frac{2F}{\alpha F_1}\frac{F}{F_2} - \left[1 + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]}$$ sein, also im ersten Falle, wo

$$\frac{F}{\alpha F_1} = \frac{1{,}5939}{0{,}64} = 2{,}4906, \text{ und } \frac{F}{F_2} = \frac{1{,}5939}{1{,}1827} = 1{,}3477 \text{ ist,}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 1{,}1429^2}{6{,}7112 - 2{,}8163} = \frac{2{,}3062}{3{,}8949} = 0{,}592,$$

darf also die Druckhöhe $h$ noch nicht $33 . 0{,}592 = 19{,}5$ Fuß erreichen.

§. 441 **Knieröhren.** Besondere Hindernisse stellen sich der Bewegung des Wassers in Röhren entgegen, wenn dieselben gekrümmt sind oder gar Kniee bilden. Diese Widerstände lassen sich nicht mit Sicherheit theoretisch bestimmen, und mußten daher, wie so viele andere Ausflußverhältnisse, auf dem Wege der Erfahrung untersucht werden.

Bildet eine Röhre $ACB$, Fig. 753, ein Knie, so trennt sich der Strahl in Folge der Centrifugalkraft des Wassers von der inneren Fläche des zweiten Röhrenstückes; es hört, wenn dieses Stück kurz ist, der volle Ausfluß auf, und es fällt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner aus als bei einer gleich langen geraden Röhre. Ist aber das äußere Stück $CB$ der Knieröhre $ACB$,

Fig. 753.

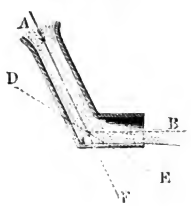



Fig. 754.

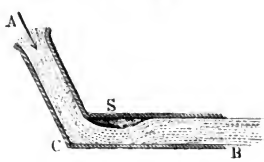



Fig. 754, länger, so bildet sich hinter dem Knie $C$ ein Wirbel $S$, und es tritt bei wieder gefülltem Querschnitte eine verminderte Ausflußgeschwindigkeit $v$ ein. Diese Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ist genau so zu beurtheilen wie der Widerstand, welchen Verengungen in Röhren bewirken. Ist $F$ der Querschnitt der Röhre und $F_1$ der Querschnitt des contrahirten Strahles bei $S$, so hat man den Contractionscoefficienten desselben:

$$\alpha = \frac{F}{F_1},$$

und daher den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\xi = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Digitized by Google

Der Contractionscoefficient $\alpha$ und folglich auch der entsprechende Widerstandscoefficient $\zeta$, hängt von dem Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $\delta = ACD = BCE = \frac{1}{2} BCF$, Fig. 753, ab, und es ist nach den Versuchen, welche der Verfasser an einer Röhre von 3 Centimeter Weite hierüber angestellt hat:

$$\zeta = 0{,}9457 \; sin.\, \delta^2 + 2{,}047 \; sin.\, \delta^4$$

zu setzen.

Folgende kleine Tabelle enthält eine Reihe von nach dieser Formel berechneten Widerstandscoefficienten für verschiedene Bricolwinkel:

| $\delta^0 =$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta =$ | 0,046 | 0,139 | 0,364 | 0,740 | 0,984 | 1,260 | 1,556 | 1,861 | 2,158 | 2,431 |

Man ersieht hieraus, daß durch die Kniee in Röhren der lebendigen Kraft des Wassers in Röhren bedeutende Verluste erwachsen. Ist z. B. das Knie ein rechtwinkeliges, also $\delta = 45^0$, so hat man hiernach den durch dasselbe herbeigeführten Druckhöhenverlust:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

also ziemlich gleich der Geschwindigkeitshöhe.

Bei engeren Röhren fällt $\zeta$ namhaft größer aus, z. B. für eine Knieröhre von 1 Centimeter Weite und 90 Grad Ablenkung ist $\zeta = 1{,}536$ gefunden worden. S. des Verfassers Experimentalhydraulik.

Stoßen an ein Knie $ACB$, Fig. 755, noch andere Kniee ohne längere Zwischenröhre, wie z. B. aus Fig. 756 und Fig. 757 zu ersehen ist, so tre-

Fig. 755.

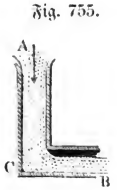



Fig. 756.

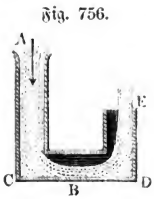
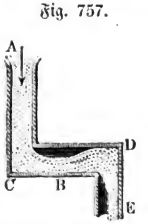



Fig. 757.



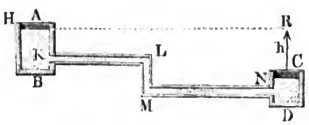

ten ganz besondere, jedoch leicht erklärliche Ausflußverhältnisse ein. Das zweite Knie $BDE$, Fig. 756, welches den Strahl nach derselben Seite hin ablenkt, wie das erste $ACB$, bringt keine weitere Contraction des Strahles hervor, es ist daher auch bei vollem Ausflusse hier $\zeta$ nicht größer als für ein einfaches Knie $ACB$. Lenkt aber das Knie $BDE$, Fig. 757,

Digitized by Google

den Strahl auf die entgegengesetzte Seite, so ist die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerstandscoefficient doppelt so groß als bei einfachem Knie. Wird endlich $BDE$ so an $ACB$ gesetzt, daß $DE$ rechtwinkelig auf die Ebene $ABD$ zu stehen kommt, so stellt sich $\zeta$ ungefähr $1^1/_2$ mal so groß heraus als bei dem Knie $ACB$ allein.

Beispiel. Wenn eine Röhrenleitung $KLN$, Fig. 758, von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, welche in der Minute 25 Cubikfuß Wasser liefern soll, zwei rechtwinkelige Kniee enthält, so hat man die nöthige Druckhöhe:

Fig. 758.




$$h = (1{,}505 + 8{,}712 + 2 \,.\, 0{,}984) \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= 12{,}185 \,.\, 0{,}1494 = 1{,}82 \text{ Fuß}.$$

(Vergl. Beispiel 1 zu §. 430.)

§. 442. **Kropfröhren.** Gekrümmte Röhren geben unter übrigens gleichen Verhältnissen viel kleinere Widerstände als unabgerundete Knieröhren. Auch sie veranlassen in Folge der Centrifugalkraft des Wassers eine partielle Contraction des Wasserstrahles $ABD$, Fig. 759, so daß, wenn sich an die krumme Röhre keine längere gerade Röhre anschließt, der Querschnitt $F_1$ des Strahles bei seinem Austritte kleiner ist als der Querschnitt $F$ der Röhre. Endigt sich aber der Kropf $ABD$, Fig. 760, in einer längeren geraden Röhre $DE$, so bildet sich wieder ein Wirbel $F$, und es findet auf Unkosten

Fig. 759.

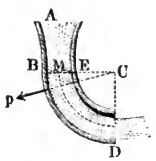
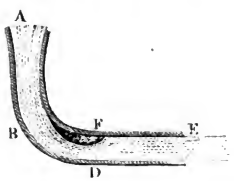



Fig. 760.




der lebendigen Kraft des Wassers wieder ein voller Ausfluß des Wassers statt. Ist der Contractionscoefficient $\frac{F_1}{F} = \alpha$, so haben wir auch den Coefficienten des Krümmungswiderstandes:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient $\alpha$ hängt von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite $BM = EM = a$, Fig. 759, und dem Krümmungshalbmesser

Digitized by Google

$CM = r$ der Röhrenaxe ab und läßt sich annähernd auf folgende Weise theoretisch bestimmen. Ist $v$ die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in den Kropf und $v_1$ die des zusammengezogenen Wasserstrahles, so hat man $v_1 F_1 = vF$, daher $v_1 = \frac{F}{F_1} v$, und demnach die den Druck in $BE$ messende Druckhöhe:

$$h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Diese Höhe mit 1 und $\gamma$ multiplicirt, ergiebt sich der Druck des Wasserstrahles bei $E$ auf die Flächeneinheit nach allen Richtungen hin:

$$p = h\gamma = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} \gamma = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} \gamma.$$

Da nun die Centrifugalkraft des Wassers an der convexen Seite dem Drucke $p$ entgegenwirkt, so ist es möglich, daß sie denselben hier ganz aufheben kann. In diesem Falle wird aber auch die äußere Luft eindringen und sich der Strahl ganz von der convexen Seite losziehen, wie aus den Fig. 759 und 760 zu ersehen ist. Die Centrifugalkraft eines Wasserprismas von der Länge $BE = 2a$ und dem Querschnitte 1 ist bei dem Krümmungshalbmesser $CM = r$,

$$q = \frac{v^2}{gr} \cdot 2a\gamma,$$

setzt man daher $p = q$, so folgt die Bedingung des Losreißens:

$$\frac{1}{\alpha^2} - 1 = \frac{4a}{r},$$

daher der Contractionscoefficient:

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{r + 4a}},$$

und der Widerstandscoefficient bei vollem Ausflusse:

$$\xi = \left(\sqrt{\frac{r + 4a}{r}} - 1\right)^2.$$

Da bei dieser Entwickelung nur eine mittlere Geschwindigkeit und ein mittlerer Krümmungshalbmesser zu Grunde gelegt wurde, so kann sie natürlich auch nur auf eine annähernde Bestimmung von $\alpha$ und $\xi$ führen.

Aus den Versuchen des Verfassers und aus eigenen Beobachtungsresultaten Du Buat's hat aber der Verfasser für den Widerstandscoefficienten beim Durchgange des Wassers durch Kröpfe folgende empirische Formeln abgeleitet:

1) Für Kröpfe mit kreisförmigem Querschnitte:

$$\xi = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2};$$

Digitized by Google

2) für Kropfröhren mit rectangulären Querschnitten:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}.$$

Nach diesen Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden:

**Tabelle I.**

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit kreisförmigen Querschnitten.

| $\frac{a}{r} =$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta =$ | 0,131 | 0,138 | 0,158 | 0,206 | 0,294 | 0,440 | 0,661 | 0,977 | 1,408 | 1,978 |

**Tabelle II.**

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit rectangulären Querschnitten.

| $\frac{a}{r} =$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta =$ | 0,124 | 0,135 | 0,180 | 0,250 | 0,398 | 0,643 | 1,015 | 1,546 | 2,271 | 3,228 |

Hiernach sieht man, daß bei einer runden Röhre, deren Krümmungshalbmesser zweimal so groß ist als der Röhrenhalbmesser, der Widerstandscoefficient $= 0{,}294$, und bei einer Röhre, deren Krümmungshalbmesser mindestens zehnmal so groß ist als der Halbmesser des Querschnittes, dieser Coefficient $= 0{,}131$ ausfällt.

Um die Contraction des Wassers in einer krummen Röhre $ABD$, Fig. 761, zu verhindern, ist der Querschnitt der Röhre allmälig so zu verengern, daß der Querschnitt $DH = F_1$ der Ausmündung zum Querschnitte $BE = F$ der Einmündung im Verhältnisse $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$ zu stehen kommt.

Fig. 761.

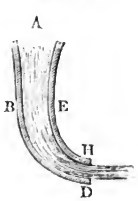



Fig. 762.

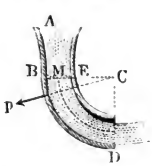
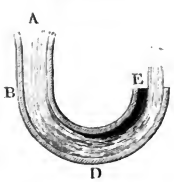



Fig. 763.




Digitized by Google

Stößt an den Kropf $BD$, Fig. 762, noch ein anderer an, welcher den Strahl nach derselben Seite noch weiter ablenkt, bildet z. B. die Röhrenaxe einen Halbkreis wie $BDE$, Fig. 763, so ändert sich die Contraction nicht, es behalten also auch $\alpha$ und $\zeta$ nahe denselben Werth wie bei der Röhre in Fig. 762, welche nur einen Quadranten einnimmt; schließt sich dagegen ein Kropf $DE$, Fig. 764, an, welcher nach der entgegengesetzten Seite ablenkt, so bildet sich vor diesem ein Wirbel $F$ und es tritt in demselben eine zweite Zusammenziehung des Strahles ein, wodurch der Widerstand ($\zeta$) nahe verdoppelt wird.

Fig. 764.

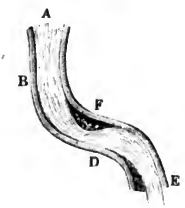



Fig. 765.

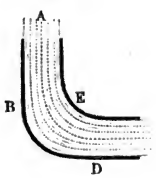
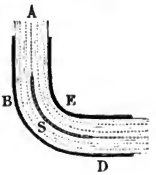


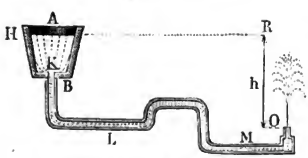

Fig. 766.




Der Widerstand des fließenden Wassers in Kropfröhren läßt sich durch Erweiterung der Kröpfe wie $BDE$, Fig. 765, sowie durch dünne Scheidewände in denselben wie $S$ in $BDE$, Fig. 766, vermindern, denn im ersten Falle wird die Geschwindigkeit $v$ und im zweiten das Verhältniß $\frac{a}{r}$, und folglich auch der Widerstandscoefficient $\zeta$ kleiner.

Beispiel. Wenn die Röhrenleitung $BLM$, Fig. 767, im zweiten Beispiele des §. 430 noch fünf Kröpfe zu je 90° enthält, und der Krümmungshalbmesser eines jeden 2 Zoll beträgt, so hat man:

Fig. 767.




$$\frac{a}{r} = 1/2$$

und nach der ersten der obigen Tabellen, den entsprechenden Widerstandscoefficienten: $\zeta = 0{,}294$; folglich für alle fünf Kröpfe, $5\,\zeta = 1{,}47$, und daher die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers statt

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582 + 1{,}47}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{9{,}052}} = 5{,}876 \text{ Fuß},$$

so daß nun die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = 0{,}7854 . {}^1/_{36} . 5{,}876 = 0{,}1282 \text{ Cubikfuß} = 221 \text{ Cubikzoll folgt.}$$



Digitized by Google

§. 443 **Schieber, Hähne, Klappen.** Um den Ausfluß des Waſſers aus Röhren und Gefäßen zu reguliren, werden ſogenannte Obturatoren, und zwar Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angewendet, wodurch ſich Verengungen erzeugen laſſen, welche dem Durchgange des Waſſers Widerſtände entgegenſetzen, die ſich auf ähnliche Weiſe wie die in den letzten Paragraphen abgehandelten Verluſte beſtimmen laſſen. Da aber hier das Waſſer noch beſondere Richtungsänderungen, Zertheilungen u. ſ. w. erleidet, ſo laſſen ſich die Coefficienten $\alpha$ und $\xi$ nicht unmittelbar beſtimmen, ſondern es war zu deren Ermittelung die Ausführung beſonderer Verſuche nöthig. Solche Verſuche ſind von dem Verfaſſer ebenfalls angeſtellt worden*), und die Hauptergebniſſe derſelben enthalten folgende Tabellen:

**Tabelle I.**

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Schieber oder Schubventile (franz. tiroirs; engl. slide-valves) im parallelepipediſchen Rohre.

| Querſchnittsverhältniß $\frac{F_1}{F} =$ | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerſtandscoefficient $\zeta =$ | 0,00 | 0,09 | 0,39 | 0,95 | 2,08 | 4,02 | 8,12 | 17,8 | 44,5 | 193 |

**Tabelle II.**

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Schieber im cylindriſchen Rohre.

| Relative Stellhöhe $s =$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{7}{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querſchnittsverhältniß $=$ | 1,000 | 0,948 | 0,856 | 0,740 | 0,609 | 0,466 | 0,315 | 0,159 |
| Widerſtandscoefficient $\zeta =$ | 0,00 | 0,07 | 0,26 | 0,81 | 2,06 | 5,52 | 17,0 | 97,8 |

*) Verſuche über den Ausfluß des Waſſers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angeſtellt und berechnet von Jul. Weisbach, oder unter dem Titel „Unterſuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik“ u. ſ. w., Leipzig 1842.

Digitized by Google

### Tabelle III.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn (franz. robinet; engl. cock) im parallelepipedischen Rohre.

| Stellwinkel $\delta$ = | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | $66\frac{3}{4}$° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querschnittsverhältniß = | 0,926 | 0,849 | 0,769 | 0,687 | 0,604 | 0,520 | 0,436 | 0,352 | 0,269 | 0,188 | 0,110 | 0 |
| Widerstandscoefficient = | 0,05 | 0,31 | 0,88 | 1,84 | 3,45 | 6,15 | 11,2 | 20,7 | 41,0 | 95,3 | 275 | ∞ |

### Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im cylindrischen Rohre.

| Stellwinkel $\delta$ = | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querschnittsverhältniß = | 0,926 | 0,850 | 0,772 | 0,692 | 0,613 | 0,535 | 0,458 |
| Widerstandscoefficient = | 0,05 | 0,29 | 0,75 | 1,56 | 3,10 | 5,47 | 9,68 |

| Stellwinkel $\delta$ = | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | $82\frac{1}{8}$° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querschnittsverhältniß = | 0,385 | 0,315 | 0,250 | 0,190 | 0,137 | 0,091 | 0 |
| Widerstandscoefficient = | 17,3 | 31,2 | 52,6 | 106 | 206 | 486 | ∞ |

### Tabelle V.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile (franz. valves; engl. throttlevalves) im parallelepipedischen Rohre.

| Stellwinkel $\delta$ = | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querschnittsverhältniß = | 0,913 | 0,826 | 0,741 | 0,658 | 0,577 | 0,500 | 0,426 |
| Widerstandscoefficient = | 0,28 | 0,45 | 0,77 | 1,34 | 2,16 | 3,54 | 5,7 |



Digitized by Google

| Stellwinkel $\vartheta$ = | $40^0$ | $45^0$ | $50^0$ | $55^0$ | $60^0$ | $65^0$ | $70^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querſchnittsverhältniß = | 0,357 | 0,293 | 0,234 | 0,181 | 0,134 | 0,094 | 0,060 | 0 |
| Widerſtandscoefficient = | 9,27 | 15,07 | 24,9 | 42,7 | 77,4 | 158 | 368 | $\infty$ |

**Tabelle VI.**

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Drehklappen im cylindriſchen Rohre.

| Stellwinkel $\vartheta$ = | $5^0$ | $10^0$ | $15^0$ | $20^0$ | $25^0$ | $30^0$ | $35^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querſchnittsverhältniß = | 0,913 | 0,826 | 0,741 | 0,658 | 0,577 | 0,500 | 0,426 |
| Widerſtandscoefficient = | 0,24 | 0,52 | 0,90 | 1,54 | 2,51 | 3,91 | 6,22 |

| Stellwinkel $\vartheta$ = | $40^0$ | $45^0$ | $50^0$ | $55^0$ | $60^0$ | $65^0$ | $70^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Querſchnittsverhältniß = | 0,357 | 0,293 | 0,234 | 0,181 | 0,134 | 0,094 | 0,060 | 0 |
| Widerſtandscoefficient = | 10,8 | 18,7 | 32,6 | 58,8 | 118 | 256 | 751 | $\infty$ |

§. 444 Mit Hülfe der in den vorſtehenden Tabellen aufgeführten Widerſtandscoefficienten kann man nicht nur den einer gewiſſen Schieber-, Hahn- oder Klappenſtellung entſprechenden Druckhöhenverluſt angeben, ſondern auch beſtimmen, welche Stellung dieſen Apparaten zu geben iſt, damit die Ausflußgeſchwindigkeit oder der Widerſtand ein gewiſſer werde. Allerdings wird aber eine ſolche Beſtimmung um ſo ſicherer, je mehr dieſe regulirenden Vorrichtungen den bei den Verſuchen angewendeten gleichen. Uebrigens gelten die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall, wenn das Waſſer nach dem Durchgange durch die mittels dieſer Apparate hervorgebrachten Verengungen das Rohr wieder ausfüllt. Damit dieſer volle Ausfluß bei ſtarken Verengungen noch eintrete, muß das Rohr eine beträchtliche Länge haben. Die Querſchnitte der parallelepipediſchen Röhren waren 5 Centimeter breit und $2\frac{1}{2}$ Centimeter hoch, und die Querſchnitte von den

Digitized by Google

cylindrischen Röhren hatten eine Weite von 4 Centimetern. Bei dem Schieber, Fig. 768, entsteht eine einfache Verengung, deren Querschnitt bei dem

Fig. 768.

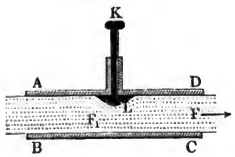



Fig. 769.

Fig. 770.

einen Rohre ein bloßes Rechteck $F_1$, Fig. 769, bei dem zweiten aber ein Mondchen $F_1$, Fig. 770, bildet. Bei den Hähnen, Fig. 771, stellen sich zwei Verengungen und auch zwei Richtungsabänderungen heraus, deshalb

Fig. 771.

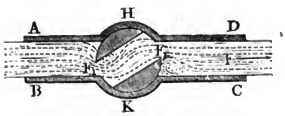



Fig. 772.

sind auch hier die Widerstände sehr groß. Die Querschnitte der größten Verengungen haben ganz eigenthümliche Gestalten. Bei den Drehklappen, Fig. 772, theilt sich der Strom in zwei Theile, wovon jeder durch eine Verengung hindurchgeht. Die Querschnitte dieser Verengungen sind bei der Drehklappe im parallelepipedischen Rohre rectangulär und im cylindrischen mondförmig. — Zur Anwendung der oben mitgetheilten Tabellen wird durch folgende Beispiele hinreichende Anleitung gegeben werden.

Beispiele. 1) Wenn in einer cylindrischen Röhrenleitung von 3 Zoll Weite und 500 Fuß Länge ein Schubventil angebracht ist, und dieses $^3/_8$ der ganzen Höhe gezogen wird, also $^5/_8$ derselben verschließt, welche Wassermenge liefert dieselbe unter einem Drucke von 4 Fuß? Der Widerstandscoefficient für den Eintritt in die Röhre läßt sich nach dem Früheren, $\zeta_0 = 0{,}505$, und der Widerstandscoefficient $\zeta_1$ für den Schieber nach Tabelle II., §. 443, $= 5{,}52$ setzen, es folgt daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906\,.\,\sqrt{4}}{\sqrt{1{,}505 + 5{,}52 + \zeta\,\frac{l}{d}}} = \frac{7{,}906\,.\,2}{\sqrt{7{,}025 + 500\,.\,4\,\zeta}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{7{,}025 + 2000\,\zeta}}.$$

Setzen wir den Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}025$, so erhalten wir:

$$v = \frac{15{,}812}{\sqrt{57{,}025}} = 2{,}09 \text{ Fuß}.$$

Digitized by Google

Nun entspricht aber der Geschwindigkeit $v = 2{,}1$ Fuß genauer $\zeta = 0{,}026$, daher ist richtiger:

$$v = \frac{15{,}812}{\sqrt{59{,}025}} = 2{,}06 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = \frac{\pi}{4} \cdot 9 \,.\, 12 \,.\, 2{,}06 = 55{,}62 \,.\, \pi = 175 \text{ Cubikzoll}.$$

2) Eine Röhrenleitung von 4 Zoll Weite liefert bei einer Druckhöhe von 5 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser, welche Stellung hat man dem in derselben angebrachten Drosselventile zu geben, damit sie nachher nur 8 Cubikfuß liefert? Die Geschwindigkeit ist anfangs

$$= \frac{10 \,.\, 4}{60 \,.\, \pi \,.\, (1/3)^2} = \frac{6}{\pi} = 1{,}91 \text{ Fuß},$$

und nach der Klappenstellung,

$$= {}^8/_{10} \cdot 1{,}91 = 1{,}528 \text{ Fuß}.$$

Der Ausflußcoefficient für den ersten Fall des Ausflusses ist

$$\frac{v}{\sqrt{2\,g\,h}} = \frac{1{,}91}{7{,}906\,\sqrt{5}} = 0{,}108,$$

daher der Widerstandscoefficient

$$= \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}108^2} - 1 = 84{,}7;$$

der Ausflußcoefficient für den zweiten Fall ist

$$= {}^8/_{10} \cdot 0{,}108 = 0{,}0864,$$

daher der Widerstandscoefficient

$$= \frac{1}{0{,}0864^2} - 1 = 133{,}0,$$

und demnach der Coefficient für den vom Drosselventile zu erzeugenden Widerstand:

$$\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 = 48{,}3.$$

Nun giebt aber nach Tabelle VI., §. 443, der Stellwinkel $\delta = 50^0$, $\zeta = 32{,}6$, und der Stellwinkel $\delta = 55^0$, $\zeta = 58{,}8$; es läßt sich daher annehmen, daß bei einer Stellung von $50^0 + \frac{15{,}7}{26{,}2} \cdot 5^0 = 53^0$ das gewünschte Ausflußquantum erhalten werde. Berücksichtigt man noch, daß bei dem Geschwindigkeitswechsel von 1,91 Fuß auf 1,528 Fuß der Reibungscoefficient von 0,0266 in 0,0281 übergeht, so ist noch genauer:

$$\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 \cdot \frac{281}{266} = 133{,}0 - 89{,}5 = 43{,}5,$$

und sonach der Stellwinkel

$$\delta = 50^0 + \frac{10{,}9}{26{,}2} \cdot 5^0 = 52^0.$$

§. 445 **Ventile.** Von besonderer Wichtigkeit ist die Kenntniß der durch Ventile (franz. soupapes; engl. valves) hervorgebrachten Widerstände. Auch über diese sind vom Verfasser Versuche angestellt worden. Am häufigsten kommen die sogenannten Kegel- und nächstdem die Klappenventile,

Digitized by Google

wie in den Figuren 773 und 774 abgebildet sind, zur Anwendung. Bei beiden geht das Wasser durch die von einem Ringe $RG$ gebildete Apertur;

Fig. 773.

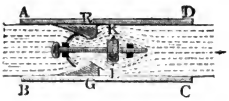
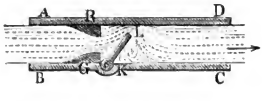



Fig. 774.




das Kegelventil $KL$, Fig. 773, hat einen Stiel, womit es in einer Führung liegt, die ihm nur einen Ausschub in der Axenrichtung gestattet; das Klappenventil oder die Ventilklappe $KL$, Fig. 774, hingegen öffnet sich drehend wie eine Thür. Man sieht leicht ein, daß bei beiden Apparaten dem Wasser nicht nur durch den Ventilring, sondern auch durch die Ventilklappe ein Hinderniß entgegengesetzt wird.

Bei dem Kegelventile, womit die Versuche angestellt wurden, war das Verhältniß zwischen der Apertur im Ventilringe zum Querschnitte der ganzen Röhre: 0,356, und dagegen das Verhältniß zwischen der Ringfläche um das geöffnete Ventil herum, zu dem Röhrenquerschnitte, = 0,406; es läßt sich daher im Mittel $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$ setzen. Indem man den Ausfluß bei verschiedenen Ventilstellungen beobachtete, ergab sich, daß der Widerstandscoefficient zwar abnahm, wenn der Ventilschub größer wurde, daß aber diese Abnahme schon höchst unbedeutend ausfiel, wenn der Ventilschub die halbe Weite der Apertur übertraf. Seine Größe war für diesen Stand, = 11, also die Widerstandshöhe oder der Druckhöhenverlust

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 11 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wenn $v$ die Geschwindigkeit des Wassers in der vollen Röhre bezeichnet. Diese Zahl kann man auch benutzen, um die anderen Querschnittsverhältnissen entsprechenden Widerstandscoefficienten zu bestimmen. Setzen wir allgemein

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2,$$

so erhalten wir für den beobachteten Fall:

$$\frac{F_1}{F} = 0{,}381, \text{ und } \zeta = \left(\frac{1}{0{,}381\,\alpha} - 1\right)^2 = 11,$$

daher

$$\alpha = \frac{1}{0{,}381\,(1 + \sqrt{11})} = \frac{1}{4{,}317 \,.\, 0{,}381} = 0{,}608$$

und endlich allgemein der Widerstandscoefficient:

Digitized by Google

$$\zeta = \left(\frac{F}{0{,}608\,F_1} - 1\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Ist z. B. der Querschnitt der Apertur die Hälfte von dem der Röhre, so fällt hiernach der Widerstandscoefficient

$$= (1{,}645\,.\,2 - 1)^2 = 2{,}29^2 = 5{,}24$$

aus.

Bei dem **Klappenventile** war das Querschnittsverhältniß zwischen der Apertur und der Röhre, d. i. $\frac{F_1}{F}$, $= 0{,}535$; wie aber die Widerstandscoefficienten mit der Größe der Eröffnung abnehmen, führt folgende Tabelle vor Augen.

**Tabelle**

der Widerstandscoefficienten für die Ventilklappe.

| Oeffnungswinkel | $15^0$ | $20^0$ | $25^0$ | $30^0$ | $35^0$ | $40^0$ | $45^0$ | $50^0$ | $55^0$ | $60^0$ | $65^0$ | $70^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstandscoefficient | 90 | 62 | 42 | 30 | 20 | 14 | 9,5 | 6,6 | 4,6 | 3,2 | 2,3 | 1,7 |

Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die Widerstandscoefficienten für Klappen auch dann noch annähernd berechnen, wenn das Querschnittsverhältniß ein anderes sein sollte. Es ist derselbe Weg zu betreten, welchen man bei den Kegelventilen verfolgt hat.

**Beispiel.** Eine Druckpumpe liefert bei jedem Niedergange des Kolbens in 4 Secunden 5 Cubikfuß Wasser, die Weite des Steigrohres, worin das kegelförmige Steigventil sitzt, beträgt 6 Zoll, die innere Weite des Ventilringes, $3\frac{1}{2}$ Zoll und der größte Ventildurchmesser $4\frac{1}{2}$ Zoll, welchen Widerstand hat das Wasser beim Durchgange durch dieses Ventil zu überwinden? Das Querschnittsverhältniß für die Apertur ist

$$\left(\frac{3{,}5}{6}\right)^2 = (7/12)^2 = 0{,}34,$$

und das Verhältniß der ringförmigen Verengung zum Querschnitte des Rohres ist

$$= 1 - \left(\frac{4{,}5}{6}\right)^2 = 1 - (3/4)^2 = 0{,}44,$$

daher das mittlere Querschnittsverhältniß

$$\frac{F_1}{F} = \frac{0{,}34 + 0{,}44}{2} = 0{,}39$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient

$$\zeta = \left(\frac{1{,}645}{0{,}39} - 1\right)^2 = 3{,}22^2 = 10{,}4.$$

Die Geschwindigkeit des Wassers beträgt

$$v = \frac{5}{4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1/2)^2} = \frac{20}{\pi} = 6{,}37 \text{ Fuß},$$

Digitized by Google

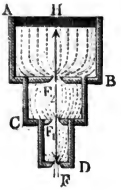
die Geschwindigkeitshöhe $= 0{,}649$ Fuß, und folglich die Widerstandshöhe $= 10{,}4 \cdot 0{,}649 = 6{,}75$ Fuß. Die in der Secunde gehobene Wassermenge wiegt $^5/_4 \cdot 61{,}75 = 77{,}2$ Pfund; daher ist die mechanische Arbeit, welche der Durchgang des Wassers durch das Ventil in eben dieser Zeit consumirt:

$$= 6{,}75 \cdot 77{,}2 = 521 \text{ Fußpfund.}$$

**Zusammengesetzte Gefässe.** Die vorstehenden Lehren über den Widerstand des Wassers beim Durchgange desselben durch Verengungen finden ihre Anwendung auch noch bei dem Ausflusse durch zusammengesetzte Gefäße. Der in Fig. 775 abgebildete Apparat $AD$ ist durch zwei, die Mündungen $F_1$ und $F_2$ enthaltende Scheidewände abgetheilt und bildet deshalb drei communicirende Gefäße. Wären die Scheidewände nicht vorhanden und die Kanten bei den Uebergängen aus einem Gefäße in das andere abgerundet, so hätte man, wie bei einem einfachen Gefäße, die Ausflußgeschwindigkeit durch $F$:

§. 446

Fig. 775.




$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta_0}},$$

insofern $h$ die Tiefe $FH$ der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und $\zeta_0$ den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Ausflußöffnung $F$ bezeichnen.

Da aber nach dem Durchgange des Wassers durch die Mündungen $F_1$ und $F_2$ die Querschnitte $\alpha F_1$ und $\alpha F_2$ plötzlich in die Querschnitte $G$ und $G_1$ der Gefäße $CD$ und $BC$ übergehen, und nach §. 437 die daraus erwachsenden Widerstände

$$\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

und

$$\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{\alpha F_2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

betragen, so hat man

$$(1+\zeta_0)\frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left[1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit

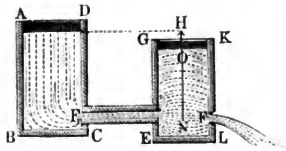
$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2}}$$

zu setzen.

Digitized by Google

Bei dem zusammengesetzten Ausflußapparate, welchen Fig. 776 repräsentirt, findet ganz dasselbe Verhältniß statt, nur ist hier vielleicht noch die Reibung des Wassers in dem Communicationsrohre $CE$ zu berücksichtigen. Ist $l$ die Länge und $d$ die Weite dieses Rohres, ferner $\xi$ der Reibungscoefficient, und $v_1$ die Geschwindigkeit des Wassers in demselben, so hat man die Höhe, welche das Wasser beim Uebergange von $AC$ nach $GL$ verliert:

Fig. 776.




$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \xi \frac{l}{d}\right] \frac{v_1^2}{2g},$$

oder, da die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{\alpha F}{F_1} v$ zu setzen ist,

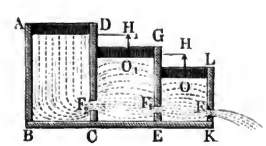
$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \xi \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Zieht man nun diese Höhe von der ganzen Druckhöhe $h$ ab, so bleibt die Druckhöhe im zweiten Gefäße, $h_2 = h - h_1$ und daher die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{1+\zeta_0}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \xi \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2}}.$$

Diese Bestimmung wird bei dem Apparate, welchen Fig. 777 repräsentirt, sehr einfach, weil man die Querschnitte $G$, $G_1$, $G_2$ der Gefäße unendlich groß setzen kann in Ansehung der Mündungsquerschnitte $F$, $F_1$, $F_2$. Es ist daher die erste Niveaudifferenz $OH$ oder Widerstandshöhe für den Durchgang durch $F_1$:

Fig. 777.




$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und ebenso die zweite Niveaudifferenz $O_1 H_1$ oder die Widerstandshöhe für den Durchgang durch $F_2$:

$$h_2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wofern nur $\alpha$, $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Contractionscoefficienten für die Mündungen $F$, $F_1$ und $F_2$ bezeichnen. Hiernach folgt:

Digitized by Google

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\alpha F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}.$$

Es iſt leicht zu ermeſſen, daß zuſammengeſetzte Ausflußbehälter weniger Waſſer liefern, als einfache unter übrigens gleichen Verhältniſſen.

**Beiſpiel.** Wenn bei dem Apparate in Fig. 776 die totale Druckhöhe oder die Tiefe des Mittelpunktes der Mündung $F$ unter dem Waſſerſpiegel des erſten Gefäßes, $= 6$ Fuß beträgt, die Mündung 8 Zoll breit und 4 Zoll hoch, der die beiden Reſervoirs verbindende Lutten aber 10 Fuß lang, 12 Zoll breit und 6 Zoll hoch iſt, welches Ausflußquantum wird dieſes Reſervoir geben?

Die mittlere Weite des Luttens iſt

$$d = \frac{4 \,.\, 1 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 1{,}5} = \tfrac{2}{3} \text{ Fuß, daher } \frac{l}{d} = \frac{3 \,.\, 10}{2} = 15,$$

ſetzen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}025$, ſo folgt:

$$\zeta \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \;\; 15 = 0{,}375;$$

hierzu den Widerſtandscoefficienten $\zeta_0 = 0{,}505$ für den Eintritt in prismatiſche Röhren geſetzt, erhält man:

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \, \frac{l}{d} = 1 + 0{,}505 + 0{,}375 = 1{,}88.$$

Da $\frac{\alpha F}{F_1} = \frac{0{,}64 \,.\, 8 \,.\, 4}{12 \,.\, 6} = 0{,}2845$, ſo folgt der Widerſtandscoefficient für den ganzen Lutten, $= 1{,}88 \,.\, 0{,}2845^2 = 0{,}152$, und den Widerſtandscoefficienten für den Durchgang durch $F$, $= 0{,}07$ geſetzt, erhält man die Ausflußgeſchwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}07 + 0{,}152}} = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}222}} = 17{,}52 \text{ Fuß}.$$

Der contrahirte Querſchnitt iſt $0{,}64 \,.\, 1 \,.\, \frac{1}{2} = 0{,}32$ Quadratfuß, daher das Ausflußquantum:

$$Q = 0{,}32 \,.\, 17{,}52 = 5{,}61 \text{ Cubikfuß}.$$

Digitized by Google

## Fünftes Capitel.

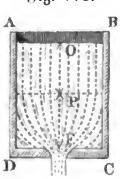
## Von dem Ausfluſſe des Waſſers unter veränderlichem Drucke.

§. 447 **Prismatiſche Gefäſſe.** Erhält ein Gefäß, aus welchem das Waſſer durch eine Seiten- oder Bodenöffnung ausfließt, von einer anderen Seite her keinen Zufluß, ſo tritt ein allmäliges Sinken des Waſſerſpiegels und endlich Ausleerung des Gefäßes ein. Wenn ferner die Zuflußmenge $Q$ größer oder kleiner iſt als das Ausflußquantum $\mu F\sqrt{2gh}$, ſo ſteigt oder ſinkt der Waſſerſpiegel, bis die Druckhöhe $h = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu F}\right)^2$ wird, und nach dieſem bleiben Druckhöhe und Ausflußgeſchwindigkeit unveränderlich. Unſere Aufgabe iſt nun, zu ermitteln, in welcher Abhängigkeit die Zeit, das Steigen oder Sinken des Waſſers und, nach Befinden, das Sichleeren von Gefäßen bei gegebener Form und Größe zu einander ſtehen.

Den einfachſten Fall bietet der Ausfluß aus einem prismatiſchen Gefäße dar, wenn derſelbe durch eine Oeffnung im Boden erfolgt, und wenn dabei kein Zufluß von oben ſtatt hat. Iſt $x$ die veränderliche Druckhöhe $FP$, $F$ der Inhalt der Mündung und $G$ der Querſchnitt des Gefäßes $AC$, Fig. 778, ſo hat man die theoretiſche Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \sqrt{2gx},$$

Fig. 778.




die theoretiſche Geſchwindigkeit des ſinkenden Waſſerſpiegels:

$$= \frac{F}{G}v = \frac{F}{G}\sqrt{2gx}, \text{ und die effective:}$$

$$v_1 = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gx}.$$

Anfänglich iſt $x = FO = h$, und am Ende des Ausfluſſes, $x = 0$, alſo die Anfangsgeſchwindigkeit iſt:

$$c = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh}$$

und die Endgeſchwindigkeit: $c_1 = 0$.

Man erſieht aus der Formel

$$v_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 gx},$$

daß die Bewegung des Waſſerſpiegels gleichförmig verzögert und daß das

Digitized by Google

Verzögerungsmaß $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g$ ist; man weiß daher auch (§. 14), daß diese Geschwindigkeit = Null wird und mithin der Ausfluß beendigt ist nach der Zeit

$$t = \frac{v_1}{p} = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g = \frac{G}{\mu F}\sqrt{\frac{2gh}{g^2}},$$

d. i.

$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}.$$

Auch kann man

$$t = \frac{2Gh}{\mu F\sqrt{2gh}} = \frac{2Gh}{Q} = \frac{2V}{Q}$$

setzen, und diesemnach annehmen, daß zum Ausflusse der Wassermenge $V = Gh$ durch die Bodenöffnung $F$ bei einer von $h$ bis 0 abnehmenden Druckhöhe doppelt soviel Zeit nothwendig ist als bei unveränderlicher Druckhöhe.

Da der Ausflußcoefficient $\mu$ nicht ganz constant ist, sondern bei Abnahme des Druckes größer wird, so muß man bei Berechnungen dieser Art einen mittleren Werth dieses Coefficienten einführen.

Beispiel. In welcher Zeit leert sich ein parallelepipedischer Kasten von 14 Quadratfuß Querschnitt durch eine kreisrunde Bodenöffnung von 2 Zoll Weite, wenn die anfängliche Druckhöhe 4 Fuß beträgt? Theoretisch wäre die Ausflußzeit:

$$t = \frac{2.14\sqrt{4}}{7{,}906 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\frac{1}{6})^2} = \frac{2.14.144.2}{7{,}906\,.\,\pi} = \frac{8064}{7{,}906\,.\,\pi} = 324'',7 = 5 \text{ Min. } 24{,}7 \text{ Sec.}$$

Am Ende der halben Ausflußzeit ist die Druckhöhe $= (\frac{1}{2})^2 . h = \frac{1}{4} . 4 = 1$ Fuß; nun ist der Ausflußcoefficient, welcher der Druckhöhe = 1 Fuß entspricht, für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}613$, daher läßt sich die effective Ausflußzeit $= \frac{324'',7}{0{,}613} = 529'',6 = 8$ Minuten 49,6 Secunden setzen.

**Communicirende Gefässe.** Da bei einer anfänglichen Druckhöhe $h_1$ §. 448 die Ausflußzeit

$$t_1 = \frac{2G\sqrt{h_1}}{\mu F\sqrt{2g}}$$

und bei einer anfänglichen Druckhöhe $h_2$ diese Zeit

$$t_2 = \frac{2G\sqrt{h_2}}{\mu F.\sqrt{2g}}$$

ist, so folgt durch Subtraction die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus $h_1$ und $h_2$ übergeht, oder der Wasserspiegel um $h_1 - h_2$ sinkt:

$$t = \frac{2G}{\mu F.\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

Digitized by Google

oder für Fußmaß:

$$t = 0{,}253 \frac{G}{\mu F} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Es ist umgekehrt die einer gegebenen Ausflußzeit entsprechende Senkung $s = h_1 - h_2$ des Wasserspiegels durch die Formel:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu \sqrt{2g} . F}{2G} t\right)^2$$

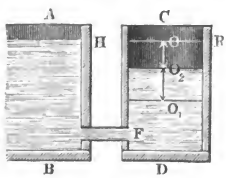
oder

$$s = \frac{\mu \sqrt{2g} . Ft}{G} \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu \sqrt{2g}}{4G} . Ft\right)$$

zu bestimmen.

Dieselben Formeln finden auch dann noch ihre Anwendung, wenn ein Gefäß $CD$, Fig. 779, durch ein anderes Gefäß $AB$, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Ist der Querschnitt der Communicationsröhre oder der Mündung, $= F$, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes, $= G$, und der anfängliche Niveauabstand $O O_1$ zwischen beiden Wasserspiegeln, $= h$, so hat man, da hier der Wasserspiegel $O_1$ im zweiten Gefäße gleichförmig verzögert steigt, ebenfalls die Zeit zum Füllen oder die Zeit, innerhalb welcher der zweite Wasserspiegel in das Niveau $HR$ des ersten kommt:

Fig. 779.




$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F . \sqrt{2g}},$$

und ebenso die Zeit, in welcher der Niveauabstand $O_1 O = h_1$ in $O_2 O = h_2$ übergeht, also der Wasserspiegel um $O_1 O_2 = s = h_1 - h_2$ steigt:

$$t = \frac{2G}{\mu F . \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Beispiele. 1) Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in dem Gefäße des letzten Beispieles (§. 447) binnen 2 Minuten? Es ist

$$h_1 = 4, \; t = 2 . 60 = 120, \; \frac{F}{G} = \frac{\pi}{14 . 144},$$

und nimmt man noch $\mu = 0{,}605$ an, so folgt:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \mu . \sqrt{2g} . \frac{Ft}{2G}\right)^2 = \left(2 - \frac{0{,}605 . 7{,}906 . \pi . 120}{2 . 14 . 144}\right)^2$$

$$= \left(2 - 0{,}605 . 7{,}906 . \frac{5 . \pi}{168}\right)^2 = 1{,}5523^2 = 2{,}412 \text{ Fuß},$$

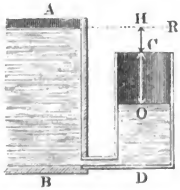
und die gesuchte Senkung:

$$s = 4 - 2{,}412 = 1{,}588 \text{ Fuß}.$$

Digitized by Google

2) Welche Zeit braucht das Wasser, um in der 18 Zoll weiten Röhre $CD$, Fig. 780, zum Ueberlaufen zu gelangen, wenn es mit einem Gefäße $AB$ durch eine kurze, $1\frac{1}{2}$ Zoll weite Röhre communicirt, und der steigende Wasserspiegel $G$ anfänglich um $OH = 6$ Fuß unter dem unveränderlichen Wasserspiegel $A$, und um $OC = 4\frac{1}{2}$ Fuß unter dem Kopfe $C$ der Röhre steht? Es ist in

Fig. 780.




$$t = \frac{2\,G}{\mu\,\sqrt{2g}\,.\,F}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

$$h_1 = 6,\ h_2 = 6 - 4{,}5 = 1{,}5,$$

$$\frac{G}{F} = \left(\frac{18}{1{,}5}\right)^2 = 144 \text{ und } \mu = 0{,}81$$

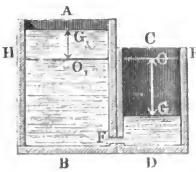
zu setzen, weshalb folgt:

$$t = \frac{2{,}144}{0{,}81\,.\,7{,}906}\,(\sqrt{6} - \sqrt{1{,}5}) = \frac{288\,.\,1{,}2248}{0{,}81\,.\,7{,}906} = 55{,}1 \text{ Secunden.}$$

§. 449

Wenn das erste Gefäß $AB$, Fig. 781, aus welchem das Wasser in das andere läuft, keinen Zufluß hat, und sein Querschnitt $G_1$ auch nicht als unendlich groß angesehen werden kann in Hinsicht auf den Querschnitt $G$ des folgenden Gefäßes $CD$, so hat man die Bestimmung zu modificiren. Ist der veränderliche Abstand $G_1\,O_1$ des ersten Wasserspiegels von dem Niveau $HR$, in welchem beide Wasserspiegel bei Beendigung des Ausflusses stehen, $= x$, und der Abstand $G\,O$ des zweiten Wasserspiegels von eben dieser Ebene, $= y$, so hat man die veränderliche Druckhöhe $= x + y$ und die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g\,(x + y)}$, oder, da das Wasserquantum $G_1\,x = G\,y$ ist,

Fig. 781.




$$v = \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Wasserspiegel im zweiten Gefäße steigt, ist nun:

$$v_1 = \frac{\mu\,F}{G}\,v = \frac{\mu\,F}{G}\,\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y},$$

folglich die entsprechende Retardation:

$$p = \left(\frac{\mu\,F}{G}\right)^2\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)g$$

und die Ausflußzeit:

Digitized by Google

$$t = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2g\left(1+\frac{G}{G_1}\right)}\,y : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2\left(1+\frac{G}{G_1}\right)g$$

$$= \frac{2G\sqrt{y}}{\mu F\sqrt{2g\left(1+\frac{G}{G_1}\right)}}.$$

Führen wir ſtatt $x$ und $y$ den anfänglichen Niveauabſtand $h$ ein, ſetzen wir alſo $x + y = h$, oder $\left(1+\frac{G}{G_1}\right)y = h$, ſo erhalten wir:

$$y = \frac{h}{1+\frac{G}{G_1}},$$

und die Zeit, binnen welcher die beiden Waſſerſpiegel in ein Niveau kommen:

$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\left(1+\frac{G}{G_1}\right)\sqrt{2g}} = \frac{2GG_1\sqrt{h}}{\mu F(G+G_1)\sqrt{2g}}.$$

Die Zeit, innerhalb welcher der Niveauabſtand von $h$ auf $h_1$ ſinkt, iſt dagegen:

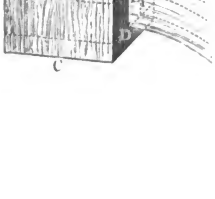
$$t = \frac{2GG_1(\sqrt{h}-\sqrt{h_1})}{\mu F(G+G_1)\sqrt{2g}}.$$

Beiſpiel. Wenn der Querſchnitt $G_1$ des Kaſtens, aus welchem das Waſſer zufließt, 10 Quadratfuß und der Querſchnitt $G$ des Kaſtens, welcher das Waſſer aufnimmt, 4 Quadratfuß mißt, wenn ferner der anfängliche Niveauabſtand $h$ zwiſchen beiden Waſſerſpiegeln 3 Fuß beträgt und die cylindriſche Communicationsröhre 1 Zoll Weite hat, ſo iſt die Zeit, in welcher das Waſſer in beiden Gefäßen auf gleiches Niveau kommt:

$$t = \frac{2.10.4.\sqrt{3}}{0{,}82.7{,}906\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{14}{144}} = \frac{320.72.\sqrt{3}}{0{,}82.7{,}906.7\,\pi} = 280 \text{ Secunden}.$$

§. 450 **Wandeinſchnitt.** Fließt das Waſſer durch einen Wandeinſchnitt oder Ueberfall $DE$ aus einem prismatiſchen Gefäße $ABC$, Fig. 782, welches keinen Zufluß erhält, ſo iſt die Ausflußzeit auf folgende Weiſe zu ermitteln. Bezeichnen wir den Querſchnitt des Gefäßes durch $G$, die Breite $EF$ des Einſchnittes durch $b$ und die Höhe $DE$ deſſelben durch $h$, und theilen wir die ganze Ausflußmündung durch Horizontalen in lauter ſchmale Streifen, jeden von der Breite $b$ und Höhe $\frac{h}{n}$. Bei conſtantem Drucke iſt die Ausflußmenge auf die Secunde bezogen,

Fig. 782.




Digitized by Google

$$Q = {}^2/_3\,\mu b\sqrt{2gh^3},$$

dividiren wir diese in den Inhalt $\frac{Gh}{n}$ einer Wasserschicht, so erhalten wir die entsprechende Ausflußzeit:

$$\tau = \frac{Gh}{{}^2/_3\,\mu nb\sqrt{2gh^3}},$$

wofür wir $\frac{3\,Gh}{2\mu nb\sqrt{2g}}\cdot h^{-3/2}$ schreiben wollen.

Um nun die Ausflußzeit $t$ für ein Wasserquantum $G(h-h_1)$ zu erhalten, oder um die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher der Wasserstand über der Schwelle, von $DE = h$ auf $DE_1 = h_1$ herabsinkt, setzen wir $h_1 = \frac{m}{n}h$, lassen also $h_1$ aus $m$ Theilen bestehen, führen nun in der letzten Gleichung statt $h^{-3/2}$, successiv

$$\left(\frac{m}{n}h\right)^{-3/2},\ \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-3/2},\ \left(\frac{m+2}{n}h\right)^{-3/2}\cdots\left(\frac{nh}{n}\right)^{-3/2}$$

ein, und addiren endlich die erhaltenen Ergebnisse. Auf diesem Wege bekommen wir die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{3\,Gh}{2\mu nb\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{mh}{n}\right)^{-3/2}+\left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-3/2}+\cdots+\left(\frac{nh}{n}\right)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{3\,Gh}{2\mu nb\sqrt{2g}}\cdot\frac{h^{-3/2}}{n^{-3/2}}\left[m^{-3/2}+(m+1)^{-3/2}+\cdots+n^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{3\,Gh^{-1/2}}{2\mu n^{-1/2}b\sqrt{2g}}\left[(1^{-3/2}+2^{-3/2}+3^{-3/2}+\cdots+n^{-3/2})\right.$$
$$\left.-(1^{-3/2}+2^{-3/2}+3^{-3/2}+\cdots+m^{-3/2})\right],$$

oder nach dem „Ingenieur“, Arithmetik Seite 88:

$$t = \frac{3\,Gh^{-1/2}}{2\mu n^{-1/2}b\sqrt{2g}}\left(\frac{n^{-3/2+1}}{-{}^3/_2+1}-\frac{m^{-3/2+1}}{-{}^3/_2+1}\right)$$

$$= \frac{3\,Gn^{1/2}}{2\mu b\sqrt{2gh}}\cdot 2\,(m^{-1/2}-n^{-1/2}) = \frac{3\,G}{\mu b\sqrt{2gh}}\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{-1/2}-1\right]$$

$$= \frac{3\,G}{\mu b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{m}{n}h\right)^{-1/2}-h^{-1/2}\right] = \frac{3\,G}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}-\frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Setzt man $h_1 = 0$, so erhält man $\frac{1}{\sqrt{h_1}}$ und also auch $t = \infty$; damit also das Wasser bis zur Schwelle abläuft, ist eine unendliche Zeit nothwendig.

Beispiel. Wenn das Wasser durch einen Wandeinschnitt von 8 Zoll Breite aus einem Reservoir von 110 Fuß Länge und 40 Fuß Breite ausfließt, in wel-



Digitized by Google

cher Zeit geht der Wasserstand von 15 Zoll über der Ueberfallschwelle in den Wasserstand von 6 Zoll über? Es ist:

$$t = \frac{3.110.40}{\mu . {}^2/_3 . 7{,}906}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}5}} - \frac{1}{\sqrt{1{,}25}}\right) = \frac{19800}{\mu . 7{,}906}\left(\sqrt{2} - \sqrt{{}^4/_5}\right)$$

$$= \frac{19800}{7{,}906\,\mu}\,(1{,}4142 - 0{,}8944) = \frac{19800 . 0{,}5198}{7{,}906\,\mu} = \frac{1302}{\mu}\ \text{Secunden.}$$

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}60$ an, so folgt die effective Ausflußzeit:

$$t = \frac{1302}{0{,}6} = 2170\ \text{Secunden} = 36\ \text{Minuten}\ 10\ \text{Secunden.}$$

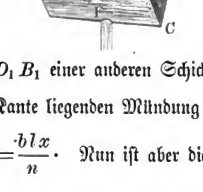
Anmerkung. Für eine rectanguläre Seitenöffnung läßt sich annähernd setzen:

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}}\left((\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) - \frac{a^2}{288}\,(\sqrt{h_1{}^{-3}} - \sqrt{h_2{}^{-3}})\right),$$

und es bezeichnen $F$ und $G$ die Querschnitte der Oeffnung und des Gefäßes, $a$ die Oeffnungshöhe, $h_1$ die Druckhöhe am Anfange, sowie $h_2$ die am Ende des Ausflusses. Wird $h_2 = \frac{a}{2}$, so geht die Oeffnung in einen Wandeinschnitt über und es ist nun die Formel für diesen anzuwenden.

§. 451 **Keil- und pyramidenförmige Gefässe.** Bildet das Ausflußgefäß $ABF$, Fig. 783, ein horizontales, dreiseitiges Prisma, so findet man die Ausflußzeit auf folgende Weise. Theilen wir die Höhe $CE = h$ in $n$ gleiche Theile und legen wir durch die Theilpunkte Horizontalebenen, so zerlegen wir das ganze Wasserquantum in lauter gleich dicke Schichten von gleicher Länge $AD = l$ und von oben nach unten zu abnehmenden Breiten. Ist die Breite $DB$ der oberen Schicht, $= b$, so hat man die Breite $D_1B_1$ einer anderen Schicht, welche um $CE_1 = x$ über der in der unteren Kante liegenden Mündung $F$ steht, $y = \frac{x}{h}b$, und ihr Volumen $= yl \cdot \frac{h}{n} = \frac{blx}{n}$. Nun ist aber die Ausflußmenge, auf die Zeiteinheit bezogen:

Fig. 783.




$$Q = \mu F \sqrt{2gx},$$

daher folgt dann die kleine Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um $\frac{h}{n}$ sinkt,

$$\tau = \frac{bl}{n}x : \mu F \sqrt{2gx} = \frac{bl}{n\mu F\sqrt{2g}} \cdot x^{1/2}.$$

Da endlich die Summe aller $x^{1/2}$, von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{nh}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{1/2} \cdot \frac{n^{3/2}}{3/2} = {}^2/_3\, n h^{1/2}$$

Digitized by Google

ist, so hat man die Zeit zum Ausflusse des ganzen Wasserprisma's:

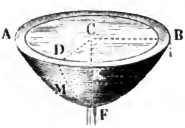
$$= \frac{bl}{n\mu F\sqrt{2g}} \cdot {}^2/_3\, nh^{1/2} = {}^2/_3\, \frac{bl}{\mu F\sqrt{2g}} \cdot h^{1/2} = {}^4/_3\, \frac{{}^1/_2\, blh}{\mu F\sqrt{2gh}}, \text{ d. i.}$$

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{\mu F c},$$

wenn $V = {}^1/_2\, blh$ das ganze Wasservolumen und $c = \sqrt{2gh}$ die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit ist. Es braucht also hier das Wasser um $^1/_3$ mehr Zeit, als wenn die Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich $c$ wäre.

Bildet das Gefäß $ABF$, Fig. 784, ein aufrechtstehendes Paraboloid, so hat man für das Verhältniß zwischen den Halbmessern $KM = y$ und $CD = b$,

Fig. 784.




$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}},$$

und daher das Verhältniß des Horizontalschnittes $G_1$ durch $K$ zur Grundfläche $ADB = G$:

$$\frac{G_1}{G} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}, \text{ folglich:}$$

$$G_1 = \frac{Gx}{h},$$

und den Inhalt einer Wasserschicht:

$$= G_1 \cdot \frac{h}{n} = \frac{Gx}{n}.$$

Die vollständige Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem für das dreiseitige Prisma gefundenen gestattet daher auch hier

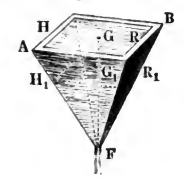
$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{{}^1/_2\, Gh}{\mu F\sqrt{2gh}}$$

zu setzen, oder, da hier $V = {}^1/_2\, Gh$ ist (§. 124, Beisp.), auch

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{\mu F c}.$$

Diese Formel läßt sich in vielen anderen Fällen zur angenäherten Bestimmung der Ausflußzeit namentlich auf das Ausleeren von Teichen anwenden. Sie gilt überhaupt auch in allen den Fällen, wenn die Horizontalschnitte wie die Abstände von dem Boden wachsen.

Fig. 785.




Hat man es endlich mit einem pyramidenförmigen Gefäße $ABF$, Fig. 785, zu thun, so ist

$G_1 : G = x^2 : h^2$, und daher $G_1 = \frac{Gx^2}{h^2}$,

ferner der Inhalt der Schicht $H_1 R_1$:

$$\frac{G_1 h}{n} = \frac{Gx^2}{nh},$$



Digitized by Google

und die Zeit zum Ausflusse derselben:

$$\tau = \frac{G x^2}{n h} : \mu F \sqrt{2 g x} = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da aber die Summe aller $x^{3/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{n h}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{n^{5/2}}{5/2} = {}^2/_5\, n\, h^{3/2}$$

ist, so folgt die Zeit zum Leeren der ganzen Pyramide:

$$t = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot {}^2/_5\, n h^{3/2} = {}^2/_5 \cdot \frac{G h^{1/2}}{\mu F \sqrt{2 g}} = {}^6/_5 \cdot \frac{{}^1/_3\, G h}{\mu F \sqrt{2 g h}},$$

oder ${}^1/_3\, G h = V$ gesetzt,

$$t = {}^6/_5 \cdot \frac{V}{\mu F c}.$$

Da bei diesem Ausflusse die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit von $c$ allmälig bis Null abnimmt, so ist die Ausflußzeit ${}^1/_5$ größer als wenn die Geschwindigkeit unveränderlich $= c$ bliebe.

Beispiel. In welcher Zeit wird sich ein Teich, dessen Wasserspiegel 765000 Quadratfuß Inhalt hat, leeren, wenn das in der tiefsten Stelle einmündende Fischgerinne 15 Fuß unter dem Wasserspiegel steht und eine Röhre von 15 Zoll Weite und 50 Fuß Länge bildet? Theoretisch ist die Ausflußzeit:

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{F \sqrt{2 g h}} = {}^4/_3 \cdot {}^1/_2 \cdot \frac{765000 \,.\, 15}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 7{,}906 \sqrt{15}} = \frac{19584000}{\pi \,.\, 7{,}906 \sqrt{15}}$$

$= 203586$ Secunden.

Nun ist aber der Widerstandscoefficient für den Eintritt in das innen etwa um den Winkel von 45° abgeschrägte Teichgerinne:

$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}327 \text{ (s. §. 423)} = 0{,}832,$$

und der Reibungswiderstand für dieses Gerinne:

$$= 0{,}025 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 g} = 0{,}025 \cdot \frac{50}{5/4} \cdot \frac{v^2}{2 g} = \frac{v^2}{2 g};$$

daher folgt der vollständige Ausflußcoefficient für dasselbe:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}832}} = 0{,}594,$$

und die in Frage stehende Ausflußzeit:

$t = 203586 : 0{,}594 = 342670$ Secunden $= 95$ Stunden 11 Minuten.

§. 452 **Kugel- und obeliskenförmige Gefässe.** Mit Hülfe der im letzten Paragraphen aufgefundenen Formeln kann man nun auch die Ausflußzeiten für viele andere Gefäße, z. B. für kugel-, obelisken-, pyramidenförmige u. s. w. finden.

Fig. 786.




1) Für das Leeren eines gefüllten Kugelsegmentes $AFB$, Fig. 786, dessen Halbmesser $CA = CF = r$, und Höhe $FG = h$ ist, erhält man:

Digitized by Google

$$t = {}^1/_3 \frac{\pi r h^2}{\mu F \sqrt{2gh}} - {}^2/_5 \cdot \frac{\pi h^3}{\mu F \sqrt{2gh}} = {}^2/_{15}\, \pi \frac{(10r - 3h) h^{3/2}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

also für das Leeren einer vollen Kugel, wo $h = 2r$ ist,

$$t = \frac{16 \pi r^2 \sqrt{2r}}{15 \mu F \sqrt{2g}},$$

und für das einer halben Kugel, wo $h = r$,

$$t = \frac{14 \pi r^2 \sqrt{r}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Es ist nämlich hier die der Tiefe $FG_1 = x$ entsprechende Horizontalschicht $H_1 R_1 = G_1$:

$$= \pi x (2r - x) \cdot \frac{h}{n} = \frac{2 \pi r h x}{n} - \frac{\pi h x^2}{n},$$

folglich bei der Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, die Zeit zum Ausfließen derselben

$$\tau = \frac{2 \pi r h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{1/2} - \frac{\pi h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da der erste Theil dieses Ausdruckes mit der Formel für das Leeren des prismatischen und der zweite Theil mit derjenigen für das Leeren des pyramidalen Gefäßes übereinstimmt, wenn man nur das eine Mal $2 \pi r h$ statt $bl$ und das zweite Mal $\pi h^2$ statt $G$ setzt, so erhält man mit Hülfe der Differenz für die im vorigen Paragraphen gefundenen Ausleerungszeiten eines prismatischen und eines pyramidalen Gefäßes:

$$t = {}^2/_3 \cdot \frac{blh}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

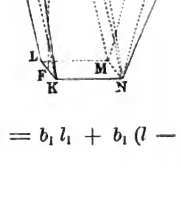
und

$$t = {}^2/_5 \cdot \frac{Gh}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

auch die oben angegebene Ausleerungszeit des Kugelsegmentes.

2) Für das obelisken- oder pontonförmige Gefäß $ACK$, Fig. 787, lassen sich, da dasselbe aus einem Parallelepipede $AEK$, aus zwei Prismen $BEN$ und $DEN$ und einer Pyramide $CEN$ (vergl. §. 121) zusammengesetzt ist, die obigen Formeln ebenfalls anwenden. Es sei $b$ die obere Breite $AD$, $b_1$ die untere Breite $KL$, ferner $l$ die obere Länge $AB$ und $l_1$ die untere Länge $KN$, und endlich $h$ die Höhe $OF$ des Gefäßes. Dann hat man für die Fläche des Wasserspiegels $AC$:

Fig. 787.

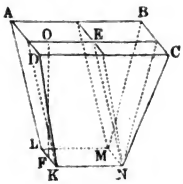



$$bl = b_1 l_1 + b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1) + (l - l_1)(b - b_1),$$

Digitized by Google

und davon bildet $b_1 l_1$ die Basis des Parallelepipedes $AEK$; ferner sind $b_1 (l - l_1)$ und $l_1 (b - b_1)$ die Grundflächen der beiden Prismen $BEN$ und $DEK$ und es ist $(l - l_1)(b - b_1)$ die Basis der Pyramide $CEN$. Nun ist aber die Ausflußzeit für das Parallelepiped:

Fig. 788.




$$t_1 = \frac{2 b_1 l_1 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

ferner die Ausflußzeit für die beiden dreiseitigen Prismen:

$$t_2 = {}^2/_3 \frac{[b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1)] \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

und endlich die Ausflußzeit für die Pyramide:

$$t_3 = {}^2/_5 \frac{(l - l_1)(b - b_1) \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}};$$

es folgt daher die Ausflußzeit für das ganze Gefäß:

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$= [30 b_1 l_1 + 10 b_1 (l - l_1) + 10 l_1 (b - b_1) + 6 (l - l_1)(b - b_1)] \frac{\sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$$

$$= [3 b l + 8 b_1 l_1 + 2 (b l_1 + b_1 l)] \frac{2 \sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Ist $\frac{b_1}{l_1} = \frac{b}{l}$, so hat man es mit einer abgekürzten Pyramide zu thun. Setzen wir für diese die Grundfläche $bl = G$ und die Grundfläche $b_1 l_1 = G_1$, so erhalten wir:

$$t = (3G + 8 G_1 + 4 \sqrt{G G_1}) \frac{2 \sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Formel auch für jede drei- und vielseitige Pyramide gilt.

Beispiel. Ein obeliskenförmiger Wasserkasten ist oben 5 Fuß lang und 3 Fuß breit, und 4 Fuß tiefer, nämlich im Niveau der 1 Zoll weiten und 3 Zoll langen horizontalen Ansatzröhre, 4 Fuß lang und 2 Fuß breit, wie viel Zeit braucht das den Kasten anfangs ganz füllende Wasser, um $2\frac{1}{2}$ Fuß zu sinken? Die Zeit zum Leeren ist, $\mu = 0{,}815$ angenommen:

$$t = [8.4.2 + 3.5.3 + 2 (3.4 + 5.2)] \frac{2 \sqrt{4}}{15.0{,}815 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 . 7{,}906}$$

$$= \frac{153.4.4.144}{15.0{,}815.7{,}906.\pi} = 153 \cdot \frac{2304}{12{,}225.7{,}906\,\pi} = 153.7{,}588 = 1161 \text{ Sec.}$$

Im Niveau $4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ Fuß über der Röhre ist $l = l_1 + {}^3/_8 = 4{}^3/_8$

Digitized by Google

und $b = b_1 + {}^3/_8 = 2{}^3/_8$ Fuß, daher die Zeit zum Leeren, wenn das Gefäß nur bis zu diesem Niveau gefüllt ist,

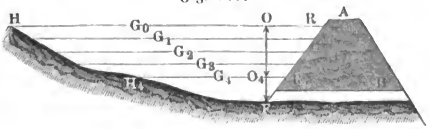
$$t_1 = [8 . 4 . 2 + 3 . {}^{35}/_8 . {}^{19}/_8 + 2\,(2 . {}^{35}/_8 + 4 . {}^{19}/_8)] \cdot \frac{1152\sqrt{1{,}5}}{15 . 0{,}815 . 7906\,\pi}$$

$$= 131{,}672 . 4{,}6465 = 612 \text{ Secunden.}$$

Die Differenz der gefundenen Zeiten giebt die Zeit (549 Secunden), innerhalb welcher der anfänglich bis zum Kopfe des Gefäßes reichende Wasserspiegel um $2{}^1/_2$ Fuß sinkt.

**Ungesetzmässige Gefässe.** Ist die Ausflußzeit für ein ungesetzmäßig geformtes Gefäß $HFR$, Fig. 789, zu finden, so hat man eine §. 453

Fig. 789.




Annäherungsmethode, z. B. die Simpson'sche Regel, anzuwenden. Hat man die ganze Wassermasse in vier gleich hohe Schichten getheilt, und die den Horizontalschnitten $G_0$, $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ entsprechenden Druckhöhen durch $h_0$, $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ bezeichnet, so ergiebt sich die Ausflußzeit durch die Simpson'sche Regel:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\,\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4}}\right).$$

Bei Annahme von sechs Schichten erhält man:

$$t = \frac{h_0 - h_6}{18\,\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{2\,G_4}{\sqrt{h_4}} + \frac{4\,G_5}{\sqrt{h_5}} + \frac{G_6}{\sqrt{h_6}}\right).$$

Das Ausflußquantum ist im ersten Falle:

$$V = \frac{h_0 - h_4}{12}(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + G_4),$$

im zweiten:

$$V = \frac{h_0 - h_6}{18}(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + 2\,G_4 + 4\,G_5 + G_6).$$

Ist die Gestalt und Größe des Ausflußgefäßes nicht bekannt, so kann man durch die in gleichen Zeitintervallen beobachteten Wasserstände $h_0$, $h_1$ u. s. w. die Ausflußmenge $V$ gleichwohl berechnen. Ist $t$ die ganze Ausflußzeit, so hat man bei Boden- und Seitenöffnungen:

$$V = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und für Ueberfälle oder Wandeinschnitte:

$$V = {}^2/_3\,\frac{\mu b t}{12}\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_0^3} + 4\sqrt{h_1^3} + 2\sqrt{h_2^3} + 4\sqrt{h_3^3} + \sqrt{h_4^3}).$$

Digitized by Google

Beispiel. In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel eines Teiches um 6 Fuß, wenn das Teichgerinne einen halben Cylinder von 18 Zoll Weite, 9 Zoll Tiefe und 60 Fuß Länge bildet, und die Wasserspiegel folgende Inhalte haben:

$G_0$, bei 20 Fuß Druckhöhe, $= 600000$ Quadratfuß.
$G_1$, „ 18,5 „ „ $= 495000$ „
$G_2$, „ 17,0 „ „ $= 410000$ „
$G_3$, „ 15,5 „ „ $= 325000$ „
$G_4$, „ 14,0 „ „ $= 265000$ „

Es ist $F = \frac{\pi}{8} \cdot (\frac{3}{2})^2 = \frac{9\pi}{32} = 0{,}8836$ Quadratfuß. Setzen wir, wie im Beispiel zu §. 451, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt, $= 0{,}832$, und den für die Reibung, $= 0{,}025 \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \,.\, 60 \,.\, 1{,}091 = 1{,}6356$, so ist der Ausflußcoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}8 \cdot 2 + 1{,}6365}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}4685}} = 0{,}537,$$

und

$$\mu F \sqrt{2g} = 0{,}537 \,.\, 0{,}8836 \,.\, 7{,}906 = 3{,}7518.$$

Nun hat man:

$$\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} = \frac{600000}{\sqrt{20}} = 134170, \quad \frac{G_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{495000}{\sqrt{18{,}7}} = 115090,$$
$$\frac{G_2}{\sqrt{h_2}} = \frac{410000}{\sqrt{17}} = 99440, \quad \frac{G_3}{\sqrt{h_3}} = \frac{325000}{\sqrt{15{,}5}} = 82550,$$
$$\frac{G_4}{\sqrt{h_4}} = \frac{265000}{\sqrt{14}} = 70830.$$

daher folgt die Ausflußzeit:

$$t = \frac{6}{12 \,.\, 3{,}7518} (134170 + 4 \,.\, 115090 + 2 \,.\, 99440 + 4 \,.\, 82550 + 70830)$$
$$= \frac{1194440}{7{,}5036} = 159190 \text{ Secunden} = 44 \text{ Stunden } 13 \text{ Minuten}.$$

Das Ausflußquantum ist:

$$V = \tfrac{6}{12} \,.\, (600000 + 4 \,.\, 195000 + 2 \,.\, 410000 + 4 \,.\, 325000 + 265000)$$
$$= \frac{4965000}{2} = 2482500 \text{ Cubikfuß}.$$

§ 454 **Zu- und Abfluss.** Erhält das Gefäß während des Ausflusses von unten, noch Zufluß von oben, so wird die Bestimmung der Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel auf eine gewisse Höhe steigt oder sinkt, viel verwickelter, so daß man sich meist mit einer angenäherten Bestimmung begnügen muß. Ist das Zuflußquantum pr. Secunde $Q_1 > \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Steigen, und ist $Q_1 < \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Sinken des Wasserspiegels statt. Uebrigens tritt hier alle Mal Beharrungszustand ein, wenn die Druckhöhe entweder auf $k = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ angewachsen oder dahin herabgesunken ist. Die Zeit $\tau$, innerhalb welcher die veränderliche Druckhöhe $x$ um die kleine Größe $\xi$ wächst, ist bestimmt durch die Gleichung:

Digitized by Google

$$G_1 \xi = Q_1 \tau - \mu F \sqrt{2gx} . \tau,$$

und dagegen die Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um $\xi$ sinkt, durch:

$$G_1 \xi = \mu F \sqrt{2gx} . \tau - Q_1 \tau.$$

Man hat daher im ersten Falle:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{Q_1 - \mu F \sqrt{2gx}},$$

und im zweiten:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{\mu F \sqrt{2gx} - Q_1}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel erhält man so die Ausflußzeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel sinkend aus $G_0$ in $G_1$, $G_2$, ... und die Druckhöhe aus $h_0$ in $h_1$, $h_2$, ... übergeht:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12}\left[\frac{G_0}{\mu F\sqrt{2gh_0} - Q_1} + \frac{4\,G_1}{\mu F\sqrt{2gh_1} - Q_1} + \frac{2\,G_2}{\mu F\sqrt{2gh_2} - Q_1} + \frac{4\,G_3}{\mu F\sqrt{2gh_3} - Q_1} + \frac{G_4}{\mu F\sqrt{2gh_4} - Q_1}\right],$$

oder einfacher, wenn man $\frac{Q_1}{\mu F\sqrt{2g}}$ durch $\sqrt{k}$ bezeichnet,

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\mu F\sqrt{2g}}\left[\frac{G_0}{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2} - \sqrt{k}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3} - \sqrt{k}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4} - \sqrt{k}}\right].$$

Ist das Gefäß prismatisch und hat es den unveränderlichen Querschnitt $G$, so hat man (s. des Verfassers Experimentalhydraulik, §. 9, XII.):

$$t = \frac{2\,G}{\mu F\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k} . \textit{log. nat.}\left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}}\right)\right],$$

für die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus $h$ in $h_1$ übergeht.

Da für $h_1 = k$, $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{0} = \infty$

ausfällt, so folgt, daß der Beharrungszustand erst unendlich spät eintritt.

Bei einem Wandeinschnitte stellt sich folgende Formel heraus:

$$t = \frac{G\,k}{3\,Q_1}\left[\textit{log. nat.}\,\frac{(\sqrt{h} - \sqrt{k})^2\,(h_1 + \sqrt{h_1 k} + k)}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2\,(h_1 + \sqrt{h k} + k)} + \sqrt{12} . \textit{arc.}\left(\textit{tang.} = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})\,\sqrt{12\,k}}{3k + (2\sqrt{h} + \sqrt{k})\,(2\sqrt{h_1} + \sqrt{k})}\right)\right],$$

wo $k = \left(\frac{Q_1}{{}^2/_3\,\mu\,b\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$, *log. nat.* den natürlichen Logarithmen und

Digitized by Google

*arc.* (*tang.* $= y$) den der Tangente $y$ entsprechenden Kreisbogen bezeichnet. Je nachdem $k \lessgtr h$, oder das zufließende Wasserquantum

$$Q_1 \gtrless {}^2/_3 \mu b \sqrt{2gh^3}$$

ist, findet entweder ein Steigen oder ein Fallen des Wasserspiegels statt. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn $h_1 = k$ ist, die entsprechende Zeit $t$ fällt aber $\infty$ aus.

Beispiel. In welcher Zeit steigt das Wasser in einem 12 Fuß langen und 6 Fuß breiten parallelepipedischen Kasten von Null auf 2 Fuß Höhe über der Schwelle eines $1/2$ Fuß breiten Wandeinschnittes, wenn in der Secunde 5 Cubikfuß Wasser zufließen? Man hat hier $h = 0$, daher einfacher:

$$t = \frac{G\,k}{3\,Q_1}\left[log.\,nat.\frac{h_1 + \sqrt{h_1\,k} + k}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2} + \sqrt{12}\;arc.\left(tang. = \frac{-\sqrt{3\,h_1}}{2\sqrt{k} + \sqrt{h_1}}\right)\right].$$

Nun ist $G = 12 . 6 = 72$, $Q_1 = 5$, $h_1 = 2$, $b = 1/2$ und $\mu = 0{,}6$, sowie

$$k = \left(\frac{5}{{}^2/_3 . 0{,}6 . {}^1/_2 . 7{,}906}\right)^{2/3} = 2{,}1544,$$

daher folgt die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{72.2{,}1544}{3.5}\left[log.nat.\frac{4{,}1544 + \sqrt{4{,}3088}}{(1{,}4142 - 1{,}4678)^2} - \sqrt{12}arc.\left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{1{,}4142 + 2{,}9357}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\left[log.\;nat.\;\frac{6{,}2302}{0{,}002873} - \sqrt{12}\,.\,arc.\left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{4{,}3499}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\;(7{,}682 - 1{,}778) = 10{,}341\,.\,5{,}90 = 61\;\text{Secunden}.$$

§. 455 **Schleusen.** Eine nützliche Anwendung der oben abgehandelten Lehren läßt sich auf das Füllen und Leeren der Schleusen (franz. écluses; engl. sluices) machen. Man unterscheidet zweierlei Schleusen (Schifffahrtsschleusen), nämlich einfache und doppelte. Die einfache Schleuse, Figur 790, besteht aus einer Kammer $B$, welche durch das Oberthor $HF$ vom Oberwasser $A$ und durch das Unterthor $RS$ vom Unterwasser $C$ getrennt wird. Die doppelte Schleuse, Fig. 791, hingegen besteht aus zwei Kammern, mit dem Oberthore $KL$, Mittelthore $HF$ und Unterthore $RS$.

Fig. 790.

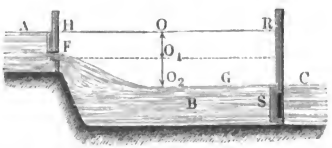
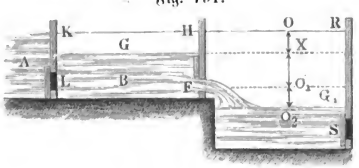



Fig. 791.




Digitized by Google

1) Setzen wir den mittleren horizontalen Querschnitt einer einfachen Schleusenkammer, $= G$, den Abstand $O O_1$ der Mitte der Schutzöffnung im Oberthore von der Oberfläche $HR$ des Oberwassers, $= h_1$ und den Abstand $O_1 O_2$ von der des Unterwassers, $= h_2$, und endlich den Inhalt der Schutzöffnung, $= F$, so erhalten wir die Zeit des Füllens bis zur Mitte der Mündung, wobei die Druckhöhe constant ist:

$$t_1 = \frac{G h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}},$$

und die Zeit zum Füllen des übrigen Raumes, wobei ein allmäliges Abnehmen der Druckhöhe statt hat:

$$t_2 = \frac{2 G h_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1}};$$

es ist folglich die Zeit zum Füllen der einfachen Schleuse:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(2 h_1 + h_2)\, G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}.$$

Befindet sich die Mündung im Unterthor ganz unter Wasser, so nimmt beim Leeren die Druckhöhe allmälig von $O O_2 = h_1 + h_2$ bis Null ab, es ist daher die Zeit des Leerens oder Ablassens:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2 g}}.$$

Steht hingegen ein Theil der Mündung aus dem Unterwasser hervor, so hat man zwei Ausflußmengen, eine über und eine unter Wasser ausfließend, zu berücksichtigen. Setzen wir die Höhe des Theiles der Mündung über dem Wasser, $= a_1$ und die Höhe des Theiles unter dem Wasser, $= a_2$, sowie die Breite der Mündung, $= b$, so erhält man die Ausflußzeit durch den Ausdruck:

$$t = \frac{2 G (h_1 + h_2)}{\mu b \sqrt{2g} \left( a_1 \sqrt{h_1 + h_2 - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h_1 + h_2} \right)}.$$

2) Bei den doppelten Schleusen (Fig. 791) nimmt die Druckhöhe in der vom Oberwasser abgeschlossenen Kammer während des Ausflusses in die zweite Kammer immer mehr und mehr ab. Ist $G$ der horizontale Querschnitt der ersten Kammer und sinkt die anfängliche Druckhöhe $O O_1 = h_1$ in dieser Kammer auf $X O_1 = x$ herab, während das Wasser in der zweiten Kammer bis zur Mitte der Schutz- oder Ausflußöffnung, und zwar um $O_2 O_1 = h_2$ steigt, so hat man die entsprechende Zeit:

$$t_1 = \frac{2 G}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{x}).$$

Nun ist aber Wasserquantum:

$$G (h_1 - x) = G_1 h_2, \text{ daher:}$$

Digitized by Google

$$x = h_1 - \frac{G_1}{G} h_2$$

und:

$$t_1 = \frac{2G}{\mu F \sqrt{2g}} \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - \frac{G_1 h_2}{G}} \right)$$
$$= \frac{2\sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{G h_1} - \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}).$$

Die Zeit, in welcher das Wasser in der zweiten Kammer so hoch steigt, wie in der ersten Kammer, nach welcher also das Wasser in beiden in einerlei Niveau kommt, ist nach §. 449:

$$t_2 = \frac{2 G G_1 \sqrt{x}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}} = \frac{2 G_1 \sqrt{G} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}},$$

und die ganze Füllungszeit:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} \left( \sqrt{G h_1} - \frac{G}{G + G_1} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2} \right).$$

Beispiel. Welche Zeit ist zum Füllen und Ablassen folgender einfachen Schleusenkammern nöthig? Mittlere Schleusenlänge = 200 Fuß, mittlere Breite = 24 Fuß, also $G = 200 . 24 = 4800$ Quadratfuß, Abstand des Mittelpunktes der Schutzöffnung im Oberthore von beiden Wasserspiegeln, = 5 Fuß, Breite beider Oeffnungen, = $2\frac{1}{2}$ Fuß, Höhe der Oeffnung im Oberthore, = 4 Fuß, und Höhe der Oeffnung im Unterthore (ganz unter Wasser), = 5 Fuß. Setzen wir in

$$t = \frac{(2h_1 + h_2) G}{\mu F \sqrt{2g h_1}}, \; h_1 = 5, \; h_2 = 5, \; G = 4800, \; \mu = 0{,}615,$$

$F = 4 . 2\frac{1}{2} = 10$ und $\sqrt{2g} = 7{,}906$,

so erhalten wir die Zeit zum Füllen:

$$t = \frac{3 . 5 . 4800}{6{,}15 . 7{,}906 \sqrt{5}} = \frac{14400}{1{,}23 . 7{,}906 \sqrt{5}} = 662 \text{ Sec.} = 11 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

Setzen wir in der Formel

$$t = \frac{2 G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2g}}, \; G = 4800, \; h_1 + h_2 = 10, \; F = 5 . 2\frac{1}{2} = 12{,}5,$$

so folgt die Zeit zum Leeren der Schleuse:

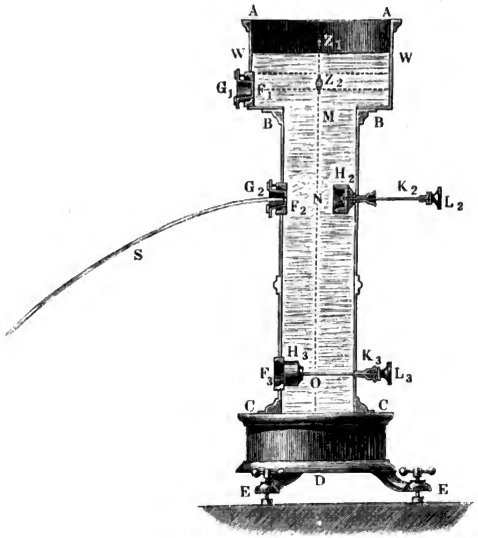
$$t = \frac{2 . 4800 \sqrt{10}}{0{,}615 . 12{,}5 . 7{,}905} = 500 \text{ Sec.} = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sec.}$$

§. 456 **Hydraulischer Versuchsapparat.** Mittels eines in Fig. 792 abgebildeten hydraulischen Versuchsapparates kann man nicht allein durch mehr als 100 Versuche die wichtigsten Erscheinungen des Ausflusses vor Augen führen, sondern auch die hauptsächlichsten Gesetze derselben in Zahlen nachweisen. Dieser Apparat besteht in einem Ausflußgefäße $ABC$ mit drei Mündungen $F_1$, $F_2$, $F_3$, deren Mittelpunkte von dem mittleren Wasserspiegel $WW$ um Höhen abstehen, welche sich zu einander wie die Quadratzahlen

Digitized by Google

1, 4, 9 zu einander verhalten. In diese Mündungen lassen sich die verschiedenartigsten Mundstücke und Röhren einsetzen, und damit dies ohne Störung durch das

Fig. 792.




Wasser geschehen könne, hat man besondere Verschließungsklappen $H_2$, $H_3$, deren Stiele $K_2$, $K_3$ durch Stopfbüchsen in der Rückwand des Apparates hindurchgehen, angebracht. In dem oberen und weiteren Theile $AB$ des Apparates befinden sich noch zwei zugespitzte und nach oben gerichtete Zeiger $Z_1$ und $Z_2$, welche als Anhaltepunkte bei den Versuchen dienen, indem der Durchgang des sinkenden Wasserspiegels durch diese Spitzen den Anfang und das Ende eines jeden Versuches bestimmt. Das ausfließende Wasser fängt man in einem Gefäße auf, das vor dem folgenden Versuche auf das Ausflußreservoir gesetzt wird und durch ein mit einem Stöpsel versehenes Loch seinen Inhalt in das Reservoir zurückführt.

Um mit Hülfe dieses Apparates die Ausflußcoefficienten $\mu$ verschiedener Mundstücke und Röhren zu finden, hat man mittels einer guten Secundenuhr die Zeit $t$ zu beobachten, innerhalb welcher während des Ausflusses der Wasserspiegel von der einen Spitze bis zur anderen sinkt, oder die Druckhöhe $h_1$ in die Druckhöhe $h_2$ übergeht; ist dann noch $F$ der Querschnitt der

Digitized by Google

Ausflußmündung und $G$ der Inhalt des sinkenden Wasserspiegels, so hat man den Ausflußcoefficienten (s. §. 448):

$$\mu = \frac{2\,G\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{F\,t\,\sqrt{2\,g}},$$

und die entsprechende mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Zu diesem Apparate gehört noch eine Sammlung von Mundstücken und Röhren, nämlich quadratische, rectanguläre, kreisförmige und trianguläre Mündungen in dünnem Blech, mit oder ohne innere Einfassung, kurze cylindrische und conische Röhren, längere gerade Röhren von verschiedenen Weiten, Kropf- und Knieröhren u. s. w., welche sich in die verschiedenen Ausflußlöcher $F_1$, $F_2$, $F_3$ einsetzen lassen. Mittels dieses so ausgerüsteten Apparates kann man in wenig Stunden fast alle Erscheinungen und Gesetze des Ausflusses vor Augen führen; man kann an demselben nicht nur die vollkommene und unvollkommene, die vollständige und unvollständige, sondern auch die verschiedenen Grade der Contraction der Wasserstrahlen studiren, ferner die Reibungs-, Knie- und Krümmungswiderstände in Röhren, sowie auch den positiven und negativen Druck des Wassers, durch Springen und Ansaugen u. s. w. kennen lernen. Immer wird man auf recht leidliche, zum Theil aber auch auf überraschend gute Uebereinstimmungen mit den mitgetheilten Erfahrungsgrößen ($\mu$, $\varphi$, $\alpha$, $\zeta$) stoßen. Bei unserem Apparate ist $G = 0{,}125$ Quadratmeter, die gewöhnliche Mündungs- und Röhrenweite ungefähr 1 Centimeter, und für die untere Mündung, $h_1 = 0{,}96$ und $h_2 = 0{,}84$ Meter. (Eine ausführliche Beschreibung dieses Apparates und der mit demselben auszuführenden Versuche u. s. w. enthält die Experimentalhydraulik des Verfassers.)

Ein Beispiel, wie gut die Beobachtungen an diesem Apparate mit den bekannten Versuchen im Großen übereinstimmen, ist folgendes. Für eine kurze cylindrische Ansatzröhre im unteren Loche wurde $t = 33$, für eine längere Glasröhre mit dem Längenverhältnisse $\frac{l}{d} = 124$ aber $t = 56$ Secunden gefunden; hieraus berechnet sich für die eine:

$$\mu_1 = 0{,}815 \text{ und } \zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}504,$$

und für die andere:

$$\mu_2 = 0{,}480 \text{ und } \zeta_2 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 3{,}332,$$

es folgt hiernach:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 3{,}332 - 0{,}504 = 2{,}828,$$

Digitized by Google

und daher der Reibungscoefficient der Röhre:

$$\zeta = \frac{d}{l}(\xi_2 - \xi_1) = \frac{2{,}828}{124} = 0{,}0228.$$

Nach der ersten Tabelle in §. 429 ist für die mittlere Geschwindigkeit $v = 1{,}84$ Meter, mit welcher das Wasser aus der Röhre ausfloß, $\zeta = 0{,}0215$, also die Uebereinstimmung eine ganz gute. Bei diesen Versuchen läßt sich auch auf das Ueberzeugendste nachweisen, daß die Ausflußgeschwindigkeit durch Röhren nicht von der Neigung derselben, sondern nur von der Druckhöhe der Ausmündung abhängt. Es fällt z. B. die Ausflußzeit gleich groß aus, die lange Röhre mag im mittleren oder im unteren Loche stecken, wenn nur die Ausmündung derselben gleich tief unter dem Wasserspiegel im Reservoir steht.

Dieser Ausflußapparat hat neuerer Zeit noch vielfache Ergänzungen erhalten, so daß es möglich ist, mit demselben auch Versuche über den Ausfluß des Wassers unter constantem Druck, sowie auch solche über den Ausfluß der Luft, ferner Versuche über den Druck, Stoß und die Reaction des Wassers u. s. w. anzustellen.

Schlußanmerkung. Die Literatur über den Ausfluß des Wassers und über die Bewegung des Wassers in Röhren wird am vollständigsten mitgetheilt in der „allgemeinen Maschinenencyklopädie, Band 1, Art. Ausfluß". Von den neueren Schriften ist hier nur anzuführen: „Gerstner, Handbuch der Mechanik, Band 2, Prag 1832"; ferner „d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. II. édit. 1840". Die erste Ausgabe ist auch deutsch erschienen. „Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, dritte Auflage, 1842"; ferner Scheffler's Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Braunschweig 1847". Wegen ihrer praktischen Haltung haben die älteren hydraulischen Schriften von Bossut und du Buat immer einen großen Werth. Für den Unterricht und für das praktische Studium der Hydraulik ist besonders geeignet: „Die Experimentalhydraulik, eine Anleitung zur Ausführung hydraulischer Versuche im Kleinen, von J. Weisbach, Freiberg 1855". Ferner ist zu empfehlen: „Rühlmann's Hydromechanik", Leipzig 1857. Der neueren Werke von Lesbros, Boileau, Francis u. s. w. ist oben (§§. 378, 380 und 387) gedacht worden. Noch ist zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie Cours de Mécanique appliquée II., par Bresse. Von den hydraulischen Versuchen des Verfassers sind bis jetzt erst zwei Hefte erschienen, und zwar:

1) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, und
2) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers beim Ausflusse u. s. w., Leipzig 1843.

Mehrere neue Abhandlungen des Verfassers über Hydraulik enthält der Civil-Ingenieur, die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereines u. s. w.

Digitized by Google

## Sechstes Capitel.

## Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

§. 457 **Ausfluss vom Quecksilber und Oel.** Die allgemeine Formel

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{(s. §. 397)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit $v$ des unter dem durch die Höhe $h$ gemessenen Drucke ausfließenden Wassers gilt (s. §. 399) auch bei anderen Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber, Oel, Alkohol u. s. w., und läßt sich sogar auch auf den Ausfluß der Luft und anderer luftförmigen Flüssigkeiten anwenden, wenn deren Pressung nicht groß ist. Bezeichnet $\gamma$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und $p$ den Druck derselben auf die Flächeneinheit, so hat man ebenfalls $h = \frac{p}{\gamma}$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}.$$

Mißt man den Druck durch ein Piëzometer, dessen Füllung, z. B. Quecksilber, die Dichtigkeit $\gamma_1$ hat, so beträgt der Stand desselben, d. i. die Höhe seiner Flüssigkeitssäule:

$$h_1 = \frac{p}{\gamma_1};$$

es ist also $p = h_1 \gamma_1$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g\frac{\gamma_1}{\gamma}h_1} = \sqrt{2g\varepsilon_1 h_1},$$

wenn $\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ das Verhältniß der Dichtigkeit der Piëzometerfüllung zur Dichtigkeit der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Die Uebereinstimmung der Ausflußgesetze der verschiedenen Flüssigkeiten erstreckt sich nicht allein auf die Geschwindigkeit, sondern auch auf die Contraction der Flüssigkeitsstrahlen; die Quecksilber-, Oel-, Luftstrahlen u. s. w. beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand sind ebenso und fast in demselben Verhältnisse contrahirt als die Wasserstrahlen. Einige Versuche, welche der Verfasser über den Ausfluß des Quecksilbers, Rüböles und der atmosphärischen Luft angestellt hat, weisen diese Uebereinstimmung vollständig nach (s. Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1851, Seite 386). Diese Versuche gaben:

1) Für eine kreisrunde Mündung in der dünnen ebenen Wand von

Digitized by Google

6,5 Millimeter Durchmesser, bei den Druckhöhen 91,5 Millimeter und 329 Millimeter die Ausflußcoefficienten:

| für Wasser | Queckſilber | Rüböl |
|---|---|---|
| $\mu = 0{,}709$ | 0,670 | 0,674 |

Es läßt sich hiernach erwarten, daß die Contraction der Queckſilber- und Rüböſtrahlen noch wenig ſtärker iſt als die der Waſſerſtrahlen.

Ferner 2) ein kurzes innen gut abgerundetes conoidiſches Mundſtück von der Ausmündungsweite $d = 6{,}6$ Millimeter und der doppelten Länge ($l = 2\,d$) gab folgende Ausflußcoefficienten:

| für Waſſer | Queckſilber | Rüböl | |
|---|---|---|---|
| | | bei $12\frac{1}{2}^0$ C. Temp. | bei $39^0$ C. Temp. |
| $\mu = 0{,}942$ | 0,989 | 0,430 | 0,665 |

3) Eine kurze cylindriſche Anſatzröhre ohne alle Abrundung von der Weite $d = 6{,}76$ Millimeter, und der dreifachen Länge ($l = 3\,d$) führte auf folgende Werthe:

| für Waſſer | Queckſilber | Rüböl | |
|---|---|---|---|
| | | bei $12\frac{1}{2}^0$ C. Temp. | bei $39^0$ C. Temp. |
| $\mu = 0{,}885$ | 0,900 | 0,363 | 0,604 |

Aus dieſen Verſuchen ergiebt ſich, daß beim Ausfluſſe durch kurze Mundſtücke und Röhren das Queckſilber nur wenig ſchneller ausfließt als das Waſſer, dagegen das Rüböl eine viel kleinere, jedoch mit der Temperatur anſehnlich wachſende Geſchwindigkeit hat als das Waſſer. Der große Unterſchied zwiſchen der Geſchwindigkeit des Rüböles und des Waſſers hat jedenfalls in der großen Klebrigkeit des Oeles an der Röhrenwand ſeinen Grund.

4) Beim Ausfluſſe durch eine 6,64 Millimeter weite und 86mal ſo lange Glasröhre (I.) und beim Ausfluſſe durch eine 6,78 Millimeter weite und 85mal ſo lange Eiſenröhre (II.) ergaben ſich folgende Werthe der Widerſtandscoefficienten $\zeta$:



Digitized by Google

| | für Wasser | Quecksilber | Rüböl | |
|---|---|---|---|---|
| | | | bei 6° C. Temp. | bei 32° C. Temp. |
| I. | $\zeta = 0{,}0271$ | 0,0277 | 39,21 | 2,722 |
| II. | $\zeta = 0{,}0403$ | 0,0461 | 54,90 | 5,24 |

Den letzten Versuchen zufolge ist sowohl in einer Glas- als auch in einer Eisenröhre der Widerstandscoefficient des Quecksilbers wenig größer, dagegen aber der Widerstandscoefficient des Rüböles viele Mal größer als der des Wassers. Auch ist aus der letzten Tabelle zu ersehen, daß der Widerstandscoefficient des Rüböles um so mehr abnimmt, je höher die Temperatur oder der Flüssigkeitsgrad desselben ist. Endlich wird auch durch diese Versuche dargethan, daß die Widerstandscoefficienten der Reibung für die Eisenröhre weit größer sind als für die weit glattere Glasröhre.

§. 458 **Ausflussgeschwindigkeit der Luft.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft während des Ausflusses ihre Dichtigkeit nicht ändert, läßt sich die bekannte Grundformel für den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen auch auf den Ausfluß der Luft anwenden. Ist daher $p$ der Druck der äußeren Luft, sowie $p_1$ der Druck und $\gamma_1$ die Dichtigkeit der Luft im Inneren des Reservoirs $AB$, Fig. 793, so kann man die Ausflußgeschwindigkeit der letzteren (s. §. 399) setzen:

Fig. 793.

$$v = \sqrt{2g\frac{(p_1 - p)}{\gamma_1}} = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Nun ist aber (nach §. 393), wenn $p$ den Druck in Kilogrammen auf ein Quadratcentimeter Fläche, $\gamma$ das Gewicht eines Cubikmeters Luft und $\tau$ die Temperatur derselben bezeichnen, für atmosphärische Luft:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,\tau}{1{,}2514},$$

oder wenn man $p$ auf ein Quadratmeter Fläche bezieht,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{10000}{1{,}2514}\cdot(1 + 0{,}00367\,\tau) = 7991\,(1 + 0{,}00367\,\tau),$$

daher folgt:

Digitized by Google

$$\sqrt{\frac{p_1}{\gamma_1}} = \sqrt{\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{7991}\,\sqrt{1 + 0{,}00367\,\tau},$$

oder wenn man noch 0,00367 durch $\delta$ ersetzt,

$$\sqrt{\frac{p}{\gamma}} = 89{,}39\,\sqrt{1 + \delta\tau}, \text{ und}$$

$$v = 89{,}39\,\sqrt{2g\,(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 396\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Meter,}$$

oder, für preuß. Maß,

$$v = 159{,}6\,\sqrt{2g\,(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Fuß.}$$

Ist $b$ der äußere Barometerstand, und $h$ der Manometerstand ($M$), so hat man auch:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b + h}, \text{ also } 1 - \frac{p}{p_1} = \frac{h}{b + h},$$

und folglich die Ausströmungsgeschwindigkeit der Luft:

$$v = 396\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Fuß,}$$

oder annähernd, bei kleinen Manometerständen, indem man

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{b}}} = 1 - \frac{h}{2b} \text{ setzt,}$$

$$v = 396\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Wegen des gewöhnlichen Feuchtigkeitszustandes der atmosphärischen Luft ist es rathsam, in der Praxis $\delta = 0{,}004$ anzunehmen.

**Ausflussquantum.** Ist $F$ die Größe der Ausströmungsöffnung, so hat §. 459 man die effective Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke $p_1$ oder $b + h$:



Digitized by Google

$$Q_1 = Fv = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1-\frac{p}{p_1}\right)} = F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{\frac{h}{b+h}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$Q_1 = 396\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\,h}{b+h}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\,h}{b+h}} \text{ Cubikfuß.}$$

Dieses Luftquantum auf den äußeren Luftdruck $p$ oder $b$ reducirt, erhält man:

$$Q = \frac{p_1}{p}\,Q_1 = \frac{b+h}{b}\,Q_1$$

$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}\cdot\frac{p_1}{p}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$

$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}\cdot\frac{b+h}{b}\sqrt{\frac{h}{b+h}} = F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}\sqrt{\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$Q = 396\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1261\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. In einem großen Behälter ist Luft von 120 Grad Wärme eingeschlossen, welcher ein Quecksilbermanometerstand von 5 Zoll entspricht, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll beträgt; welche Windmenge wird aus demselben durch eine $1\frac{1}{2}$ Zoll weite kreisrunde Mündung strömen?

Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit ist:

$$v = 1261\sqrt{(1+0{,}00367\,.\,120)\frac{5}{32{,}2}} = 1261\sqrt{\frac{1{,}4404\,.\,5}{32{,}2}} = 596{,}4 \text{ Fuß};$$

ferner der Querschnitt der Mündung:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{256} = 0{,}01227 \text{ Quadratfuß};$$

folglich die theoretische Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke:

$$Q_1 = Fv = 596{,}4\,.\,0{,}01227 = 7{,}319 \text{ Cubikfuß};$$

dagegen gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = \frac{b+h}{b}\,Q_1 = \frac{32{,}2}{27{,}2}\cdot 7{,}319 = 8{,}665 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 460 **Ausfluss nach dem Mariotte'schen Gesetze.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft beim Ausströmen aus Gefäßen keine Tempera-

Digitized by Google

turveränderung erleidet, läßt sich annehmen, daß sie sich hierbei nach dem Mariotte'schen Gesetze (s. §. 387) ausdehnt, und daher auch voraussetzen, daß das Luftquantum $Q$ beim Uebergange aus der Pressung $p_1$ in die Pressung $p$ die Arbeit $Q\,p\,Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)$ verrichte (s. §. 388). Setzt man nun diese Arbeit der Arbeit $\frac{v^2}{2g}\,Q\,\gamma$ gleich, welche das $Q\gamma$ bei dem Ausflusse in Anspruch nimmt, so erhält man folgende Formel

$$\frac{v^2}{2g}\,Q\,\gamma = Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)\cdot Q\,p, \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right),$$

wonach die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\,g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)} \text{ folgt.}$$

Noch ist, wie oben, für Metermaß $\frac{p}{\gamma} = \frac{1+\delta\,\tau}{1{,}2514}$, daher hat man auch

$$v = 396\sqrt{(1+\delta\,\tau)\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)} = 396\sqrt{(1+\delta\tau)\,Ln.\left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Meter,}$$

sowie

$$v = 1261\sqrt{(1+\delta\,\tau)\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)} = 1261\sqrt{(1+\delta\tau)\,Ln.\left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Fuß,}$$

wobei $b$ den Barometerstand der äußeren und $h$ den Manometerstand der inneren Luft, ferner $\tau$ die Temperatur der letzteren und $\delta = 0{,}00367$, den bekannten Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet. Nun folgt die theoretische Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = Fv = F\sqrt{2\,g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\cdot\left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

$$= 1261\,F\sqrt{(1+\delta\,\tau)\,Ln.\left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Cubikfuß,}$$

oder reducirt auf den inneren Druck:

$$Q_1 = \frac{p}{p_1}\,Q = \frac{p}{p_1}\,F\sqrt{2\,g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

$$= \frac{b}{b+h}\,F\sqrt{2\,g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{b+h}{b}\right)}$$

$$= 1261\,F\,\frac{b}{b+h}\sqrt{(1+\delta\,\tau)\,Ln\cdot\left(\frac{b+h}{b}\right)}.$$

Digitized by Google

Ist der Ueberdruck der inneren Luft oder $\frac{h}{b}$ sehr klein, so kann man

$$Lm.\left(\frac{b+h}{b}\right) = Lm.\left(1+\frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b} - {}^1/_2\left(\frac{h}{b}\right)^2$$

(s. Ingenieur, Seite 81), und daher auch annähernd

$$Q = F\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\left(1-\frac{h}{2b}\right)\frac{h}{b}}$$

setzen, während nach der ersteren Ausflußformel (s. §. 459)

$$Q = F\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ ist.}$$

Es führt also die Annahme, daß sich die Luft beim Ausströmen nach dem Mariotte'schen Gesetze ausdehne, auf eine kleinere Ausflußmenge, als die Annahme, daß sie sich beim Ausflusse genau so wie Wasser verhalte, also gar nicht ausdehne. Diese Differenz vermindert sich jedoch mit $\frac{h}{b}$, und es ist endlich bei sehr kleinen Werthen von $\frac{h}{b}$, in beiden Fällen:

$$Q = F\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\cdot\frac{h}{b}} = 1261\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

zu setzen.

§. 461 **Arbeit der Wärme.** Der in §. 388 gefundene logarithmische Ausdruck für die mechanische Arbeit beim Comprimiren und Ausdehnen der Luft hat nur unter der Voraussetzung seine Gültigkeit, daß sich bei dieser Volumen- oder Dichtigkeitsveränderung die Temperatur der Luft nicht ändere; dies ist jedoch nur dann anzunehmen, wenn diese Veränderung sehr langsam erfolgt, wobei die Wärme hinreichende Zeit hat, sich mit der Wärme der Gefäßwand und der äußeren Luft ins Gleichgewicht zu setzen. Geht aber die Dichtigkeitsveränderung der Luft schnell vor sich, so ist mit derselben auch eine Temperaturveränderung verbunden, und zwar beim Verdichten derselben eine Erhöhung und beim Verdünnen eine Verminderung der Temperatur. Es kann daher sich auch in diesem Falle die Spannung nicht nach dem einfachen Mariotte'schen Gesetze verändern. Sind $p$ und $p_1$ die Pressungen, $\gamma$ und $\gamma_1$ die Dichtigkeiten, sowie $\tau$ und $\tau_1$ die Temperaturen einer und derselben Luft, so gilt nach §. 392 die Formel

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau}\cdot\frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Wenn sich nun an der plötzlichen Pressungsveränderung die Temperatur in dem Verhältnisse

$$\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau_2} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/2}, \text{ ändert, so läßt sich}$$

Digitized by Google

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau}\right)^3 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{3/2},$$

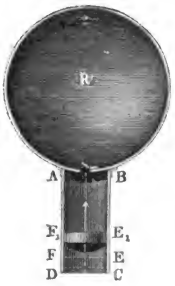
sowie

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \left(\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{2/3}$$

setzen.

Wenn in dem Cylinder $AC$, Fig. 794, durch den Kolben $EF$ anfänglich ein Luftprisma von der Höhe $EB = s$, mit der Spannung $p$ und Dichtigkeit $\gamma$ abgesperrt wird, und diese Luftmenge durch ein schnelles Aufschieben des Kolbens um $x$ plötzlich in die Dichtigkeit $y$ und Spannung $z$ versetzt wird, so ist der letzten Formel zu Folge,

Fig. 794.




$$\frac{z}{p} = \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{3/2} = \left(\frac{s}{s-x}\right)^{3/2},$$

und daher

$$z = \left(\frac{s}{s-x}\right)^{3/2} p.$$

Um daher den Kolben, dessen Fläche der Einfachheit wegen, der Flächeneinheit gleich sein möge, durch das Wegelement $\sigma$ fortzuschieben, ist die mechanische Arbeit

$$z\sigma = \left(\frac{s}{s-x}\right)^{3/2} p\sigma = p\sigma s^{3/2}(s-x)^{-3/2}$$

nöthig.

Führt man nun statt $x$, nach und nach $1\sigma$, $2\sigma$, $3\sigma$ ... ein, setzt man $s = n\sigma$ sowie die Höhe des Luftraumes am Ende des Kolbenweges $EE_1$, $E_1B = s_1 = m\sigma$, so erhält man die mechanische Arbeit, welche der Kolben bei dem Ausschube $EE_1$ verrichtet:

$$\begin{aligned} A_1 &= p\sigma s^{3/2}\left[s^{-3/2} + (s-\sigma)^{-3/2} + (s-2\sigma)^{-3/2} + \cdots + (s-m\sigma)^{-3/2}\right] \\ &\doteq p\sigma s^{3/2}\left\{\begin{array}{l}(\sigma)^{-3/2} + (2\sigma)^{-3/2} + (3\sigma)^{-3/2} + \cdots + (n\sigma)^{-3/2} \\ -\left[(\sigma)^{-3/2} + (2\sigma)^{-3/2} + (3\sigma)^{-3/2} + \cdots + (m\sigma)^{-3/2}\right]\end{array}\right\} \\ &= \frac{ps^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\left\{\begin{array}{l}1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2} \\ -\left(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2}\right)\end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wenn $m$ und $n$ unendlich große Zahlen bedeuten, nach Seite 88 des Ingenieur:

$$1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2} = \frac{m^{-1/2}}{-1/2} = -\frac{2}{m^{1/2}},$$

und

Digitized by Google

$$1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2} = -\frac{2}{n^{1/2}},$$

daher folgt

$$A_1 = \frac{ps^{3/2}}{s^{1/2}}\left(\frac{2}{m^{1/2}} - \frac{2}{n^{1/2}}\right) = 2ps^{3/2}\left(\frac{1}{s_1^{1/2}} - \frac{1}{s^{1/2}}\right)$$
$$= 2ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right].$$

Um das comprimirte Luftquantum $AE_1$ durch weiteres Aufschieben des Kolbens auf den Weg $s_1$ in einen Raum $R$ zu drücken, worin die Pressung

$$p_1 = p\left(\frac{s}{s_1}\right)^{3/2}$$

vorhanden ist, wird noch die Arbeit

$$A_2 = p_1 s_1 = \frac{ps^{3/2}}{s_1^{1/2}}$$

erfordert, wogegen die äußere Luft während des ganzen Kolbenweges mit der Kraft $p$ nachschiebt, und hierbei die Arbeit $A_3 = ps$ auf den Kolben überträgt. Es ist daher schließlich die ganze mechanische Arbeit zum Comprimiren des Luftvolumens $(1 \,.\, s)$ und Hineindrücken in den Raum $R$:

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$
$$= 2ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right] + \frac{ps^{3/2}}{s_1^{1/2}} - ps = 3ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right],$$

und folglich die Arbeit zum Comprimiren des Luftvolumens $V$, von $p$ auf $p_1$:

$$A = 3Vp\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right] = 3Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right] = 3Vp\left(\sqrt[3]{\frac{p_1}{p}} - 1\right),$$

während nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$A = Vp\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

und bei vollständiger Incompressibilität des Fluidums,

$$A = V(p_1 - p) = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right)$$

zu setzen wäre.

Wird umgekehrt das Luftquantum $V_1\gamma_1$ von der Pressung $p_1$ durch plötzliche Ausdehnung auf die Pressung $p$ und Dichtigkeit

$$\gamma = \gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3}$$

oder Volumen

$$V = V_1\left(\frac{p_1}{p}\right)^{2/3}$$

zurückgeführt, so verrichtet dasselbe die mechanische Arbeit

$$A = 3Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right] = 3V_1p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right].$$

Digitized by Google

Beispiel. Ein Gebläse, welches pro Secunde 10 Cubikfuß Luft von $b = 28$ Zoll Barometerstand in Wind von $b + h = 30$ Zoll Spannung verwandelt, erfordert nach der Formel

$$A = 3\,Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right],$$

da der Druck der äußeren Luft auf den Quadratfuß

$$p = 144\,.\,0{,}5037\,b = 144\,.\,0{,}5037\,.\,28 = 2031 \text{ Pfd. beträgt,}$$

den Arbeitsaufwand

$$A = 30\,.\,2031\left(\sqrt[3]{\frac{30}{28}} - 1\right) = 6093\left(\sqrt[3]{\frac{15}{14}} - 1\right) = 6093\,.\,0{,}023265$$
$$= 1418 \text{ Fußpfd.}$$

während die logarithmische Formel (siehe Beisp. 1 zu §. 388), $A = 1401$ Fußpfd. gegeben hat und nach der Wasserformel

$$A = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right) = 29310\left(\frac{15}{14} - 1\right) = \frac{20310}{14} = 1451 \text{ Fußpfd.}$$

ist.

**Ausfluss der Luft mit Rücksicht der Abkühlung.** Das §. 462 Arbeitsquantum $A = 3\,Q_1\,p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]$, welches bei der plötzlichen Ausdehnung des Luftvolumens $Q_1$ auf $Q$ frei wird, ist auch gleich zu setzen der Arbeit $Q_1\,\gamma_1 \cdot \frac{v^2}{2g}$, welche die Trägheit der Luftmasse $\frac{Q_1\,\gamma_1}{g}$ bei Annahme der Ausflußgeschwindigkeit $v$ in Anspruch nimmt.

Die hiernach aufzustellende Gleichung

$$Q_1\gamma_1\frac{v^2}{2g} = 3\,Q_1\,p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]$$

führt nun auf folgende Ausflußformel

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right], \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{2g\cdot\frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

wonach für französisches Maß

$$v = 154{,}8\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$
$$= 685{,}8\sqrt{(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Meter,}$$

und für preußisches Maß

$$v = 276{,}4\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$
$$= 2185\sqrt{(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Fuß folgt.}$$

Digitized by Google

Die ausströmende Luft hat die äußere Pressung $p$, die Dichtigkeit

$$\gamma_2 = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{8/9}$$

und die Temperatur

$$\tau_2 = \tau_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3} \frac{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3} - 1}{\delta},$$

und das theoretische Luftquantum, welches durch eine Mündung vom Inhalte $F$ strömt, ist

$$Q_2 = Fv = F\sqrt{2g \cdot \frac{3\,p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

$$= 276{,}4\,F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}\ \text{Cubikfuß},$$

wobei $p_1$, $\gamma_1$ und $\tau_1$ Pressung, Dichtigkeit und Temperatur der inneren Luft bezeichnen.

Auf den inneren Druck reducirt, ist das Ausflußquantum

$$Q_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot Q_2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{8/9} Q_1 = F\left(\frac{p}{p_1}\right)^{8/9}\sqrt{2g \cdot 3\,\frac{p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

und endlich auf den äußeren Luftdruck und die innere Temperatur oder auf die Dichtigkeit $\gamma = \gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)$ reducirt, ist es

$$Q = \frac{p_1}{p}\,Q_1 = F\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3}\sqrt{2g\frac{3\,p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{3\,p_1}{\gamma_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right]}.$$

Setzt man $\frac{p_1}{p} = \frac{b + h}{b}$, wo $b$ den äußeren und $b + h$ den inneren Barometerstand bezeichnet, so erhält man

$$Q = F\sqrt{2g\frac{3\,p_1}{\gamma_1}\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1\right]}$$

$$= 276{,}9\,F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1\right]}$$

$$= 2185\,F\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1\right]}\ \text{Cubikfuß}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist $\frac{h}{b}$ klein, so daß sich

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} = \left(1 + \frac{h}{b}\right)^{1/3} = 1 + {}^1/_3\,\frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \cdots,$$

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1 = {}^1/_3\,\frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2 + {}^5/_{81}\left(\frac{h}{b}\right)^3$$

Digitized by Google

$$= \frac{h}{3b}\left[1 - {}^1/_3\ \frac{h}{b} + {}^5/_{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]$$

setzen läßt, und nun

$$Q' = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}\left[1 + {}^1/_3\ \frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\left[1 - {}^1/_3\ \frac{h}{b} + {}^5/_{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}\left[1 - {}^1/_{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]}$$

$$= F\left[1 - {}^1/_{54}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}$$ folgt.

Bei Anwendung auf Gebläse-, Wetter- und Lüftungsmaschinen ist $\frac{h}{b} < {}^1/_2$, und daher ganz einfach das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke und bei der inneren Temperatur

$$Q = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}$$

$$= 89{,}39\,F\sqrt{2g(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} = 396\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}}\ \text{Cubikm.}$$

$$= 159{,}6\,F\sqrt{2g(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} = 1261\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}}\ \text{Cubikfuß.}$$

Beispiel. Für den im Beispiel zu §. 459 behandelten Fall, wo $b = 27{,}2$ und $h = 5$ Zoll, ferner $\tau = 120^0$ und $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}01227$ Quadratfuß ist, hat man nach der letzten Formel die Ausflußmenge, gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = 1261\,F\sqrt{1{,}4404\cdot\frac{5}{27{,}2}} = 1261\,F\sqrt{0{,}2648}$$

$$= 648{,}9\,F = 648{,}9\cdot 0{,}01227 = 7{,}962\ \text{Cubikfuß,}$$

während oben (§. 459) nach der Wasserformel, $Q = 8{,}665$ Cubikfuß gefunden wurde, und die logarithmische Formel in §. 460,

$$Q = 1261\,F\sqrt{1{,}4404\,Ln\frac{32{,}2}{27{,}2}} = 1261\,F\sqrt{0{,}2431}$$

$$= 621{,}7\cdot 0{,}01227 = 7{,}628\ \text{Cubikfuß giebt.}$$

**Ausfluss der bewegten Luft.** Die gefundenen Ausflußformeln §. 463
setzen voraus, daß die Pressung $p$ oder der Manometerstand $h$ an einer Stelle gemessen worden sei, wo die Luft in Ruhe befindlich ist, oder eine sehr schwache Bewegung hat; mißt man aber $p_1$ oder $h_1$ an einem Orte, wo die Luft in Bewegung ist, communicirt z. B. das Manometer $M_1$ mit der in einer Leitungsröhre $CF$, Fig. 795 (a. f. S.), befindlichen Luft, so hat

Digitized by Google

man bei der Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit auch noch die lebendige Kraft der ankommenden Luft zu berücksichtigen. Ist nun $c$ die Geschwindigkeit der vor der Manometermündung vorbeigehenden Luft, so hat man demnach zu setzen:

$$Q_1 \gamma_1 \cdot \frac{v^2}{2g} = Q_1 \gamma_1 \cdot \frac{c^2}{2g} + 3 Q_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right].$$

Bezeichnet $F$ den Querschnitt der Mündung und $G$ den der Röhre oder des an der Manometermündung vorbeigehenden Stromes, so ist das ausströmende Luftquantum $Q_1 \gamma_1 = G c \gamma_1 = F v \gamma_2$, daher folgt

$$\frac{c}{v} = \frac{F \gamma_2}{G \gamma_1} = \frac{F}{G} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3} \text{ und}$$

$$Q_1 \gamma_1 \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}\right] \frac{v^2}{2g} = 3 Q_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right],$$

und die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2g \frac{3 p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}}},$$

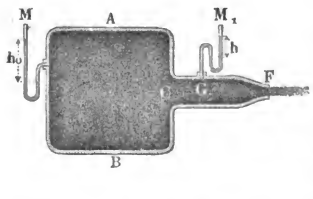
oder annähernd, wenn $p_1$ nicht viel größer als $p$ ist,

$$v = \sqrt{\frac{2g \frac{3 p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 2185 \sqrt{\frac{(1 + \delta\tau) \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}} \text{ Fuß.}$$

Es stellt sich also auch hier, genau wie beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen, die Ausflußgeschwindigkeit um so größer heraus, je größer das Verhältniß $\frac{F}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Mündung und dem der Röhre oder des ankommenden Luftstromes ist. Man ersieht auch hieraus, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen der Manometerstand $p_1$ um so kleiner ausfällt, je enger die Leitungsröhre oder je größer die Geschwindigkeit der durch sie fortgeführten Luft ist.

Fig. 795.



Bezeichnet $p_0$ die Spannung im Windreservoir, wo die Luft noch in Ruhe ist, so hat man auch*:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3\,p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3}\right]$$

und wenn man aus beiden Gleichungen $v$ eliminirt, so ergiebt sich

$$\frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3}} = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}, \text{ annähernd} = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2.$$

Ist $b$ der äußere Barometer- und $h$ der innere Manometerstand, sowie $F$ der Inhalt der Ausflußöffnung, so hat man schließlich das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter der Dichtigkeit

$$\gamma = \left(\frac{p}{p_1}\right)\gamma_1 = \frac{b\,\gamma_1}{b + h}$$

$$Q = F\sqrt{\frac{2g\,\frac{p_1}{\gamma}\,\frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}} = 159{,}6\,F\sqrt{\frac{2g(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1 + \delta\tau)\frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

**Beispiel.** Ein auf einer $3\frac{1}{2}$ Zoll weiten Windleitung sitzendes Quecksilbermanometer steht auf $2\frac{1}{2}$ Zoll, während der Wind am Ende der Röhre durch eine runde, 2 Zoll weite Mündung ausströmt; mit welcher Geschwindigkeit findet dieses Ausströmen statt, vorausgesetzt, daß der äußere Barometerstand $27\frac{1}{2}$ Zoll und die Temperatur der Luft in der Windleitung 10 Grad beträgt?

Es ist hier

$$\sqrt{1 + \delta\tau} = \sqrt{1{,}0367} = 1{,}018,\ \sqrt{\frac{h}{b}} = \sqrt{5/55} = \sqrt{1/11} = 0{,}3015,$$

sowie

$$F = \pi r^2 = 3{,}141 : 144 = 0{,}02181 \text{ und}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2} = \frac{\sqrt{49^2 - 16^2}}{49} = \frac{46{,}314}{49} = 0{,}9452,$$

daher folgt die Ausflußmenge

$$Q = 1261\,F \cdot \frac{1{,}018 \cdot 0{,}3015}{0{,}9452} = 409{,}5\,F = 8{,}931 \text{ Cubikfuß}.$$

Für die entsprechende Spannung $p_0$ im Luftreservoir ist:

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3} = \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right] : \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] = \left(1 - \sqrt[3]{11/12}\right) : 0{,}9452^2$$

$$= \frac{0{,}0287}{0{,}8934} = 0{,}03212, \text{ daher}$$

Digitized by Google

$\sqrt[3]{\frac{p}{p_0}} = 0{,}90788$ und $p_0 = 1{,}103\,p$, sowie auch $b + h_0 = 1{,}103\,b$,

und folglich der Manometerstand im Reservoir:

$$h_0 = 0{,}103\,b = 0{,}103 \,.\, 27{,}5 = 2{,}83 \text{ Zoll.}$$

§. 464 **Ausflusscoefficienten.** Die Contractionserscheinungen, welche wir beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen kennen gelernt haben, finden sich auch beim Ausströmen der Luft aus Gefäßen vor. Ist die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand ausgeschnitten, so hat der durch sie gehende Luft- oder Windstrahl einen kleineren Querschnitt als die Mündung selbst, und es ist deshalb auch die effective Ausflußmenge $Q_1$ kleiner als das theoretische Ausflußquantum $Q$ oder das Product $Fv$ aus Querschnitt $F$ der Mündung und theoretischen Geschwindigkeit $v$. Diese Verminderung der Ausflußmenge hat, wie man am ausströmenden Rauch beobachten kann, hauptsächlich ihren Grund in der Contraction des Luftstrahles, und wir können daher auch, wie bei den Wasserstrahlen (s. §. 406), das Verhältniß $\alpha = \frac{F_1}{F}$ zwischen dem Querschnitte $F_1$ des Luftstrahles und dem Querschnitte $F$ der Mündung den Contractionscoefficienten,

ferner das Verhältniß $\varphi = \frac{v_1}{v}$ zwischen der effectiven Ausströmungsgeschwindigkeit $v_1$ und der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit $v$ (s. §. 408) den Geschwindigkeitscoefficienten,

und das Verhältniß $\mu = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 v_1}{Fv} = \alpha\varphi$ der wirklichen Ausflußmenge $Q_1$ zur theoretischen Ausflußmenge $Q$ den Ausflußcoefficienten der ausströmenden Luft nennen.

Jedenfalls ist bei dem Ausflusse der Luft durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand wie bei dem des Wassers der Geschwindigkeitscoefficient $\varphi$ nahe = Eins, und daher auch, so lange als besondere Messungen der Luftstrahlen nicht vorgenommen worden sind, der Ausflußcoefficient $\mu = \alpha\varphi$ der Luft dem Contractionscoefficienten $\alpha$ gleich zu setzen. Die älteren Versuche, welche über den Ausfluß der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand angestellt worden sind, weichen sehr von einander ab. Die von Buff nach der Wasserformel berechneten Versuche von Koch geben für Kreismündungen von 3 bis 6 Linien Durchmesser, bei 0,2 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}50$, dagegen liefern die hiernach berechneten Versuche von d'Aubuisson bei 0,027 bis 0,144 Meter Wassermanometerhöhe an Kreismündungen von 1 bis 3 Centimeter Durchmesser, $\mu = 0{,}65$ bis $0{,}64$. Ferner fand

Digitized by Google

Poncelet durch die Berechnung der Pecqueur'schen Versuche nach derselben Formel für eine Mündung von 1 Centimeter Durchmesser, unter dem Ueberdrucke von 1 Atmosphäre, also 10 Meter Höhe Wassersäule, $\mu = 0{,}563$, und für eine solche von 1,5 Centimeter Weite, $\mu = 0{,}566$. Die in großer Ausdehnung angestellten, und mittels der letzten Ausflußformel

$$Q = F\left[1 - {}^1/_{54}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}$$

berechneten Versuche des Verfassers haben folgende Resultate geliefert.

1) bei der Mündungsweite $d = 1$ Centimeter, und dem mittleren Pressungsverhältnisse:

| $\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b} =$ | 1,05 | 1,09 | 1,43 | 1,65 | 1,89 | 2,15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,555 | 0,589 | 0,692 | 0,724 | 0,754 | 0,788 |

2) bei der Mündungsweite $d = 2{,}14$ Centimeter, für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,05 | 1,09 | 1,36 | 1,67 | 2,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,558 | 0,573 | 0,634 | 0,678 | 0,723 |

3) bei der Mündungsweite $d = 1{,}725$ Centimeter, für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,08 | 1,37 | 1,63 |
|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,563 | 0,631 | 0,665 |

4) bei der Mündungsweite $d = 2$ Centimeter, für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,08 | 1,39 |
|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,578 | 0,641 |

Es wächst also hiernach der Contractionscoefficient beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ansehnlich mit der Druckhöhe. Bei Anwendung der Wasserformel wird aber diese Veränderlichkeit bedeutend herabgezogen; diese Formel giebt $\mu$ nahe $\sqrt{\frac{p}{p_1}}$, z. B. für $\frac{p_1}{p} = 2$;

Digitized by Google

$\sqrt{1/2} = 0{,}707$ mal ſo groß als die letzte Formel. Nach der erſten Tabelle iſt z. B. für $d = 1$, und $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = \frac{0{,}754 + 0{,}788}{2} = 0{,}771$, und daher nach der Waſſerformel $\mu = 0{,}707 \,.\, 0{,}771 = 0{,}555$, alſo ſehr nahe denſelben Werth, wie Poncelet gefunden hat.

Bei dem Ausfluß durch eine Kreismündung von 1 Centimeter Durchmeſſer in einer coniſch convergenten Wand von 100 Grad Convergenz wurde für

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,31 | 1,66 |
| $\mu =$ | 0,752 | 0,793 |

gefunden.

Ebenſo bei einer ſolchen Mündung in der coniſch divergenten Wand von 100 Grad Divergenz, für

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,30 | 1,66 |
| $\mu =$ | 0,589 | 0,663 |

§. 465 Die Veränderlichkeit des Contractionscoefficienten $\alpha = \mu$ für den Ausfluß der Luft durch eine Mündung in der dünnen Wand, erſtreckt ſich der bekannten Formel

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}} \text{ (ſ. §. 422)}$$

zufolge auf den Ausfluß durch kurze cylindriſche Anſatzröhren. Nach den oben angeführten Verſuchen von Koch iſt z. B. für ſolche Röhren von 3 bis 4 Linien Weite und 4- bis 6facher Länge, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Waſſermanometerhöhe, $\mu = 0{,}74$ bis $0{,}72$, wogegen d'Aubuiſſon für ſolche Röhren von 1 bis 3 Centimeter Weite und der 3- bis 4fachen Länge, bei 0,027 bis 0,141 Meter Waſſerbarometerſtand, $\mu = 0{,}92$ bis $0{,}93$ und Poncelet für cylindriſche Röhren von 1 Centimeter Weite und der $2\,1/2$- bis 10fachen Weite, bei dem doppelten Atmoſphärendrucke, $\mu = 0{,}632$ bis $0{,}650$ gefunden hat.

Die vom Verfaſſer angeſtellten Verſuche haben dagegen auf folgende Reſultate geführt:

Digitized by Google

1) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge, gab für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,05 | 1,10 | 1,30 |
|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,730 | 0,771 | 0,830 |

2) Eine solche Röhre von 1,414 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, führte für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,41 | 1,69 |
|---|---|---|
| auf $\mu =$ | 0,813 | 0,822 |

3) Eine solche Röhre von 2,44 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, gab für

$$\frac{b+h}{b} = 1{,}74;\ \mu = 0{,}833.$$

Die Zunahme des Ausflußcoefficienten beim Wachsen der Pressung ist durch das gleichzeitige Wachsen des Contractionscoefficienten erklärlich.

Die Ansatzröhre (1) mit schwach abgerundeter Einmündung gab im Mittel den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}927$, also viel größer als bei einer solchen Röhre ohne Abrundung.

4) Ein kurzes innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Länge und 1,6 Centimeter Länge gab für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,24 | 1,38 | 1,59 | 1,85 | 2,14 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,979 | 0,986 | 0,965 | 0,971 | 0,978 |

Da dieser Coefficient, wie erforderlich, der Einheit sehr nahe kommt, so ist dadurch der Vorzug der Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma} \cdot \frac{b}{p}}$$

vor den anderen Formeln dargethan.

Die ältere Formel giebt natürlich bei hohem Drucke viel kleinere Werthe, und dagegen die logarithmische Formel (s. §. 460) viel größere, die Einheit sogar übersteigende Werthe von $\mu$.

Eine kurze conische Röhre mit innerer Abrundung gab ziemlich



Digitized by Google

dieselben Werthe für $\mu$, dagegen eine kurze conische Röhre ohne Abrundung von 1 Centimeter Mündungsweite, 4 Centimeter Länge und 7° 9′ Convergenz für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,08 | 1,27 | 1,65 |
|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,910 | 0,922 | 0,964 |

Nach Buff und Koch ist für eine solche Röhre von 2,72 Linien äußerer Weite und 6° Seitenconvergenz, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}73$ bis 0,85, und nach d'Aubuisson, bei einer ähnlichen Röhre von 1,5 Centimeter Mündungsweite, unter 0,027 bis 0,144 Meter Wasserdruckhöhe, $\mu = 0{,}94$, bei Zugrundelegung der älteren oder sogenannten Wasserformel.

Das vollständige längere Düsenmundstück $AC$, Fig. 736 aus §. 434, d. i. eine conische Röhre, von 14,5 Centimeter Länge, 1 Centimeter Weite in der Ausmündung, und 3,8 Weite in der übrigens gut abgerundeten Einmündung, bei nahe 6° Seitenconvergenz gab für

| $\frac{b+h}{b} =$ | 1,08 | 1,45 | 2,16 |
|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,932 | 0,960 | 0,984 |

Durch Versuche über das Einströmen der Luft in Gefäße fanden die Franzosen Saint-Venant und Wantzel für ein kurzes, inwendig nach einem Viertelkreise abgerundetes Mundstück, nach der neueren Formel berechnet, $\mu = 0{,}98$, und für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}61$.

Sind die Pressungen klein, ist, wie z. B. bei der gewöhnlichen Gebläseluft, $\frac{h}{b} < 1/6$, so läßt sich dem Vorstehenden zufolge, bei Anwendung der neueren Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma} \cdot \frac{b}{h}} = 1261\,\mu F \sqrt{(1 + 0{,}004\,.\,\tau)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß},$$

im Mittel setzen:

1) für Mündungen in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}56$,
2) für kurze cylindrische Ansatzröhren, $\mu = 0{,}75$,
3) für ein gut abgerundetes conoidisches Mundstück, $\mu = 0{,}98$,
4) für eine conische Röhre von circa 6° Seitenconvergenz, $\mu = 0{,}92$.

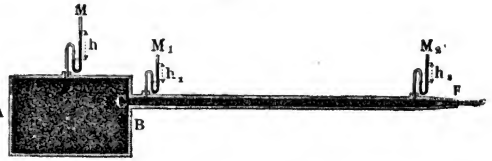
Digitized by Google

**Beispiel.** Wenn bei einem Gebläse die Mündungen der beiden conischen Düsen zusammen 3 Quadratzoll Inhalt haben, wenn ferner bei einer Temperatur von 15 Grad der Manometerstand im Regulator 3 Zoll und der äußere Barometerstand $27^1/_2$ mißt, so läßt sich das effective Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke, setzen:

$$Q = 1261\,\mu F\sqrt{(1 + 0{,}004\,\tau)\frac{b}{h}}$$
$$= 1261\,.\,0{,}92\,.\frac{3}{144}\sqrt{(1 + 0{,}004\,.\,15)\frac{3\,.\,2}{55}} = 24{,}17\sqrt{\frac{1{,}06\,.\,6}{55}}$$
$$= 24{,}17\sqrt{0{,}1156} = 24{,}17\,.\,0{,}34 = 8{,}22 \text{ Cubikfuß}.$$

**Reibungscoefficient der Luft.** Bewegt sich die Luft durch eine lange Röhre $CF$, Fig. 796, so hat sie einen Reibungswiderstand wie das §. 466

Fig. 796.




Wasser zu überwinden, auch läßt sich dieser Widerstand durch die Höhe einer Luftsäule messen, welche der Ausdruck:

$$z = \zeta\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

worin genau, wie bei den Wasserleitungen, $l$ die Länge, $d$ die Weite der Röhre, $v$ die Geschwindigkeit und $\zeta$ den durch Versuche zu bestimmenden Widerstandscoefficienten der Luft bezeichnen, angiebt.

Die Versuche von Girard über die Bewegung der Luft durch Röhren führen auf den Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}0256$, und die von d'Aubuisson liefern im Mittel $\zeta = 0{,}0238$, wogegen nach Buff's Versuchen im Mittel $\zeta = 0{,}0375$ zu setzen ist. Dagegen findet wieder Poncelet aus den Ergebnissen der Versuche von Pecqueur bei dem Pressungsverhältnisse $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = 0{,}0237$.

Die nach der neueren Formel berechneten Versuche des Verfassers gaben folgende Resultate.

1) Eine Messingröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge gab für Geschwindigkeiten von 25 bis 150 Meter, $\zeta$ allmälig abnehmend von 0,027260 bis 0,01482,

2) und eine Glasröhre von derselben Länge bei ziemlich denselben Geschwindigkeiten, lieferte $\zeta = 0{,}02738$ bis $0{,}01390$.



Digitized by Google

3) Eine Messingröhre von 1,41 Centimeter Weite und 3 Meter Länge, führt $r$ auf $\zeta = 0{,}02578$ bis $0{,}01214$,

4) und eine dergleichen Glasröhre auf $\zeta = 0{,}02663$ bis $0{,}009408$.

5) Eine Zinkröhre von 2,4 Centimeter Weite und 10 Meter Länge gab endlich bei Geschwindigkeiten von 25 bis 80 Meter, $\zeta = 0{,}02303$ bis $0{,}01296$.

Es ist hieraus zu folgern, daß nur bei mäßigen Windgeschwindigkeiten, von circa 25 Meter = 80 Fuß, der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}024$ gesetzt werden kann, daß er aber immer kleiner und kleiner angenommen werden muß, je größer die Geschwindigkeit des Windes in der Röhre ist.

Annähernd läßt sich auch für Metermaß $\zeta = \frac{0{,}120}{\sqrt{v}}$, und für Fußmaß, $\zeta = \frac{0{,}214}{\sqrt{v}}$ setzen.

Im Ganzen verhält sich also die Luft bei der Bewegung in Röhren ebenso wie das Wasser.

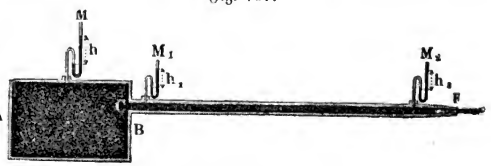
Auch der Widerstand, welchen Kniee und Kröpfe in den Röhren der Bewegung der durchströmenden Luft entgegensetzen, ist ähnlich wie beim Wasser zu beurtheilen.

Bei den Versuchen des Verfassers gab ein rechtwinkeliges Knie von 1 Centimeter Weite, $\zeta = 1{,}61$, und ein solches von 1,41 Centimeter Weite, $\zeta = 1{,}24$; ferner ein nach einem Kreisquadranten gebogener Kropf gab bei der ersteren Weite, $\zeta = 0{,}485$; und bei der letzteren, $\zeta = 0{,}471$.

§. 467 **Bewegung der Luft in langen Röhren.** Mit Hülfe des Coefficienten $\zeta$ des Reibungswiderstandes einer Röhre, wie $BF$, läßt sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge bei gegebener Länge und Weite derselben u. s. w. bestimmen.

Ist $h_2$ der Stand des Manometers $M_2$ am Ende der Röhre $CF$, Fig. 797, unmittelbar vor dem Mundstück $F$, dessen Widerstandscoefficient

Fig. 797.




$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1$ sein möge, und bezeichnet $d$ die Weite der Röhre, sowie $d_1$

die Weite, also $\frac{\pi d_1^2}{4}$ den Inhalt der Mündung $F_1$, so hat man nach dem Obigen die Ausflußmenge:

$$Q = \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_2}{b}}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} = 1261 \mu_1 \pi \frac{d_1^2}{4} \sqrt{\frac{(1 + \delta\tau)\frac{h_2}{b}}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cbfß.}$$

sowie umgekehrt für den Manometerstand $h_2$,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_2}{b} = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu F_1}\right)^2.$$

Nun ist aber der Manometerstand am Anfang der Leitung,

$$h_1 = h_2 + \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

wenn $l$ die Länge der Röhre zwischen beiden Manometern $M_1$ und $M_2$, und $v$ die Geschwindigkeit des Luftstromes in dieser Röhre bezeichnet, daher hat man:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_1}{b} = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu_1 F_1}\right)^2 + \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \text{ oder}$$

$v = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 v_1$, und $v_1 = \frac{Q}{F_1}$ eingeführt,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_1}{b} = \left(\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{1}{\mu_1^2} + \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right) \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{F_1}\right)^2,$$

und es folgt daher die Ausflußmenge

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_1}{b}}{\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{1}{\mu_1^2} + \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$$

$$= 1261 \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{(1 + \delta\tau)\frac{h_1}{b}}{\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{1}{\mu_1^2} + \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cubikfuß.}$$

Ist endlich der Stand $h$ des Manometers $M$ im Reservoir $AB$ bekannt, so haben wir, wenn wir den Widerstandscoefficienten für den Eintritt bei $C$ durch $\zeta_0$ bezeichnen, und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1 + \zeta_1$ einzusetzen, da hier beim Eintritt in die Röhre die Druckhöhe $\zeta_0 \frac{v^2}{2g}$ verloren geht,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b} = \left[\left(\zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1\right] \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{F_1}\right)^2,$$

Digitized by Google

folglich die Ausflußmenge

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2\,g\,\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}}$$

$$= 1261\,\frac{\pi\,d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1 + 0{,}04\,\tau)\,\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}}$$ Cubikfuß.

Je nachdem der Einmündungspunkt um $s$ höher oder tiefer liegt als die Ausmündungsstelle, hat man in dem Zähler der Wurzelgröße zu $\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}$ noch $s$ zu addiren oder subtrahiren.

Beispiel. In dem Regulator am Kopfe einer 320 Fuß langen und 4 Zoll weiten Windleitung steht das Quecksilbermanometer auf 3,1 Zoll, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll mißt; es ist ferner die Mündungsweite des conisch zusammengezogenen Röhrenendes, $d_1 = 2$ Zoll, und die Temperatur der comprimirten Luft im Regulator, $\tau = 20$ Grad C., welches Windquantum liefert die Leitung?

Es ist hier $(1 + 0{,}004\,\tau)\,\frac{b}{h} = 1{,}08\cdot\frac{3{,}1}{27{,}2} = 0{,}1231$, ferner

$$\zeta_0 = \frac{1}{\mu_0^2} - 1 = \frac{1}{0{,}75^2} - 1 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} = 0{,}778, \text{ sowie}$$

$$\zeta_1\,\frac{l}{d} = 0{,}024\,.\,320\,.\,3 = 23{,}04,\ \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 = \left(\frac{2}{4}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625,$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = \frac{1}{0{,}92^2} - 1 = 0{,}330, \text{ und}$$

$$F_1 = \frac{\pi\,d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4}\,(1/6)^2 = \frac{3{,}1416}{144} = 0{,}021817 \text{ Quadratfuß},$$

daher folgt die gesuchte Windmenge

$$Q = 1261\,.\,0{,}021817\sqrt{\frac{0{,}1231}{(0{,}778 + 23{,}04)\,0{,}0625 + 1{,}330}}$$

$$= 27{,}51\sqrt{\frac{0{,}1231}{1{,}489 + 1{,}330}} = 27{,}51\sqrt{0{,}04367} = 5{,}744 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 468 **Ausfluss unter abnehmendem Drucke.** Wenn ein Windreservoir keinen Zufluß erhält, während durch eine Mündung in demselben ununterbrochenes Ausströmen statt hat, so nimmt die Dichtigkeit und Spannung allmälig ab, und es fällt daher auch die Ausflußgeschwindigkeit während des Ausflusses immer kleiner und kleiner aus. In welchem Verhältnisse nun diese Abnahme zur Zeit und zur Ausflußmenge in derselben steht, läßt sich auf folgende Weise ermitteln.

Digitized by Google

Es sei das Volumen des Reservoirs $V$, der anfängliche Manometerstand $= h_0$, und der Manometerstand am Ende einer gewissen Zeit $t$, $= h_1$, sowie der äußere Barometerstand $= b$. Dann ist das auf den äußeren Druck reducirte Luft- oder Windquantum im Reservoir anfangs

$$= \frac{V(b + h_0)}{b}$$

und am Ende der Zeit $t$

$$= \frac{V(b + h_1)}{b},$$

und folglich das innerhalb der Zeit $t$ ausgeflossene und unter dem äußeren Drucke gemessene Windquantum:

$$V_1 = \frac{V(b + h_0)}{b} - \frac{V(b + h_1)}{b} = \frac{V(h_0 - h_1)}{b}.$$

Nun hat man aber auch

$$V_1 = \mu F t \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{x}{b}},$$

wenn $x$ dem mittleren Manometerstand während der Ausflußzeit $t$ entspricht, daher folgt

$$t = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1} b\, x}} = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1} b}} (x)^{-1/2}.$$

Ferner ist, wenn $h_0 = m\sigma$ und $h_1 = n\sigma$ gesetzt wird, der Mittelwerth

$$(x)^{-1/2} = \frac{(\sigma)^{-1/2}}{m-n}(1^{-1/2} + 2^{-1/2} + \cdots + m^{-1/2}) - (1^{-1/2} + 2^{-1/2} + \cdots + n^{-1/2})$$

$$= \frac{(\sigma)^{-1/2}}{m-n}\left(\frac{m^{1/2}}{1/2} - \frac{n^{1/2}}{1/2}\right) = \frac{2(\sigma)^{-1/2}}{m-n}\left(\sqrt{\frac{h_0}{\sigma}} - \sqrt{\frac{h_1}{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{(m-n)\sigma} = \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{h_0 - h_1}$$ (s. Ingenieur S. 88);

daher folgt die gesuchte Ausflußzeit

$$t = \frac{2V(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{\mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1} b}} = \frac{2V}{\mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1}}} \left(\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}}\right).$$

Diese Bestimmung hat übrigens dann nur eine hinreichende Genauigkeit, wenn das Ausflußreservoir ($V$) groß, oder die Ausflußmündung, sowie die Pressungsdifferenz klein ist, wo die Abkühlung der Luft im Reservoir während des Ausflusses unbedeutend ausfällt.

Beispiel. Der 50 Fuß lange und 5 Fuß weite cylindrische Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen Manometerstand $h = 10$ Zoll und Thermometerstand 6° beträgt. Wenn nun der Wind durch eine 1 Zoll weite runde Mündung in einen Raum ausströmt, dessen Barometerstand 27 Zoll beträgt, so

Digitized by Google

entsteht die Frage, in welcher Zeit sinkt der Manometerstand auf 7 Zoll herab, und welches ist die entsprechende Ausflußmenge?

Das Volumen des Regulators oder Kessels ist:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 . 50 = 1250 \cdot \frac{\pi}{4} = 981{,}75 \text{ Cubikfuß, ferner}$$

$$\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}} = \sqrt{\frac{10}{27}} - \sqrt{\frac{7}{27}} = 0{,}09942,$$

$$\sqrt{2\,g\,\frac{p_1}{\gamma_1}} = 1261\,\sqrt{1 + 0{,}00367\,.\,\tau} = 1261\,\sqrt{1{,}02202} = 1275,$$

und

$$F = \frac{\pi}{4}\,(1/_{12})^2 = \frac{\pi}{576} = 0{,}005454 \text{ Quadratfuß.}$$

Setzt man nun noch den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}95$, so folgt die in Frage stehende Ausflußzeit:

$$t = \frac{2\,.\,981{,}75\,.\,0{,}09942}{0{,}95\,.\,0{,}005454\,.\,1275} = \frac{97{,}61}{3{,}303} = 29{,}55 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Eine allgemeinere Theorie des Ausflusses der Luft und des Wasserdampfes wird im zweiten Theile abgehandelt.

Schlußanmerkung. Versuche über den Ausfluß der Luft sind angestellt worden von Young, Schmidt, Lagerhjelm, Koch, d'Aubuisson, Buff, und in neuerer Zeit von Saint-Venant, Wantzel und Pecqueur. In Betreff der Versuche von Young und Schmidt ist nachzusehen in Gilbert's Annalen Bd. 22, 1801, und Bd. 6, 1820, und in Poggendorff's Annalen, Bd. 2, 1824, in Betreff derjenigen von Koch und Buff aber in den Studien des Götting'schen Vereines bergmännischer Freunde, Bd. 1, 1824; Bd. 3, 1833; Bd. 4, 1837 und Bd. 5, 1838; ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. 27, 1836 und Bd. 40, 1837. Nächstdem auch in Gerstner's Mechanik, Bd. 3, und in Hülsse's allgemeiner Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß". Die Lagerhjelm'schen Versuche werden behandelt in dem schwedischen Werke Hydrauliska Försök af Lagerhjelm, Forselles och Kallstenius, 1 Delen, Stockholm, 1818. Die Versuche d'Aubuisson's lernt man kennen in den Annales des Mines, Tome 11, 1825; Tome 13, 1826; Tome 34, 1827, dann aber auch in d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique. Ueber die Versuche von Saint-Venant und Wantzel siehe Comptes rendus hebd. des séances de l'Académie des sciences, à Paris 1839. Von den neuesten in Frankreich angestellten Versuchen handelt Poncelet in einer Note sur les expériences de M. Pecqueur relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. der Comptes rendus und hiervon im Auszuge das polytechnische Centralblatt, Bd. 6, 1845. Aus diesen Versuchen folgert Poncelet, daß die Luft bei ihrem Ausflusse denselben Gesetzen folge, wie das Wasser. Die meisten dieser Versuche sind mit sehr engen Mündungen angestellt worden, weshalb sie wohl schwerlich den Ansprüchen der Praxis Genüge leisten. Leider findet auch unter den Ergebnissen aller dieser Versuche nicht die erwünschte Uebereinstimmung statt, namentlich weichen auch die von d'Aubuisson gefundenen Ausflußcoefficienten von denen, welche sich aus den Koch'schen berechnen lassen, bedeutend ab. Vergleichende Versuche über das Aus- und Einströmen der Luft und über den Ausfluß des Wassers rapportirt des Verfassers Experimental-Hydraulik. Die Resultate der neuesten, im größeren Maßstabe vom Verfasser ausgeführten Versuche über den Ausfluß der Luft werden im 5. Bande des Civilingenieurs mitgetheilt.

Digitized by Google

## Siebentes Capitel.

## Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

**Fliessende Wasser.** Die Lehre von der Bewegung des Wassers in §. 469
Canälen und Flüssen macht den zweiten Haupttheil der Hydraulik aus. Das Wasser fließt entweder in einem natürlichen oder in einem künstlichen Bette (franz. lit; engl. bed). Im ersten Falle bildet es Ströme, Flüsse, Bäche, im zweiten Canäle, Gräben und Gerinne. Bei der Theorie der Bewegung der fließenden Wasser kommt auf diesen Unterschied nichts, oder nur wenig an.

Das Flußbett besteht aus dem Grundbette oder der Sohle (franz. font du lit; engl. bottom of the channel), und aus den beiden Ufern (franz. bords; engl. shores). Durch eine Ebene winkelrecht gegen die Bewegungsrichtung des fließenden Wassers ergiebt sich der Querschnitt (franz. section; engl. perpendicular-section) desselben. Der Umfang desselben ist das Quer- oder Breitenprofil, welches wieder aus dem Wasser- und dem Luftprofile besteht. Eine Verticalebene in der Richtung des fließenden Wassers giebt den Längendurchschnitt und das Längenprofil (franz. profil; engl. profile) desselben. Unter Abhang (franz. pente; eng. declivity, slope) eines fließenden Wassers versteht man den Neigungswinkel seiner Oberfläche gegen den Horizont. Um diesen auf eine bestimmte Länge eines fließenden Wassers anzugeben, dient das Gefälle (franz. chute; engl. fall), welches der Verticalabstand der beiden Endpunkte im Wasserspiegel einer bestimmten Flußstrecke ist. Rösche ist das Gefälle für die Längenerstreckung $= 1$. Für die Flußstrecke $AD = l$, Fig. 798, ist $BC$ das Grundbette, $DH = h$ das Gefälle und der Winkel $DAH = \delta$ der Abhang; die Rösche aber ist

Fig. 798.

$$sin.\ \delta = \frac{h}{l},\ \text{oder annähernd,}\ \delta = \frac{h}{l}.$$

Anmerkung. Das Gefälle der Bäche und Flüsse ist sehr verschieden. So hat z. B. die Elbe auf eine deutsche Meile Erstreckung von Hohenelbe bis Podiebrad, 57 Fuß, von da bis Leitmeritz 9 Fuß, von da bis Mühlberg im Mittel 5,8 und von Mühlberg bis Magdeburg, 2,5 Fuß Gefälle. Gebirgsbäche haben auf die Meile ein Gefälle von 40 bis 400 Fuß. Näheres hierüber siehe: „Vergleichende hydrographische Tabellen u. s. w. von Stranz." Canäle oder andere künstliche Wasserleitungen erhalten viel kleinere Gefälle. Hier ist die Rösche meistens unter 0,001, oft 0,0001 und noch kleiner. Mehr hierüber im zweiten Theile.

Digitized by Google

§. 470 **Verschiedene Geschwindigkeiten eines Querprofiles.** Die Geschwindigkeit des Wassers in einem und demselben Querprofile ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden. Die Adhäsion des Wassers an dem Bette und der Zusammenhang der Wassertheile unter einander bewirken, daß die den Bettwänden näher liegenden Wassertheile in ihrer Bewegung mehr aufgehalten werden und daher langsamer fließen, als die entfernteren. Aus diesem Grunde nimmt die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Bette zu ab, und es ist dieselbe am Boden und nahe den Ufern am kleinsten. Die größte Geschwindigkeit befindet sich bei geraden Flußstrecken meist in der Mitte oder an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Wassers, wo es die größte Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Wasser die größte Geschwindigkeit hat, den Stromstrich, und die tiefste Stelle im Bette die Stromrinne.

Bei Krümmungen ist der Stromstrich in der Regel nahe dem concaven Ufer.

Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers innerhalb eines Querprofiles ist nach §. 396:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{\text{Wasserquantum pr. Secunde}}{\text{Inhalt des Querschnittes}}.$$

Außerdem läßt sich die mittlere Geschwindigkeit auch noch aus den Geschwindigkeiten $c_1$, $c_2$, $c_3$ u. s. w. der einzelnen Theile des Querprofiles und aus den Inhalten $F_1$, $F_2$, $F_3$ u. s. w. der letzteren berechnen. Es ist nämlich:

$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \cdots,$$

und daher auch:

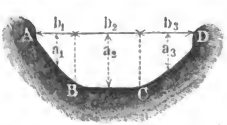
$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots}.$$

Außer der mittleren Geschwindigkeit führt man auch die mittlere Wassertiefe, also diejenige Tiefe $a$ ein, welche ein Querprofil an allen Stellen haben müßte, damit es ebenso viel Inhalt erhielte, als es bei den veränderlichen Tiefen $a_1$, $a_2$, $a_3$ u. s. w. wirklich hat. Es ist also hiernach:

$$a = \frac{F}{b} = \frac{\text{Inhalt des Querschnittes}}{\text{Breite des Querschnittes}}.$$

Sind die den einzelnen Breitentheilen $b_1, b_2, b_3$ u. s. w. entsprechenden mittleren Tiefen $a_1$, $a_2$, $a_3$ u. s. w., Fig. 799, so hat man:

Fig. 799.




$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots,$$

und daher auch:

$$a = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}{b_1 + b_2 + \cdots}.$$

Endlich ist die mittlere Geschwindigkeit auch

Digitized by Google

$$c = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots},$$

und bei gleicher Größe der Theile $b_1$, $b_2$ u. ſ. w.:

$$c = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots}{a_1 + a_2 + \cdots}.$$

Ein Fluß oder Bach iſt im **Beharrungszuſtande** (franz. permanence; engl. permanency), wenn durch jeden ſeiner Querſchnitte in gleicher Zeit eine gleiche Waſſermenge fließt, wenn alſo $Q$ oder das Product $Fc$ aus dem Inhalte des Querprofiles und aus der mittleren Geſchwindigkeit auf die ganze Flußſtrecke eine unveränderliche Zahl iſt. Hieraus folgt nun das einfache Geſetz: **bei der permanenten Bewegung des Waſſers verhalten ſich die mittleren Geſchwindigkeiten innerhalb zweier Querprofile umgekehrt wie die Inhalte dieſer Profile.**

Beiſpiele. 1) An dem Querprofile $ABCD$, Fig. 799, eines Canales hat man gefunden:
Breitentheile:

$$b_1 = 3{,}1 \text{ Fuß}, \; b_2 = 5{,}4 \text{ Fuß}, \; b_3 = 4{,}3 \text{ Fuß},$$

mittlere Tiefen:

$$a_1 = 2{,}5 \text{ Fuß}, \; a_2 = 4{,}5 \text{ Fuß}, \; a_3 = 3{,}0 \text{ Fuß},$$

entſprechende mittlere Geſchwindigkeiten:

$$c_1 = 2{,}9 \text{ Fuß}, \; c_2 = 3{,}7 \text{ Fuß}, \; c_3 = 3{,}2 \text{ Fuß},$$

daher läßt ſich ſetzen der Inhalt dieſes Profiles:

$$F = 3{,}1 . 2{,}5 + 5{,}4 . 4{,}5 + 4{,}3 . 3{,}0 = 44{,}95 \text{ Quadratfuß},$$

ferner die Waſſermenge:

$$Q = 3{,}1 . 2{,}5 . 2{,}9 + 5{,}4 . 4{,}5 . 3{,}7 + 4{,}3 . 3{,}0 . 3{,}2 = 153{,}665 \text{ Cubikfuß},$$

und die mittlere Geſchwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{153{,}665}{44{,}95} = 3{,}419 \text{ Fuß}.$$

2) Wenn ein Graben pr. Secunde 4,5 Cubikfuß Waſſer mit einer mittleren Geſchwindigkeit $c$ von 2 Fuß fortführen ſoll, ſo hat man ihm ein Querprofil von $\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$ Quadratfuß Inhalt zu geben.

3) Wenn ein und derſelbe Fluß an einer Stelle bei 560 Fuß Breite und 9 Fuß mittlerer Tiefe eine mittlere Geſchwindigkeit von $2\frac{1}{4}$ Fuß hat, ſo wird er an einer anderen Stelle, bei 320 Fuß Breite und 7,5 Fuß mittlerer Tiefe, die mittlere Geſchwindigkeit:

$$c = \frac{560 . 9}{320 . 7{,}5} \cdot 2{,}25 = \frac{567}{120} = 4{,}725 \text{ Fuß}$$

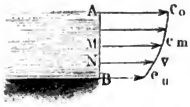
haben.

**Mittlere Geſchwindigkeit.** Wenn man die Waſſertiefe an irgend §. 471
einer Stelle eines fließenden Waſſers in gleiche Theile theilt, und die entſprechenden Geſchwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, ſo erhält man eine ſogenannte **Stromgeſchwindigkeitsſcala** $AB$, Fig. 800. Obwohl es als ausgemacht anzuſehen iſt, daß das Geſetz dieſer Scala oder der Geſchwindig-

Digitized by Google

keitsveränderung durch irgend eine Curve, wie z. B. nach Gerstner, durch eine Ellipse u. s. w. ausgedrückt wird, so läßt sich doch auch ohne einen großen Fehler befürchten zu müssen, eine gerade Linie substituiren, oder annehmen, daß die Geschwindigkeit nach der Tiefe gleichmäßig abnehme, weil die Abnahme der Geschwindigkeit nach unten immer nur eine mäßige ist. Aus den Versuchen von Ximenes, Brünnings und Funk ergiebt sich, daß die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel

Fig. 800.




$$c_m = 0{,}915\, c_0$$

ist, wenn $c_0$ die Geschwindigkeit an der Oberfläche oder die Maximalgeschwindigkeit bezeichnet. Es nimmt also hiernach die Geschwindigkeit von oben bis zur Mitte $M$ um

$$c_0 - c_m = (1 - 0{,}915)\, c_0 = 0{,}085\, c_0$$

ab, und es läßt sich folglich die Geschwindigkeit unten oder am Fußpunkte des Perpendikels,

$$c_u = c_0 - 2\,.\,0{,}085\, c_0 = (1 - 0{,}170)\, c_0 = 0{,}83\, c_0$$

setzen. Ist nun die ganze Tiefe $AB = a$, so hat man, bei Annahme einer der geraden Linie entsprechenden Geschwindigkeitsscala für eine Tiefe $AN = x$ unter dem Wasser, die entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = c_0 - (c_0 - c_u)\,\frac{x}{a} = \left(1 - 0{,}17\,\frac{x}{a}\right) c_0.$$

Sind ferner noch $c_0$, $c_1$, $c_2$ ... die Oberflächengeschwindigkeiten eines ganzen Querprofiles von nicht sehr veränderlicher Tiefe, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten in der mittleren Tiefe:

$$0{,}915\, c_0,\ 0{,}915\, c_1,\ 0{,}915\, c_2,$$

und daher die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}915\,\frac{(c_0 + c_1 + c_2 + \cdots c_n)}{n}.$$

Nehmen wir endlich an, daß die Geschwindigkeit vom Stromstriche aus nach den Ufern zu ebenso abnehme wie nach der Tiefe zu, so können wir wieder die mittlere Oberflächengeschwindigkeit

$$\frac{c_0 + c_1 + \cdots + c_n}{n} = 0{,}915\, c_0$$

setzen, und erhalten so die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile

$$c = 0{,}915\,.\,0{,}915\,.\,c_0 = 0{,}837\,.\,c_0,$$

d. i. 83 bis 84 Procent der Maximal- oder Stromstrichgeschwindigkeit.

Prony leitet aus den allerdings nur in kleinen Gräben angestellten Versuchen du Buat's und für diese Fälle vielleicht noch genauer

Digitized by Google

$$c_m = \left(\frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0}\right) c_0 \text{ Meter} = \left(\frac{7{,}50 + c_0}{9{,}97 + c_0}\right) c_0 \text{ Fuß}$$

ab. Für mittlere Geschwindigkeiten von 3 Fuß folgt hiernach:

$$c_m = 0{,}81\, c_0.$$

Fließt das Wasser **nicht frei**, sondern ist es durch eine Verengerung des Querprofiles **gestaut**, so fällt $c_m$ noch größer aus.

Beispiel. Wenn im Stromstriche eines Flusses die Geschwindigkeit des Wassers 4 Fuß und die Tiefe 6 Fuß ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit im entsprechenden Perpendikel:

$$c_m = 0{,}915 \,.\, 4 = 3{,}66 \text{ Fuß},$$

und die am Boden:

$$= 0{,}83 \,.\, 4 = 3{,}32 \text{ Fuß};$$

ferner die Geschwindigkeit bei 2 Fuß unter der Oberfläche:

$$v = (1 - 0{,}17 \,.\, \tfrac{2}{6}) \,.\, 4 = (1 - 0{,}057) \,.\, 4 = 3{,}772 \text{ Fuß},$$

endlich die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}837 \,.\, 4 = 3{,}348 \text{ Fuß},$$

dagegen nach **Prony**:

$$c = \frac{11{,}50}{13{,}97} \cdot 4 = \frac{46}{13{,}97} = 3{,}29 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Ueber diesen und über die nächstfolgenden Gegenstände wird ausführlich gehandelt in der allgemeinen Maschinenencyklopädie, Artikel „Bewegung des Wassers". Neue Versuche und neue Ansichten hierüber findet man in folgender Schrift: Lahmeyer, Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen, Braunschweig 1845. Nach Baumgarten's Beobachtungen (s. Annales des Ponts et Chaussées, Paris 1848, sowie polytechnisches Centralblatt, Nr. 14, 1849) giebt diese Formel bei größeren Geschwindigkeiten (über 1,5 Meter) zu große Werthe, und es ist für solche

$$c_m = \left(\frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0}\right) \cdot 0{,}8\; c_0 \text{ Meter}$$

zu setzen.

Die Marimalgeschwindigkeit des Wassers kommt immer etwas unterhalb der Oberfläche des Wassers vor, was jedenfalls seinen Grund in dem Widerstande der Luft hat. Von der Stelle der Marimalgeschwindigkeit an nimmt die Geschwindigkeit mit dem Quadrate der Tiefe ab, wonach also die Geschwindigkeitsscala einer Parabel entspricht. Ebenso soll nach Boileau (s. dessen Traité sur la mesure des eaux) vom Stromstriche aus die Geschwindigkeit mit dem Quadrate des Abstandes von dieser Stelle abnehmen. Bezeichnet $c_0$ die Geschwindigkeit im Stromstriche, so ist hiernach die Geschwindigkeit im Horizontalabstande $x$:

$$c_x = c_0 - \mu\, x^2,$$

wobei $\mu$ eine allerdings bei verschiedenen Flüssen verschiedene Erfahrungszahl bezeichnet.

**Vortheilhafteste Querprofile.** Der **Widerstand**, welchen das Bette §. 472
der Bewegung des Wassers in Folge der Adhäsion, Klebrigkeit oder Reibung entgegensetzt, wächst mit der Berührungsfläche zwischen dem Bette und dem Wasser, und also auch mit dem Umfange $p$ des Wasserprofiles oder im Bette

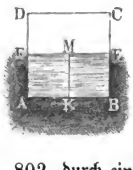
Digitized by Google

liegenden Theiles vom Querprofile. Da aber durch ein Querprofil um so mehr Wasserfäden hindurchgehen, je größer der Inhalt eines solchen ist, so wächst der Widerstand eines Wasserfadens auch umgekehrt wie der Inhalt, und daher im Ganzen wie der Quotient $\frac{p}{F}$ aus dem Umfange des Wasserprofiles und dem Inhalte $F$ des ganzen Querprofiles.

Damit nun dieser Reibungswiderstand eines fließenden Wassers möglichst klein ausfalle, hat man dem Querprofile diejenige Gestalt zu geben, bei welcher $\frac{p}{F}$ möglichst klein ist, für welche also der Umfang $p$ bei gegebenem Inhalte ein Minimum, oder der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Maximum werde. Bei ringsumschlossenen Wasserleitungen, wie z. B. bei Röhren, ist $p$ der ganze Umfang der vom Querprofile gebildeten Figur. Nun hat aber unter allen Figuren von gleicher Seitenzahl allemal die regelmäßige, und unter allen regelmäßigen Figuren wieder diejenige, deren Seitenzahl die größere ist, bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang, daher fällt auch bei ringsumschlossenen Wasserleitungen der Reibungswiderstand um so kleiner aus, je mehr ihr Querprofil einer regelmäßigen Figur sich nähert, und je größer die Seitenzahl derselben ist, und es ist der Kreis, als eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten, in diesem Falle das dem kleinsten Reibungswiderstande entsprechende Querprofil. Bei den oben offenen Wasserleitungen ist das Verhältniß ein anderes, weil die obere Seite des Querprofiles frei oder vielmehr nur mit Luft in Berührung ist, die, so lange sie sich in Ruhe befindet, dem Wasser keinen oder nur einen sehr kleinen Widerstand entgegensetzt. Wir müssen also auch bei Beurtheilung dieses Reibungswiderstandes in dem Quotienten $\frac{p}{F}$ die obere Seite oder das sogenannte Luftprofil außer Acht lassen.

Bei Anwendung von Canälen, Gräben und Gerinnen kommen in der Regel nur rectanguläre und trapezoidale Querprofile vor. Eine durch den Mittelpunkt $M$ des Quadrates $AC$ gehende Horizontale $EF$, Fig. 801, theilt sowohl den Inhalt als auch den Umfang in zwei gleiche Theile, daher bleibt dann das, was für das Quadrat gilt, auch für diese Hälfte richtig, und es entspricht sonach unter allen rectangulären Querprofilen das halbe Quadrat $AE$, oder dasjenige, welches doppelt so breit als hoch ist, dem kleinsten Reibungswiderstande.

Fig. 801.




Ebenso wird das regelmäßige Sechseck $ACE$, Fig. 802, durch eine Horizontale $CF$ in zwei gleiche Trapeze zertheilt, wovon jedes, wie das ganze Sechseck, den größten relativen Inhalt hat, und

Digitized by Google

es iſt folglich unter allen trapezoidalen Querprofilen das halbe regelmäßige Sechseck oder das Trapez $ABCF$ mit Böſchungswinkeln $AFM = BCM$, von 60° dasjenige, bei deſſen Anwendung der kleinſte Reibungswiderſtand eintritt.

Ebenſo liefern das halbe regelmäßige Achteck $ADE$, Fig. 803, das halbe regelmäßige Zehneck u. ſ. w. und endlich der Halbkreis $ADB$, Fig. 804, unter gegebenen Umſtänden die vortheilhafteſten Querprofile für

Fig. 802.

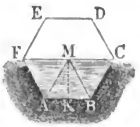
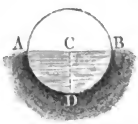



Fig. 803.

Fig. 804.




Canäle. Das trapezoidale oder halbe regelmäßige Sechseck giebt noch einen kleineren Widerſtand als das halbe Quadrat oder Rechteck mit dem Seitenverhältniß 1 : 2, weil das Sechseck einen kleineren relativen Umfang hat als das Quadrat. Das halbe regelmäßige Zehneck führt auf eine noch kleinere Reibung, und dem Halbkreiſe entſpricht allerdings das Minimum der Reibung. Nach dem Halbkreiſe und nach dem Rechtecke werden nur die Profile von Gerinnen aus Holz, Stein oder Eiſen gebildet, nach Trapezen hingegen conſtruirt man die Querprofile von ausgegrabenen und gemauerten Canälen. Andere Formen werden wegen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht leicht angewendet.

§. 473

In den Fällen, wenn Canäle nicht ausgemauert, ſondern in der lockeren Erde oder in Sand ausgegraben werden, iſt der Böſchungswinkel von 60° zu groß oder die relative Böſchung *cotang.* 60° = 0,57735 zu klein, weil die Ufer noch nicht hinreichende Stabilität erhalten; man wird daher genöthigt, trapezoidale Querprofile anzuwenden, bei welchen die Neigung der Seiten gegen die Baſis noch kleiner als 60°, vielleicht nur 45° oder ſogar noch kleiner iſt. Bei einem trapezoidalen Querprofile $ABCD$, Fig. 805 (a. f. S.), welches mit dem halben Quadrate gleichen Umfang und Inhalt hat, iſt die relative Böſchung = $^4/_3$ und der Böſchungswinkel nur 36° 52′. Theilt man die Höhe $BE$ dieſes Profiles in drei gleiche Theile, ſo hat die Baſis $BC$ deren 2, die Parallele $AD$, 10, und jede der Seiten $AB = CD$, = 5 Theile. In vielen Fällen macht man die Böſchung = 2, deren Winkel 26° 34′ beträgt, und zuweilen macht man ſie noch größer.

Jedenfalls läßt ſich der Böſchungswinkel $BAE = \theta$, Fig. 806, oder die Böſchung $\frac{AE}{BE} = \mathit{cotang.}\ \theta$ als eine gegebene und von der

Digitized by Google

Natur des Erdreiches, worin der Canal ausgegraben wird, abhängige Größe anſehen, und es ſind daher nur noch die Dimenſionen des den kleinſten

Fig. 805.

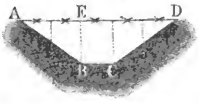



Fig. 806.

Widerſtand gebenden Querprofiles zu beſtimmen. Setzen wir die untere Breite $BC = b$, die Tiefe $BE = a$ und die Böſchung $\frac{AE}{BE} = v$, ſo erhalten wir für den Umfang des Profiles:

$$AB + BC + CD = p = b + 2\sqrt{a^2 + v^2a^2} = b + 2a\sqrt{1 + v^2},$$

für den Inhalt deſſelben:

$$F = ab + vaa = a\,(b + va),$$

und daher umgekehrt:

$$b = \frac{F}{a} - va,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{v^2 + 1} - v).$$

Führt man ſtatt $a, a + x$ ein, wo $x$ eine kleine Zahl bezeichnet, ſo läßt ſich

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a + x} + \frac{(a + x)}{F}\,(2\sqrt{v^2 + 1} - v)$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{a + x}{F}\,(2\sqrt{v^2 + 1} - v)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{v^2 + 1} - v) + \left(\frac{2\sqrt{v^2 + 1} - v}{F} - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{x^2}{a^3}$$

ſetzen.

Damit nun dieſer Werth nicht allein für einen poſitiven, ſondern auch für einen negativen Werth von $x$ größer ausfalle, als der erſte Werth

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{v^2 + 1} - v),$$

damit alſo $\frac{p}{F}$ zum Minimum werde, iſt nöthig, daß das Glied mit dem Factor $x$ verſchwinde, daß alſo

$$\frac{2\sqrt{v^2 + 1} - v}{F} - \frac{1}{a^2} = 0 \text{ ſei,}$$

wonach für die geſuchte Canaltiefe $a$ folgt:

$$a^2 = \frac{F}{2\sqrt{v^2 + 1} - v},$$

Digitized by Google

oder, da $v = cotang.\,\theta$ und $\sqrt{v^2 + 1} = \frac{1}{sin.\,\theta}$ iſt:

$$a^2 = \frac{F\,sin.\,\theta}{2 - cos.\,\theta}.$$

Hiernach iſt alſo die in einem gegebenen Böſchungswinkel $\theta$ und einem gegebenen Inhalte entſprechende zweckmäßigſte Form des Querprofiles beſtimmt durch die Formel

$$a = \sqrt{\frac{F\,sin.\,\theta}{2 - cos.\,\theta}} \text{ und } b = \frac{F}{a} - a\,cotang.\,\theta.$$

Es iſt folglich die obere Breite $A\,D$ des Querprofiles:

$$b_1 = b + 2\,v\,a = \frac{F}{a} + a\,cotang.\,\theta,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{b}{F} + \frac{2\,a}{F\,sin.\,\theta} = \frac{1}{a} + \frac{(2 - cos.\,\theta)\,a}{F\,sin.\,\theta} = \frac{2}{a}.$$

Beiſpiel. Welche Dimenſionen ſind dem Querprofile eines Canales zu geben, deſſen Ufer 40° Böſchung erhalten ſollen, und der beſtimmt iſt, bei einer mittleren Geſchwindigkeit von 3 Fuß ein Waſſerquantum $Q$ von 75 Cubikfuß fortzuführen? Es iſt

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{75}{3} = 25 \text{ Quadratfuß, daher die erforderliche Tiefe:}$$

$$a = \sqrt{\frac{25\,sin.\,40^0}{2 - cos.\,40^0}} = 5\sqrt{\frac{0{,}64279}{1{,}23396}} = 3{,}609 \text{ Fuß, die untere Breite:}$$

$$b = \frac{25}{3{,}609} - 3{,}609\,cotang.\,40^0 = 6{,}927 - 4{,}301 = 2{,}626 \text{ Fuß,}$$

die Böſchung oder Ausladung der Ufer,

$v\,a = a\,cotang.\,\theta = 3{,}609\,.\,cotang.\,40^0 = 4{,}301$, die obere Breite

$b_1 = b + 2\,a\,cotang.\,\theta = 6{,}927 + 4{,}301 = 11{,}228$ Fuß,

der Umfang:

$$p = b + \frac{2\,a}{sin.\,\theta} = 2{,}626 + \frac{7{,}218}{sin.\,40^0} = 13{,}855 \text{ Fuß,}$$

und das den Reibungswiderſtand beſtimmende Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3{,}609} = 0{,}5542.$$

Bei dem Querprofile in Form eines halben regelmäßigen Rechteckes, wo $\theta = 60^0$ iſt, fällt $a = 3{,}80$ Fuß, $b = 4{,}39$, $b_1 = 8{,}78$ und $p = 13{,}16$ Fuß aus, daher iſt

$$\frac{p}{F} = \frac{13{,}16}{25} = 0{,}526.$$

**Tabelle der vortheilhaftesten Querprofile.** Die Dimenſionen §. 474
der, verſchiedenen Böſchungswinkeln und einem gegebenen Querſchnitte entſprechenden, zweckmäßigſten Querprofile giebt folgende Tabelle an.



Digitized by Google

| Böschungswinkel $\theta$. | Relative Böschung $\nu$. | Dimensionen der Querprofile. Tiefe $a$. | Untere Breite $b$. | Absolute Böschung $\nu a$. | Obere Breite $b + 2\nu a$. | Quotient $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 90° | 0 | $0{,}707\sqrt{F}$ | $1{,}414\sqrt{F}$ | 0 | $1{,}414\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$ |
| 60° | 0,577 | $0{,}760\sqrt{F}$ | $0{,}877\sqrt{F}$ | $0{,}439\sqrt{F}$ | $1{,}755\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}632}{\sqrt{F}}$ |
| 45° | 1,000 | $0{,}740\sqrt{F}$ | $0{,}613\sqrt{F}$ | $0{,}740\sqrt{F}$ | $2{,}092\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}704}{\sqrt{F}}$ |
| 40° | 1,192 | $0{,}722\sqrt{F}$ | $0{,}525\sqrt{F}$ | $0{,}860\sqrt{F}$ | $2{,}246\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}771}{\sqrt{F}}$ |
| 36°52′ | 1,333 | $0{,}707\sqrt{F}$ | $0{,}471\sqrt{F}$ | $0{,}943\sqrt{F}$ | $2{,}357\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$ |
| 35° | 1,402 | $0{,}697\sqrt{F}$ | $0{,}439\sqrt{F}$ | $0{,}995\sqrt{F}$ | $2{,}430\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}870}{\sqrt{F}}$ |
| 30° | 1,732 | $0{,}664\sqrt{F}$ | $0{,}356\sqrt{F}$ | $1{,}150\sqrt{F}$ | $2{,}656\sqrt{F}$ | $\frac{3{,}012}{\sqrt{F}}$ |
| 26°34′ | 2,000 | $0{,}636\sqrt{F}$ | $0{,}300\sqrt{F}$ | $1{,}272\sqrt{F}$ | $2{,}844\sqrt{F}$ | $\frac{3{,}144}{\sqrt{F}}$ |
| Halbkreis | — | $0{,}798\sqrt{F}$ | — | — | $1{,}596\sqrt{F}$ | $\frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$ |

Man ersieht aus dieser Tafel, daß allerdings beim Halbkreise der Quotient $\frac{p}{F}$ am kleinsten, nämlich $= \frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$ ist, daß er beim halben Sechseck größer, beim halben Quadrate und beim Trapeze von 36°52′ Böschung aber noch größer ausfällt u. s. w.

Beispiel. Welche Dimensionen sind einem Querprofile zu geben, welches bei 40 Quadratfuß Inhalt eine Uferböschung von 35° hat? Nach der vorstehenden Tafel ist die Tiefe:

$$a = 0{,}697\sqrt{40} = 4{,}408, \text{ die untere Breite}$$
$$b = 0{,}439\sqrt{40} = 2{,}777 \text{ Fuß, die absolute Böschung}$$
$$\nu a = 0{,}995\sqrt{40} = 6{,}293 \text{ Fuß, die obere Breite}$$
$$b_1 = 15{,}363,$$

Digitized by Google

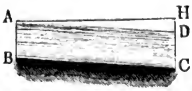
und der Quotient:

$$\frac{p}{F} = \frac{2{,}870}{\sqrt{40}} = 0{,}4538.$$

**Gleichförmige Bewegung.** Die Bewegung des Waſſers in Betten §. 475
iſt auf einer gewiſſen Strecke entweder gleichförmig oder ungleichförmig; gleichförmig, wenn die mittlere Geſchwindigkeit in allen Querſchnitten dieſer Strecke ſich gleichbleibt, und alſo auch die Inhalte der Querſchnitte gleich ſind; ungleichförmig hingegen, wenn die mittleren Geſchwindigkeiten und alſo auch die Inhalte der Querſchnitte ſich verändern. Zunächſt iſt von der gleichförmigen Bewegung die Rede.

Bei der gleichförmigen Bewegung des Waſſers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 807, wird das ganze Gefälle $HD = h$ nur auf die Ueberwindung der Reibung des Waſſers im Bette verwendet, weil das Waſſer mit derſelben Geſchwindigkeit fortfließt, mit welcher es zuſtrömt, alſo eine Geſchwindigkeitshöhe weder gebunden noch frei wird. Meſſen wir nun dieſe Reibung durch die Höhe jener Wäſſerſäule, ſo können wir folglich das Gefälle dieſer Höhe gleichſetzen. Die Reibungswiderſtandshöhe wächſt aber mit dem Quotienten $\frac{p}{F}$, mit $l$ und mit dem Quadrate der mittleren Geſchwindigkeit $c$ (§. 427), daher gilt denn die Formel:

Fig. 807.




$$1)\quad h = \zeta \cdot \frac{l\,p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

worin $\zeta$ eine Erfahrungszahl ausdrückt, welche der Coefficient des Reibungswiderſtandes zu nennen iſt.

Durch Umkehrung folgt

$$2)\quad c = \sqrt{\frac{F}{\zeta \cdot l\,p} \cdot 2\,g\,h}.$$

Es kommt alſo bei der Beſtimmung des Gefälles aus der Länge, dem Querprofile und der Geſchwindigkeit, ſowie umgekehrt, bei der Ermittelung der Geſchwindigkeit aus dem Gefälle, der Länge und dem Querprofile, auf die Kenntniß des Reibungscoefficienten $\zeta$ an. Nach den Eytelwein'ſchen Berechnungen der 91 Beobachtungen von du Buat, Brünings, Funk und Woltmann iſt $\zeta = 0{,}007565$, und daher:

$$h = 0{,}007565 \cdot \frac{l\,p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man $g = 9{,}809$ Meter oder 31,25 Fuß ein, ſo erhält man für Metermaß:



Digitized by Google

$$h = 0{,}0003856\,\frac{lp}{F}\cdot c^2 \text{ und } c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}},$$

dagegen für das Fußmaß:

$$h = 0{,}00012103\,\frac{lp}{F}\cdot c^2 \text{ und } c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}.$$

Bei Röhrenleitungen ist $\frac{lp}{F} = \frac{\pi l d}{{}^1/_4\,\pi d^2} = \frac{4l}{d}$, daher giebt diese Formel für Röhren:

$$h = 0{,}03026\,\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

während wir richtiger (§. 428) für diese bei mittleren Geschwindigkeiten:

$$h = 0{,}025\,\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

gefunden haben. Es ist also, wie zu erwarten stand, die Reibung in Flußbetten größer, als in metallenen Röhrenleitungen.

Beispiele. 1) Welches Gefälle ist einem Canale von der Länge $l = 2600$ Fuß, unteren Breite $b = 3$ Fuß, oberen Breite $b_1 = 7$ Fuß, und der Tiefe $a = 3$ Fuß zu geben, wenn er ein Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß pr. Secunde fortführen soll? Es ist:

$$p = 3 + 2\sqrt{2^2 + 3^2} = 10{,}211,\quad F = \frac{(7+3)3}{2} = 15,\text{ und } c = {}^{40}/_{15} = {}^8/_3,$$

daher das gesuchte Gefälle:

$$h = 0{,}000121\cdot\frac{2600\,.\,10{,}211}{15}\cdot({}^8/_3)^2 = \frac{0{,}3146\,.\,10{,}211\,.\,64}{15\,.\,9} = 1{,}52 \text{ Fuß}.$$

2) Welches Wasserquantum liefert ein Canal von 5800 Fuß Länge bei 3 Fuß Gefälle, 5 Fuß Tiefe, 4 Fuß unterer und 12 Fuß oberer Breite? Hier ist:

$$\frac{p}{F} = \frac{4 + 2\sqrt{5^2 + 4^2}}{5\,.\,8} = \frac{16{,}806}{40} = 0{,}42015,$$

daher die Geschwindigkeit:

$$c = 90{,}9\sqrt{\frac{3}{0{,}42015\,.\,5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{0{,}14005\,.\,5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{812{,}29}}$$
$$= \frac{90{,}9}{28{,}5} = 3{,}19 \text{ Fuß},$$

und das Wasserquantum:

$$Q = Fc = 40\,.\,3{,}19 = 127{,}6 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 476 **Reibungscoefficienten.** Auch bei Flüssen, Bächen u. s. w. zeigt sich der Widerstandscoefficient, wofür wir im vorigen Paragraphen den mittleren Werth 0,007565 angegeben haben, nicht constant, sondern, wie bei Röhren, bei kleinen Geschwindigkeiten etwas zu- und bei großen etwas abnehmend. Man hat also zu setzen:

$$\zeta = \zeta_1\left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) \text{ oder } \zeta_1\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{c}}\right) \text{ oder dergl.}$$

Digitized by Google

Der Verfasser der schon in der Anmerkung zu §. 471 angeführten Schrift findet aus 255 zum großen Theil von ihm angestellten Versuchen für das preuß. Maß:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}1865}{c}\right),$$

und es folgt hiernach für das Metermaß:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}05853}{c}\right).$$

Man sieht, daß diese Formeln bei einer Geschwindigkeit $c = 8\,1/2$ Fuß den oben angegebenen mittleren Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}007565$ wiedergeben. Zur Erleichterung der Rechnung dient folgende für das Metermaß zunächst brauchbare Tabelle der Widerstandscoefficienten:

| Geschwindigkeit $c$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | Meter. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$ | 1175 | 0958 | 0885 | 0849 | 0828 | 0813 | 0803 | 0795 | 0789 | |

| Geschwindigkeit $c$ | 1 | 1,2 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 Meter. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$ | 0784 | 0777 | 0771 | 0763 | 0755 | 0752 | 0750 |

Für das preuß. Fußmaß gilt folgende Tabelle:

| Geschwindigkeit $c$ | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | $1\,1/2$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 15 Fuß. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$ | 1202 | 1096 | 1017 | 0971 | 0938 | 0914 | 0894 | 0879 | 0833 | 0810 | 0787 | 0769 | 0761 | 0755 | 07501 |

Diese Tabellen finden eine unmittelbare Anwendung in allen den Fällen, wenn die Geschwindigkeit $c$ gegeben ist und das Gefälle gesucht wird, und wenn die Formel Nr. 1 des vorigen Paragraphen in Anwendung kommt. Ist aber die Geschwindigkeit $c$ unbekannt oder die zu suchende Größe, so gestattet diese Tabelle nur dann eine unmittelbare Anwendung, wenn man schon einen Näherungswerth von $c$ hat. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man erst annähernd $c$ durch eine der Formeln

Digitized by Google

$$c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Meter oder } c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Fuß,}$$

bestimmt, dann hieraus, mittels der Tabelle, $\zeta$ ermittelt, und den so erhaltenen Werth in der Formel:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{\zeta} \cdot \frac{F}{lp}, \text{ oder:}$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\zeta lp}} \cdot 2gh \text{ einsetzt.}$$

Aus der Geschwindigkeit $c$ folgt dann auch noch das Wasserquantum mittels der Formel $Q = Fc$.

Ist endlich das Wasserquantum und Gefälle gegeben und, wie es bei Anlegung von Canälen oft vorkommt, das Querprofil zu bestimmen, so setze man $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ (s. Tabelle §. 474) und $c = \frac{Q}{F}$ in die Formel:

$$h = 0{,}007565\ \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}, \text{ schreibe also:}$$

$$h = 0{,}007565\ \frac{ml\,Q^2}{2g\,F^{5/2}}, \text{ und bestimme hiernach:}$$

$$F = \left(0{,}007565\ \frac{ml\,Q^2}{2gh}\right)^{2/5}, \text{ d. i. für Metermaß:}$$

$$F = 0{,}0431\ \left(\frac{ml\,Q^2}{h}\right)^{2/5}, \text{ oder für Fußmaß:}$$

$$F = 0{,}0271\ \left(\frac{ml\,Q^2}{h}\right)^{2/5}.$$

Hieraus folgt nun annähernd:

$$c = \frac{Q}{F};$$

nimmt man diesem Werth entsprechend, $\zeta$ aus einer der Tabellen, so läßt sich

$$F = \left(\zeta \cdot \frac{ml\,Q^2}{2gh}\right)^{2/5}$$

genauer berechnen, und es ergeben sich hieraus auch schärfere Werthe für

$$c = \frac{Q}{F} \text{ und } p = m\sqrt{F},$$

sowie für $a$, $b$ u. s. w.

Beispiele. 1) Welches Gefälle erfordert ein Canal von 1500 Fuß Länge, 2 Fuß unterer, 8 Fuß oberer Breite und 4 Fuß Tiefe, zur Fortleitung einer Wassermenge von 70 Cubikfuß pr. Secunde? Es ist

$$p = 2 + 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 12,\ F = 5 \cdot 4 = 20,\ c = {}^{70}/_{20} = 3{,}5,$$

daher:

$$\zeta = 0{,}00784 \text{ und}$$

Digitized by Google

$$h = 0{,}00784 \,.\, \frac{1500 \,.\, 12}{20} \cdot \frac{3{,}5^2}{2g} = 7{,}056 \,.\, 0{,}196 = 1{,}38 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Waſſermenge liefert ein Bach von 40 Fuß Breite, $4\frac{1}{2}$ Fuß mittlerer Tiefe und 46 Fuß Waſſerprofil, wenn er auf einer Länge von 750 Fuß, 10 Zoll Gefälle hat? Es iſt ungefähr

$$c = 90{,}9 \,.\, \sqrt{\frac{40 \,.\, 4{,}5 \,.\, 10}{46 \,.\, 750 \,.\, 12}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{230}} = 6 \text{ Fuß},$$

und hiernach $\zeta = 0{,}00765$

anzunehmen. Man erhält daher genauer:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{Fh}{\zeta l p} = \frac{4{,}5 \,.\, 40 \,.\, 10}{0{,}00765 \,.\, 46 \,.\, 750 \,.\, 12} = \frac{1}{1{,}7595} = 0{,}5683 \text{ und } c = 5{,}96 \text{ Fuß}.$$

Die entſprechende Waſſermenge iſt endlich:

$$Q = 4{,}5 \,.\, 40 \,.\, 5{,}96 = 10{,}73 \text{ Cubikfuß}.$$

3) Man will einen Graben von 3650 Fuß Länge anlegen, welcher bei einem Totalgefälle von 1 Fuß eine Waſſermenge von 12 Cubikfuß pr. Secunde fortführt. Welche Dimenſionen ſind dem Querprofile deſſelben zu geben, wenn es die Form eines halben regelmäßigen Sechseckes erhalten ſoll? Hier iſt $m = 2{,}632$ (ſ. Tabelle §. 474), daher annähernd:

$$F = 0{,}0271 \,(2{,}632 \,.\, 3650 \,.\, 144)^{6/5} = 7{,}75 \text{ Quadratfuß und}$$

$$c = \frac{12}{7{,}75} = 1{,}548 \text{ Fuß}.$$

Hiernach iſt $\zeta = 0{,}0083$, und daher:

$$F = \left(0{,}0083 \,.\, 2{,}632 \cdot \frac{3650 \,.\, 144}{62{,}5}\right)^{6/5} = 8{,}22 \text{ Quadratfuß}$$

zu nehmen. Es iſt hiernach zu ſetzen:

die Tiefe: $a = 0{,}760 \sqrt{F} = 2{,}18$ Fuß,

die untere Breite: $b = 0{,}877 \sqrt{F} = 2{,}51$,

und die obere Breite: $b_1 = 2 \,.\, 2{,}51 = 5{,}02$ Fuß.

Anmerkung 1. Nach Saint-Venant läßt ſich mit ziemlicher Genauigkeit ſetzen:

$$h = 0{,}000401 \,\frac{p}{F} \cdot v^{2\,1/11} = 0{,}000401 \,.\, 2g \,.\, v^{-1/11} \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter};$$

es iſt daher der Widerſtandscoefficient:

$\zeta = 0{,}000401 \,.\, 2g \,.\, v^{-1/11} = 0{,}000401 \,.\, 19{,}62 \,.\, v^{-1/11} = 0{,}007887 \, v^{-1/11}$,

alſo z. B. für $v = 1$ Meter:

$$\zeta = 0{,}007887,$$

und für $v = 1/4$ Meter:

$$\zeta = 0{,}007887 \,.\, \sqrt[11]{4} = 0{,}007887 \,.\, 1{,}134 = 0{,}008945.$$

(Vergl. oben §. 428, Anmerkung 3).

Anmerkung 2. Eine Tabelle zur Abkürzung dieſer Rechnungen theilt der „Ingenieur“ Seite 460 und 461 mit.

**Ungleichförmige Bewegung.** Die Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Waſſers in Flußbetten läßt ſich inſofern auf die Theorie der gleichförmigen Bewegung zurückführen, als man den Reibungswiderſtand auf einer kurzen Flußſtrecke als conſtant und die entſprechende Höhe ebenfalls §. 477

$$= \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

setzen kann. Außerdem ist aber noch auf die der Geschwindigkeitsveränderung entsprechende lebendige Kraft des Wassers Rücksicht zu nehmen.

Es sei $ABCD$, Fig. 808, eine kurze Flußstrecke, von der Länge $AD = l$, dem Gefälle $DH = h$, und es sei $v_0$ die Geschwindigkeit des ankommenden, $v_1$ die des fortgehenden Wassers. Wenden wir die Regeln des Ausflusses auf ein Element $D$ im Wasserspiegel an, so erhalten wir für dessen Geschwindigkeit $v_1$:

Fig. 808.

$$\frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_0^2}{2g};$$

was aber ein Element $E$ unter Wasser betrifft, so hat dasselbe zwar von der einen Seite her eine größere Druckhöhe $AG = EH$, allein da das Unterwasser mit der Druckhöhe $DE$ entgegenwirkt, so bleibt für dasselbe ebenfalls nur das Gefälle $DH = EH - ED$ als Bewegung erzeugende Druckhöhe übrig, und es gilt also auch für dieses und für jedes andere Element die Formel:

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g},$$

und nimmt man hierzu noch den Reibungswiderstand, so erhält man:

$$h = \frac{v_2 - v_0^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin $p$, $F$ und $v$ Mittelwerthe des Wasserprofiles, Querschnittes und der Geschwindigkeit sind. Ist $F_0$ der Inhalt des oberen und $F_1$ der des unteren Querprofiles, so läßt sich setzen:

$$F = \frac{F_0 + F_1}{2} \text{ und } Q = F_0 v_0 = F_1 v_1,$$

weshalb nun

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F_0}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g},$$

sowie

$$\frac{v^2}{F} = \frac{v_0^2 + v_1^2}{F_0 + F_1} = \left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{F_0 + F_1}$$

folgt und sich ergiebt:

1) $h = \left[\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\right]\frac{Q^2}{2g}$, sowie

2) $Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)}}$.

Digitized by Google

Mit Hülfe der Formel 1) läßt sich aus dem Wasserquantum, der Länge und den Querschnitten einer Fluß- oder Canalstrecke das entsprechende Gefälle $h$ berechnen, mit Hülfe der Formel 2) aber umgekehrt aus dem Gefälle, der Länge und den Querschnitten das Wasserquantum. Um mehr Genauigkeit zu erzielen, kann man die Rechnung für mehrere kurze Flußstrecken durchführen und zuletzt das arithmetische Mittel nehmen. Ist nur das Totalgefälle bekannt, so setze man gleich dieses statt $h$ in die letzte Formel, führe statt

$$\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}, \quad \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_0^2},$$

wo $F_n$ den Inhalt des letzten Querprofiles bezeichnet, und statt

$$\xi \cdot \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)$$

die Summe aller ähnlichen Werthe der einzelnen Flußstrecken ein.

Beispiel. Ein Bach hat auf einer Strecke von 300 Fuß Länge 9,6 Zoll Gefälle, der mittlere Umfang seines Wasserprofiles ist 40 Fuß, der Inhalt des oberen Querprofiles mißt 70 und der des unteren 60 Quadratfuß. Welche Wassermenge liefert dieser Bach? Es ist:

$$Q = \frac{7{,}906\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} = \frac{1}{70^2} + 0{,}007565 \cdot \frac{300 \,.\, 40}{130}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{70^2}\right)}}$$

$$= \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003365}} = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0004096}} = 349 \text{ Cubikfuß}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\frac{2\,Q}{F_0 + F_1} = \frac{698}{130} = 5{,}37$ Fuß, daher ist richtiger

$$\zeta = 0{,}00768 \text{ statt } 0{,}007565$$

zu setzen, und es folgt nun schärfer:

$$Q = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003416}} = 347 \text{ Cubikfuß}.$$

Wenn derselbe Bach bei demselben Wasserstande auf einer anderen Strecke von 450 Fuß Länge 11 Zoll Gefälle hat, und wenn auf dieser Strecke sein oberes Querprofil 50 und sein unteres 60 Quadratfuß beträgt, wobei der mittlere Profilumfang 36 Fuß mißt, so hat man:

$$Q = \frac{7{,}906\sqrt{0{,}9167}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{50^2} + 0{,}00768 \cdot \frac{450 \,.\, 36}{110}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{50^2}\right)}}$$

$$= 7{,}906\sqrt{\frac{0{,}9167}{-0{,}0001222 + 0{,}0007549}} = 301 \text{ Cubikfuß}.$$

Aus beiden Werthen folgt der mittlere:

$$Q = \frac{347 + 301}{2} = 324 \text{ Cubikfuß}.$$

Um eine Formel für die Wassertiefe zu erhalten, setzen wir die obere Tiefe $= a_0$ und die untere $= a_1$, ferner den Abhang des Flußbettes, §. 478

$= \alpha$, folglich das Gefälle des Grundbettes, $= l \sin. \alpha$. Dann erhalten wir das Wassergefälle:

$$h = a_0 - a_1 + l \sin. \alpha,$$

und es folgt nun die Gleichung:

$$a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \left[\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - \sin. \alpha\right] l,$$

daher:

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - \sin. \alpha}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Strecke $l$ bestimmen, welche einer gegebenen Veränderung $a_0 - a_1$ der Wassertiefe entspricht. Ist aber die umgekehrte Aufgabe zu lösen, so hat man den Weg der Näherung zu betreten, indem man erst die den angenommenen Senkungen $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ entsprechenden Entfernungen $l_1$ und $l_2$ ermittelt, und hieraus durch eine Proportion die der gegebenen Entfernung $l$ entsprechende Senkung berechnet (s. „Ingenieur", Arithmetik, §. 16, V. Seite 76).

Die Formel ist noch einer Vereinfachung fähig, wenn die Breite $b$ des fließenden Wassers constant ist, oder als constant angesehen werden kann. Wir setzen in diesem Falle:

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{F_0^2 F_1^2} \cdot \frac{Q^2}{2g} = \frac{(F_0 - F_1)(F_0 + F_1)}{F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$= \frac{(a_0 - a_1)(a_0 + a_1)}{a_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd} = 2\frac{(a_0 - a_1)}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g},$$

und ebenso:

$$\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{p\,(F_0^2 + F_1^2)}{(F_0 + F_1)\,F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\text{annähernd} = \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g}, \text{ erhalten daher:}$$

$$l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - \sin. \alpha},$$

und folglich:

$$\frac{a_0 - a_1}{l} = \frac{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - \sin. \alpha}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel läßt sich direct die einer gegebenen Strecke $l$ entsprechende Veränderung $(a_0 - a_1)$ der Wassertiefe berechnen.

Digitized by Google

Beiſpiel. Man will in einem horizontalen Graben von 5 Fuß Breite und 800 Fuß Länge eine Waſſermenge von 20 Cubikfuß fortführen und dieſelbe 2 Fuß hoch eintreten laſſen, welche Höhe wird das Waſſer am Ende des Canales haben? Theilen wir die ganze Länge in zwei gleiche Theile und beſtimmen wir nach der letzten Formel das Gefälle für jeden dieſer Theile.

Allemal iſt $sin.\, \alpha = 0$, $l = \frac{800}{2} = 400$, und $b = 5$; für den erſten Theil iſt $v_0 = \frac{20}{2 \,.\, 5} = 2$, daher $\zeta = 0{,}00810$, ferner $a_0 = 2$; da nun $p = 8\frac{1}{2}$, ſo folgt:

$$a_0 - a_1 = \left( \frac{0{,}00810 \cdot \frac{8{,}5}{10} \cdot \frac{4}{2g}}{1 - \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2g}} \right) \cdot 400 = \frac{0{,}1762}{0{,}936} = 0{,}188 \text{ Fuß}.$$

Nun iſt für die zweite Hälfte $a_1 = 2 - 0{,}188 = 1{,}812$, ferner $p_1$ etwa $= 8{,}2$, $v_1 = \frac{20}{9{,}106} = 2{,}207$, und die Senkung des zweiten Theiles:

$$a_1 - a_2 = \left( \frac{0{,}00810 \cdot \frac{8{,}2}{9{,}106} \cdot \frac{2{,}207^2}{2g}}{1 - \frac{2}{1{,}812} \cdot \frac{2{,}207^2}{2g}} \right) \cdot 400 = \frac{0{,}2285}{0{,}914} = 0{,}250 \text{ Fuß},$$

daher folgt die ganze Senkung

$$= 0{,}188 + 0{,}250 = 0{,}438,$$

und die Waſſertiefe am unteren Ende

$$= 2 - 0{,}438 = 1{,}562 \text{ Fuß} = 18\frac{3}{4} \text{ Zoll}.$$

**Anſchwellungen.** Wenn Flüſſe oder Canäle ihren Waſſerſtand ändern, ſo treten auch Geſchwindigkeitsveränderungen und Veränderungen in den Waſſermengen ein. Einem höheren Waſſerſtande entſpricht nicht nur ein größerer Querſchnitt, ſondern auch eine größere Geſchwindigkeit, und daher aus doppelten Gründen ein größeres Waſſerquantum, und ebenſo giebt eine Abnahme der Waſſertiefe eine Verminderung im Querſchnitt und in der Geſchwindigkeit, und daher auch eine Abnahme der Waſſermenge in zweifacher Beziehung. Iſt die anfängliche Tiefe $= a$, und die ſpätere Tiefe $= a_1$, ſowie die obere Breite des Canales, $= b$, ſo läßt ſich die Vergrößerung des Querſchnittes, $= b\,(a_1 - a)$, und daher der Querſchnitt nach der Anſchwellung $(a_1 - a)$: §. 479

$$F_1 = F + b\,(a_1 - a)$$

ſetzen, auch folgt hiernach:

$$\frac{F_1}{F} = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}$$

und:

$$\sqrt{\frac{F_1}{F}} \text{ annähernd } = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2\,F}.$$

Digitized by Google

Iſt ferner $p$ der anfängliche, $p_1$ der ſpätere Umfang des Waſſerprofiles, ſowie $\theta$ der Böſchungswinkel der Ufer, ſo läßt ſich ſetzen:

$$p_1 = p + \frac{2\,(a_1 - a)}{\sin.\,\theta}\text{, daher}$$

$$\frac{p_1}{p} = 1 + \frac{2\,(a_1 - a)}{p\,\sin.\theta}\text{ und:}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}} = 1 + \frac{a_1 - a}{p\,\sin.\,\theta}\text{, ſowie:}$$

$$\sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1 - \frac{a_1 - a}{p\,\sin.\,\theta}.$$

Nun iſt aber die Geſchwindigkeit beim erſten Waſſerſtande, $c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}$, und beim zweiten $c_1 = 90{,}9\sqrt{\frac{F_1}{p_1}\cdot\frac{h}{l}}$, es läßt ſich daher:

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{F_1}{F}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p_1}} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2F}\right)\left(1 - \frac{a_1 - a}{p\,\sin.\,\theta}\right)$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p\,\sin.\,\theta}\right),$$

alſo die relative Geſchwindigkeitsveränderung:

$$1)\ \frac{c_1 - c}{c} = (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p\,\sin.\,\theta}\right)\text{ ſetzen.}$$

Dagegen folgt das Verhältniß der Waſſermengen:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 c_1}{Fc} = \left(1 + \frac{b(a_1 - a)}{F}\right)\left[1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p\,\sin.\,\theta}\right)\right]$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p\,\sin.\,\theta}\right),$$

und der relative Waſſermengenzuwachs:

$$2)\ \frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p\,\sin.\,\theta}\right).$$

Weniger genau, aber in vielen Fällen, namentlich bei breiten Canälen mit wenig Böſchung genügend, iſt es, $F = ab$ zu ſetzen und $\frac{1}{p\,\sin.\,\theta}$ zu vernachläſſigen, weswegen dann einfacher

$$\frac{c_1 - c}{c} = {}^1/_2\,\frac{a_1 - a}{a}\quad\text{und}\quad\frac{Q_1 - Q}{Q} = {}^3/_2\cdot\frac{a_1 - a}{a}$$

folgt.

Hiernach iſt alſo die relative Geſchwindigkeitsveränderung halb ſo groß, und die relative Veränderung im Waſſerquantum gleich $^3/_2$mal ſo groß, als die relative Veränderung im Waſſerſtande.

Die vorſtehenden Formeln gelten nur für die permanente Bewegung

Digitized by Google

des Wassers in Flußbetten, wo die Wasserstände constant sind, nicht aber in den Fällen, wo die Höhe des fließenden Wassers veränderlich ist. Die mittlere Geschwindigkeit in einem und demselben Querprofile ist während des Steigens der Wasserhöhe größer und während des Fallens kleiner als bei constantem Wasserstande, es fließt also auch im ersten Falle mehr und im zweiten Falle weniger Wasser durch als bei der permanenten Bewegung des Wassers.

Beispiele. 1) Wenn der Wasserstand um $1/10$ seiner anfänglichen Größe zunimmt, so wird die Geschwindigkeit um $1/20$ und das Wasserquantum um $3/20$ seines anfänglichen Werthes größer.

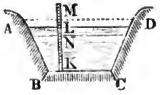
2) Wenn die Tiefe um 8 Procent abnimmt, so vermindert sich die Geschwindigkeit um 4 Procent, und das Wasserquantum um 12 Procent.

3) Mit Hülfe der genaueren Formel

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\ \theta}\right)$$

läßt sich eine Wasserstandsscala $KM$, Fig. 809, construiren, woran man die jeder Wassertiefe $KL$ entsprechende Wassermenge eines Canales ablesen kann, wenn man nur einmal das Wasserquantum für eine gewisse mittlere Tiefe kennt. Ist $b = 9$ Fuß, $b_1 = 3$, $a = 3$ und $\theta = 45^0$, so hat man:

Fig. 809.




$$F = \frac{(9+3)3}{2} = 18 \text{ Quadratfuß},$$

$$p = 3 + 2.3\sqrt{2} = 11{,}485, \text{ und}$$

$$sin.\ \theta = \sqrt{1/2} = 0{,}707,$$

daher:

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = \left(\frac{3.9}{2.18} - \frac{1}{11{,}485\,.\,0{,}707}\right)(a_1 - a) = (0{,}750 - 0{,}123)\,(a_1 - a)$$
$$= 0{,}627\,(a_1 - a).$$

Beträgt das dem mittleren Wasserstande entsprechende Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß, so hat man:

$$Q_1 = 40 + 40\,.\,0{,}627\,(a_1 - a) = 40 + 25\,(a_1 - a).$$

Ist $a_1 - a = 0{,}04$ Fuß $= 5{,}76$ Linien, so folgt $Q_1 = 41$; ist $a_1 - a = 0{,}08$ Fuß $= 11{,}52$ Linien, so hat man $Q_1 = 42$ Cubikfuß; ist ferner $a_1 - a = -0{,}04$, so folgt $Q_1 = 39$ Cubikfuß u. s. w. Es giebt also eine Scala, deren Intervalle $LM = LN = 5{,}76$ Linien betragen, die Wassermenge bis auf einen Cubikfuß genau an. Natürlich wird die Genauigkeit um so kleiner, je mehr sich der Wasserstand von dem mittleren entfernt.

Anmerkung. Ueber die Zu- und Abführung des Wassers in Canälen, sowie über die Anlage der Wehre und Teiche wird im zweiten Theile gehandelt.

Schlußanmerkung. Ausführlich über die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen handelt der Verfasser in der allgemeinen Encyklopädie, Bd. II., Artikel „Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen"; auch wird daselbst eine vollständige Literatur (bis 1844) über diesen Gegenstand mitgetheilt. Rittinger's tabellarische Zusammenstellung der Versuche über die Bewegung des Wassers in Canälen ist in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins 7. Jahrgang 1855, enthalten.

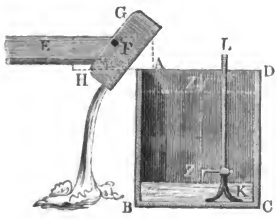
Digitized by Google

## Achtes Capitel.

## Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

§. 480 **Aichen.** Das Wasserquantum, welches ein fließendes Wasser innerhalb einer gewissen Zeit liefert, wird entweder durch Aichmaße, oder durch Ausflußapparate oder durch Hydrometer gefunden. Das einfachste Wassermessen besteht allerdings in dem Aichen (franz. jaugeage; engl. gauging), d. i. in der Anwendung eines Aichgefäßes, doch ist dieses nur bei kleineren Wassermengen, wie sie etwa in Röhren oder kleinen Bächen und Gräben zugeführt werden, anwendbar. Das Aichgefäß wird meist aus Brettern zusammengesetzt, und bekommt deshalb eine parallelepipedische Form; um seine Haltbarkeit zu erhöhen, wird es wohl noch mit eisernen Reifen umgeben. Wie der genaue Inhalt dieses Gefäßes zu ermitteln ist, wird im „Ingenieur", S. 208, angezeigt. Das Wasser wird diesem Gefäße durch ein Gerinne $EF$, Fig. 810, zugeführt, an dessen Ende sich eine Doppelklappe $GH$ befindet, durch welche man das Wasser nach Belieben neben dem Gefäße $AC$ oder in dasselbe ausfließen lassen kann. Um die Höhe des Wasserkörpers im Gefäße recht genau zu erhalten, wendet man wohl noch eine Wasserstandsscala $KL$ an. Wenn man vor der Messung die Zeigerspitze $Z$ bis auf die Oberfläche des schon im Gefäße befindlichen und wenn auch vielleicht nur den Boden bedeckenden Wassers herabgelassen und den Wasserstand an der Scala abgelesen hat, so erhält man die Höhe $ZZ_1$ des geaichten Wassers durch Subtraction dieses Wasserstandes von demjenigen Stande, welchen die Scala anzeigt, wenn man die Zeigerspitze $Z_1$ am Ende der Beobachtung mit dem Wasserspiegel in Berührung gebracht hat. Vor der Messung ist natürlich die Klappe so zu stellen, daß das Wasser neben dem Kasten ausfließt. Hat man sich überzeugt, daß der Zufluß im Gerinne in Beharrung übergegangen ist, und hat man an der in der Hand befindlichen Uhr einen Zeitpunkt beobachtet, so dreht man die Klappe um, damit das Wasser in das Aichgefäß fließt; und ist nachher das Gefäß ganz oder zum Theil gefüllt, so liest man auf der Uhr einen zweiten Zeitpunkt ab und bringt

Fig. 810.



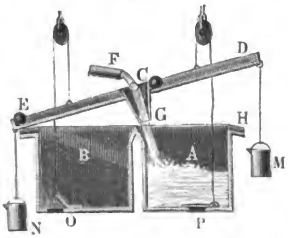

Digitized by Google

die Klappe wieder in die erste Stellung. Aus dem mittleren Querschnitte $F$ des Gefäßes und der Höhe $ZZ_1 = s$ des Wasserkörpers ergiebt sich das ganze Wasserquantum $V = Fs$, und hieraus wieder mittels der durch die Differenz der beobachteten Zeiten gegebenen Füllungszeit $t$ das Wasserquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{Fs}{t}.$$

Anmerkung. Um ein veränderliches Zuflußwasserquantum zu jeder Tageszeit angeben zu können, kann man den in Fig. 811 abgebildeten Cubir-Apparat, wie er vorzüglich auf Salinen vorkommt, anwenden. Hier giebt es zwei Aichgefäße $A$ und $B$, die sich abwechselnd füllen und leeren, und das durch eine Röhre $F$ zugeführte Wasser geht durch eine kurze Röhre $CG$, welche mit einem um $C$ drehbaren Hebel $DE$ fest verbunden ist. Hat sich das eine Gefäß, z. B. $A$, gefüllt, so fließt das Wasser durch ein kleines Gerinne $H$ in das Eimerchen $M$, dieses zieht nun den Hebel auf der einen Seite nieder, und es kommt die Röhre $CG$ in eine Lage, wodurch das Wasser nach $B$ geleitet wird. Das Aufziehen der Klappen $O$ und $P$ erfolgt durch über Rollen weggehende Schnüre, deren Enden mit dem Hebel verbunden sind, und wird vorzüglich durch eiserne Kugeln unterstützt, die dem Niedergehen des Hebels den letzten Impuls ertheilen. Die Eimer $M$ und $N$ enthalten noch kleine Ausflußöffnungen, damit sie sich nach jedesmaligem Kippen leeren können. Uebrigens ist noch ein Zählapparat angebracht, an welchem die Zahl der Spiele zu jeder Zeit abgelesen werden kann. Andere Apparate dieser Art von Brown beschreibt Dingler's polyt. Journal Bd. 115. Ueber einen neuen Wassermeßapparat von Noeggerath siehe „Polyt. Centralblatt 1856. Heft 5." Vergleiche ferner die angeführten Werke von Francis, Lesbros u. s. w. Siehe auch weiter unten §. 506.

Fig. 811.




**Ausflussregulatoren.** Sehr häufig werden kleinere und mittlere Wassermengen mit Hülfe ihres Ausflusses durch eine bestimmte Mündung und unter einem bekannten Drucke gefunden. Aus dem Inhalte $F$ der Mündung, aus der Druckhöhe $h$ und mit Hülfe eines Ausflußcoefficienten $\mu$ ergiebt sich die Wassermenge pr. Secunde: §. 481

$$Q = \mu F \sqrt{2gh}.$$

Am besten eignen sich hierzu die Poncelet'schen Mündungen, weil für diese bei sehr verschiedenen Druckhöhen die Ausflußcoefficienten mit großer Genauigkeit bekannt sind (§. 410); jedoch sind dieselben nur bei gewissen mittleren Wassermengen anwendbar. Der Verfasser bedient sich bei seinen Wassermessungen vier solcher Mündungen, eine von 5, eine von 10, eine von 15

Digitized by Google

und eine von 20 Centimeter Höhe, alle aber von 20 Centimeter Weite. Dieſe Mündungen ſind in Meſſingtafeln ausgeſchnitten, welche auf hölzernen Rahmen $AC$, Fig. 812, aufſitzen, die man mittels vier ſtarker eiſerner Schrauben an jeder Wand befeſtigen kann. In vielen Fällen muß man ſich freilich größerer Mündungen bedienen, für welche die Ausflußcoefficienten nicht ſo ſicher beſtimmt ſind, ja oft laſſen ſich nur Ueberfälle anbringen, welche meiſt noch weniger Genauigkeit gewähren. Jedenfalls gilt aber die Regel, daß man bei dem Ausfluſſe ſo viel wie möglich vollſtändige und vollkommene Contraction zu erzielen ſuchen und deshalb der Mündung, wenn ſie in einer dickeren Wand befindlich iſt, nach außen eine Abſchrägung ertheilen muß. Welche Correctionen bei unvollkommener und partieller Contraction anzubringen ſind, iſt in den §§. 416, 417 u. ſ. w. hinreichend auseinandergeſetzt worden.

Fig. 812.

Um das Waſſer eines Gerinnes zu meſſen, hat man das Mündungsſtück einzuſetzen und den Moment abzuwarten, wann der Waſſerſtand in Beharrung gekommen iſt. Zur Meſſung der Druckhöhe kann man ſich der feſten Waſſerſtandsſcala $KL$ mit Zeiger, Fig. 813, oder der beweglichen Waſſerſtandsſcala $EF$, Fig. 814, bedienen. Will man den Ausfluß unmittelbar

Fig. 813.

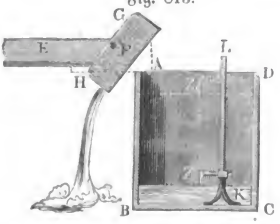
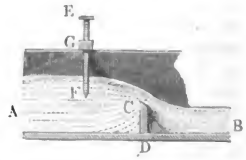
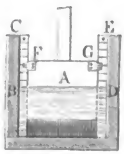



Fig. 814.




an Schutzöffnungen beobachten, ſo iſt es gut, vorher ein Paar meſſingene Schützenſtandsſcalen $BC$ und $DE$, Fig. 815, nebſt ihren Zeigern $F$ und $G$ auf die Führung und auf das Schutzbrett $A$ zu befeſtigen, um die Oeffnungshöhe ſicherer ableſen zu können. Uebrigens iſt es meiſt beſſer, zu dem Zwecke der Waſſermeſſung gleich ein neues Schutzbrett nebſt einer Führung mit der erforderlichen Abſchrägung nach außen einzuſetzen.

Fig. 815.



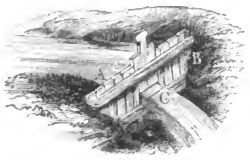

Das einfachſte Mittel, das Waſſer in einem Gerinne zu meſſen, beſteht allerdings in dem Einſetzen eines an der oberen Kante abgeſchrägten Brettes $CF$, Fig. 701, und in der Ausmeſſung des dadurch gebildeten Ueberfalles. Iſt

Digitized by Google

der Graben oder das Gerinne lang und wenig ansteigend, so dauert es allerdings ziemlich lange, ehe der Beharrungszustand eintritt, und es ist deshalb gut, hier vor der Messung noch ein zweites Brett einzusetzen, welches den Ausfluß des Wassers auf eine längere Zeit verhindert, um das Steigen des Wassers auf die dem Beharrungszustande entsprechende Höhe zu beschleunigen.

Um das Wasserquantum eines Baches zu messen, kann man denselben durch einen aus Pfählen und Brettern bestehenden Einbau $AB$, Fig. 816, eindämmen und das Wasser durch eine in demselben angebrachte Oeffnung $C$ abfließen lassen, oder man kann sich auch eines einfachen Ueberfalles oder Ueberfallwehres (hiervon im zweiten Theile) bedienen.

Fig. 816.




Anmerkung. Das einfachste Mittel, um die Druckhöhe zu bestimmen, ist, den Stand des Zeigers zu beobachten, wenn dessen Spitze erstens die Oberfläche des im Beharrungszustande abfließenden Wassers und zweitens den Spiegel des stillstehenden und nur bis Schwelle $C$ aufgestauten Wassers berührt. Die Differenz dieser beiden Scalenstände ist die Druckhöhe oder der Stand des Wassers über der Schwelle. Bei Beobachtung des letzten Zeigerstandes ist die Capillarität nicht außer Acht zu lassen, vermöge welcher der Wasserspiegel noch um 1,37 Linien über oder unter der Schwelle stehen kann, ehe der Abfluß des Wassers über derselben beginnt oder aufhört. (Siehe §. 380.)

Sehr einfach wird auch das Wasser in einem rectangulären Canale oder Gerinne $AB$, Fig. 817 und 818, gemessen, wenn man ein unten abge- §. 482

Fig. 817.

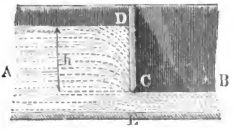
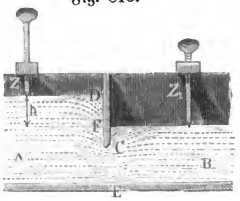



Fig. 818.




schrägtes Brett $CD$ so einsetzt, daß unter demselben eine Ausflußöffnung $CE$ übrig bleibt, durch welche das Wasser abfließen kann. Diese Methode hat vor der Anwendung eines Ueberfalles den Vorzug, daß bei ihr das gespannte Wasser mehr zur Ruhe kommt, und deshalb die Messung der Druckhöhe schärfer zu vollziehen ist. Wenn es möglich ist, suche man einen freien Ausfluß, wie Fig. 817, herbeizuführen, weil hierbei eine größere Ge-



Digitized by Google

nauigkeit zu erlangen ist; bei einer großen Wassermenge ist es jedoch nicht möglich, das Zurückstauen des Unterwassers zu verhindern, und man muß sich daher mit einem Ausflusse unter Wasser, Fig. 818, begnügen. Endigt sich das Gerinne kurz hinter der Mündung, bildet es also ein sogenanntes kurzes Ansatzgerinne, so fließt das Wasser durch dasselbe fast frei ab, und man hat es dann mit einem Falle der Lesbros'schen Versuche (§. 418) zu thun. Bezeichnet $a$ die Mündungshöhe, $b$ die Mündungsbreite, ferner $h$ die Druckhöhe, bis Mitte der Mündung gemessen, und $\mu$ den aus Tab. II., §. 418, zu nehmenden Ausflußcoefficienten, so hat man das Ausflußquantum

$$Q = \mu a b \sqrt{2gh}.$$

Ist hingegen das Gerinne lang, oder das abfließende Wasser gestaut, so daß es eine horizontale Oberfläche hat, so fließt das Wasser in allen Stellen des Mündungsquerschnittes mit einer und derselben, dem Niveauabstande zwischen der Oberfläche $A$ des Oberwassers und der Oberfläche $B$ des Unterwassers entsprechenden Geschwindigkeit ab, es ist daher dann in der letzten Formel für $Q$, statt $h$ dieser Niveauabstand einzuführen.

Fließt das Wasser in die freie Luft, oder steht der Unterwasserspiegel nicht über der oberen Mündungskante, wie Fig. 817 vor Augen führt, so hat man sowohl für eine scharfe als auch für eine abgerundete Mündungskante,

$$\mu = 0{,}965$$

einzusetzen, und folglich bei der Strahldicke $a$ und Breite $b$,

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{2gh},$$

oder genauer, wenn $a_1$ die Tiefe des zu- und $a$ die des abfließenden Wassers bezeichnet, nach §. 398:

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2}}.$$

Bei dem Ausfluß unter Wasser, wobei der Unterwasserspiegel über der oberen Mündungskante steht (s. Fig. 818), bildet sich hinter der Mündungswand ein Wasserwirbel, wobei der Ausfluß wesentlich gestört wird, und es ist hier, einigen Versuchen des Verfassers zufolge, für eine Mündung mit scharfer Mündungskante im Mittel,

$$\mu = 0{,}462,$$

und dagegen für eine solche mit nach einem Quadranten abgerundeter Kante,

$$\mu = 0{,}717$$

zu setzen.

Beispiel. Um die Wassermenge zu finden, welche ein Gerinne $AB$, Fig. 818, fortführt, hat man ein scharfkantiges Brett $CD$ in dasselbe eingesetzt, und dadurch einen Ausfluß unter Wasser hergestellt, übrigens aber Folgendes gefunden. Weite der Mündung oder des Gerinnes, $b = 3$ Fuß, Oeffnungshöhe oder Abstand $CE$

Digitized by Google

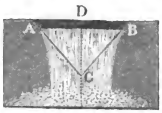
der Brettkante $C$ vom Gerinnboden, $a = 6$ Zoll, Stand des Zeigers $Z$ auf der Seite des Oberwaſſers, $h_1 = 0{,}445$ Fuß, und Stand des Zeigers $Z_1$ über dem Unterwaſſer, $h_2 = 1{,}073$. Es iſt hiernach der Niveauabſtand $h = h_2 - h_1 = 1{,}073 - 0{,}445 = 0{,}628$ Fuß und die geſuchte Waſſermenge:

$$Q = 0{,}462 \,.\, 7{,}906 \,.\, 3 \,.\, 0{,}5 \sqrt{h_2 - h_1} = 5{,}48 \sqrt{0{,}628} = 4{,}34 \text{ Cubikfuß.}$$

Wäre der Ausflußcoefficient bei ähnlichen Mündungsquerſchnitten immer derſelbe, ſo würde der triangulăre Ueberfall oder zweiſeitige Wandeinſchnitt $ABC$, Fig. 819, einen beſonderen Vorzug vor dem Ueberfall mit horizontaler Schwelle haben, dies iſt jedoch, wie ſchon an Kreismündungen wahrgenommen werden kann, bei kleinen Mündungen nicht, und bei großen Mündungen nur annähernd richtig. Solche Wandeinſchnitte empfiehlt Herr Profeſſor Thomſon in Belfaſt als Hülfsmittel zum Waſſermeſſen. Aus der Breite $AB = b$, und der Höhe $CD = h$, folgt hier das Waſſerquantum

§. 483

Fig. 819.



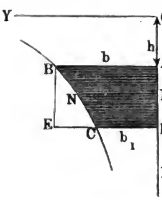

$$Q = {}^{8}/_{15} \frac{\mu b h}{2} \sqrt{2gh} \text{ (ſ. §. 402),}$$

und wenn man nach Thomſon, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}619$ ſetzt,

$$Q = 0{,}33 \frac{b\,h}{2} \sqrt{2gh} = 0{,}13\, b h^{3/2} \text{ Cubikfuß.}$$

Zum Waſſermeſſen eignen ſich auch ſolche Mündungen, bei welchen die Waſſermenge der Mündungshöhe proportional iſt. Iſt dieſelbe mit einem Schutzbrete verſehen, ſo giebt dann die Größe des Schützenzuges das Maß der Ausflußmenge an. Es ſei die Druckhöhe über der oberen Kante einer ſolchen Mündung $ABCD$, Fig. 820, $OA = h$, die Länge dieſer Kante, $AB = b$, die der unteren Kante, $CD = b_1$, und die Höhe der Mündung, $AD = a$. Horizontale Linien im Abſtande $\frac{a}{n}$ von einander theilen die Mündung in gleichhohe Streifen, wovon jeder eine und dieſelbe Waſſermenge $\frac{Q}{n}$ geben ſoll. Für den oberen Spalt oder Streifen, welcher die Breite $b$ und Druckhöhe $h$ hat, iſt

Fig. 820.




$$\frac{Q}{n} = \frac{b\,a}{n} \sqrt{2gh},$$

und dagegen für einen Streifen, welcher um $OM = x$ unter dem Waſſerſpiegel liegt, und die Breite $MN = y$ hat, iſt



Digitized by Google

$$\frac{Q}{n} = \frac{y\,a}{n}\sqrt{2gx};$$

folglich hat man, wenn man diese beiden Ausdrücke für $\frac{Q}{n}$ einander gleich setzt,

$$y\sqrt{x} = b\sqrt{h}, \text{ oder}$$
$$\frac{y}{b} = \sqrt{\frac{h}{x}}.$$

Die Curve $BNC$, welche die Mündung an der Seite begrenzt, gehört einem aus Artikel 9 der analytischen Hülfslehren bekannten Curvensysteme an, welches die Horizontale $OY$ und die Verticale $OX$ zu Asymptoten hat:

Aus $Q$, $h$ und $a$ folgt:

1) die obere Mündungsbreite $b = \frac{Q}{a\sqrt{2gh}}$,

2) Mündungsbreite in der Tiefe $x$, $y = b\sqrt{\frac{h}{x}}$, und

3) die untere Mündungsbreite $b_1 = b\sqrt{\frac{h}{h+a}}$.

Ferner ist der Inhalt der Mündung:

$$F = 2b\left(\sqrt{h(h+a)} - h\right),$$

und daher die mittlere Druckhöhe:

$$z = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{h(h+a)} - h}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}.$$

Ist diese Mündung mit einer Schütze $AE$ versehen, so giebt der Schützenzug $DM = a_1$ eine Ausflußöffnung $MC$, durch welche die Wassermenge $Q_1 = \frac{a_1}{a}Q$ fließt.

§. 484 **Prony's Methode.** Da es oft lange dauert, ehe der Beharrungszustand von dem durch einen Einbau aufgestauten Wasser eintritt, so kann man folgendes von Prony vorgeschlagene Verfahren mit Vortheil anwenden. Zuerst verschließe man die Mündung durch ein Schutzbrett ganz und lasse dadurch das Wasser ziemlich hoch, oder so weit es die Umstände erlauben, aufstauen; jetzt ziehe man das Schutzbrett so weit auf, daß mehr Wasser als zufließt, und messe nun die Wasserstände in gleichen und möglichst kleinen Zeitabständen; endlich verschließe man die Schutzöffnung wieder völlig und beobachte noch die Zeit $t_1$, innerhalb welcher das Wasser auf die erste Höhe steigt. Jedenfalls ist dann im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $t + t_1$ ebenso viel Wasser zu- als abgeflossen, und es läßt sich daher durch das Ausflußquantum in der Zeit $t$ das Zuflußquantum in der Zeit $t + t_1$ aus-

Digitized by Google

drücken. Sind die Druckhöhen während des Sinkens $h_0$, $h_1$, $h_2$, $h_3$ und $h_4$, ſo hat man die mittlere Ausflußgeſchwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}) \text{ (ſ. §. 453),}$$

und iſt nun der Inhalt der Schutzöffnung, $= F$, ſo hat man das Ausflußquantum in der Zeit $t$:

$$V = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und daher das Zuflußquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{V}{t + t_1} = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12(t + t_1)}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}).$$

Beiſpiel. Um das zum Umtriebe eines Waſſerrades zu benutzende Waſſer eines Baches zu meſſen, hat man daſſelbe durch eine Spundwand, Fig. 816, eingedämmt und nach Eröffnung der rectangulären Mündung in derſelben Folgendes beobachtet: anfängliche Druckhöhe, 2 Fuß, nach 30″, 1,8 Fuß, nach 60″, 1,55 Fuß, nach 90″, 1,3 Fuß, nach 120″, 1,15 Fuß, nach 150″, 1,05 Fuß, und nach 180″, 0,9 Fuß; Breite der Oeffnung, $= 2$ Fuß, Höhe der Oeffnung, $= \frac{1}{2}$ Fuß, Zeit zum Zurückſteigen auf die erſte Höhe bei verſchloſſener Oeffnung, $= 110''$. Zunächſt beträgt die mittlere Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \frac{7{,}906}{18}(\sqrt{2} + 4\sqrt{1{,}8} + 2\sqrt{1{,}55} + 4\sqrt{1{,}3} + 2\sqrt{1{,}15} + 4\sqrt{1{,}05} + \sqrt{0{,}9})$$
$$= 0{,}4392\ (1{,}414 + 5{,}364 + 2{,}490 + 4{,}561 + 2{,}145 + 4{,}099 + 0{,}949)$$
$$= 0{,}4392 \,.\, 21{,}022 = 9{,}233 \text{ Fuß;}$$

nun iſt aber $F = 2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$ Quadratfuß, daher folgt die theoretiſche Ausflußmenge $= 9{,}233$ Cubikfuß. Nimmt man den Ausflußcoefficienten $= 0{,}61$ an, ſo erhält man endlich das geſuchte Waſſerquantum:

$$Q = \frac{0{,}61 \,.\, 180}{180 + 110} \cdot 9{,}233 = 3{,}495 \text{ Cubikfuß.}$$

**Waſſerzoll.** Um kleine Waſſermengen zu meſſen, bedient man §. 485
ſich auch wohl des Ausfluſſes durch kreisrunde, 1 Zoll weite Mündungen in einer dünnen Wand unter einem gegebenen Drucke. Man nennt die Waſſermenge, welche eine ſolche Oeffnung unter dem kleinſten Drucke, oder dann, wenn der Waſſerſpiegel nur eine Linie über der oberſten Stelle der Mündung ſteht, einen Waſſer- oder Brunnenzoll (franz. pouce d'eau; engl. water-inch). Die Franzoſen nehmen an, daß einem Waſſerzolle (alt Pariſ. Maß) in 24 Stunden 15 Pinten oder 19,1953 Cubikmeter Waſſer, alſo

in 1 Stunde 0,7998 Cubikmeter und
in 1 Minute 0,01333 „

entſpricht, doch weichen ältere Angaben von Mariotte, Couplet und Boſſut hiervon nicht unbedeutend ab. Nach Hagen liefert ein Waſſerzoll (für das preuß. Maß) in 24 Stunden 520 Cubikfuß, alſo in der Minute 0,3611 Cubikfuß. Der Prony'ſche doppelte Waſſermodul, welcher einer

Mündung von 2 Centimeter Durchmesser bei 5 Centimeter Druck entspricht und in 24 Stunden 20 Cubikmeter Wasser liefert, hat keine allgemeine Aufnahme gefunden.

Die Beobachtungen lassen sich sicherer anstellen, wenn man eine größere Druckhöhe hat; am einfachsten ist es, wenn man diese Höhe, wie den Durchmesser der Mündung, 1 Zoll annimmt. Nach den Herren Bornemann und Röting giebt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß Wasser (s. den Ingenieur Seite 463).

Der Apparat, an dem man mit Hülfe von Wasserzollen das Wasser mißt, ist in Fig. 821 abgebildet. Das zu messende Wasser fließt durch die Röhre

Fig. 821.

*A* in einen Kasten *B*, aus diesem tritt es durch unten in der Scheidewand *CD* angebrachte Löcher in den Kasten *E*, und aus diesem fließt es durch eine horizontale Reihe von genau 1 Zoll weiten und in Blech ausgeschnittenen kreisrunden Mündungen *F* in das Reservoir *G*. Damit sich aber der Wasserspiegel nur eine Linie über den Köpfen dieser Mündungen stellt, ist es nöthig, daß diese in hinreichender Zahl vorhanden seien, und daß man einen Theil derselben durch Stöpsel verschließe. Zur genaueren Angabe bringt man noch Mündungen $F_1$ an, welche $^1/_2$, $^1/_4$ Wasserzoll durchlassen. Bei großen Wassermengen theilt man wohl erst das ganze Wasser, und mißt auf diese Weise nur einen Theil, z. B. den zehnten. Dieses Theilen ist leicht dadurch zu bewirken, daß man das Wasser erst in ein Reservoir mit einer gewissen Anzahl, in gleichem Niveau befindlicher Mündungen leitet, und nur das von der einen Mündung gelieferte Wasser in dem oben abgebildeten Apparate auffängt.

Anmerkung. Man kann auch die Hähne und andere Regulirungsapparate zur Wassermessung anwenden, wenn man den jeder Stellung entsprechenden Widerstandscoefficienten kennt. Ist $h$ die Druckhöhe, $F$ der Querschnitt des Rohres, und $\mu$ der Ausflußcoefficient bei völlig geöffnetem Hahne, so hat man die Ausflußmenge:

$$Q = \mu F \sqrt{2gh},$$

sowie umgekehrt:

$$\mu = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{F}{Q}\right)^2 \cdot 2gh.$$

Setzt man nun den einer bestimmten Hahnstellung entsprechenden und aus den oben

Digitized by Google

mitgetheilten Tabellen zu entnehmenden Widerstandscoefficienten, $= \zeta$, so hat man die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q_1 = F\sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\mu^2}+\zeta}} = \frac{\mu F\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\mu^2\zeta}} = \frac{Q}{\sqrt{1+\mu^2\zeta}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{1+\zeta\left(\frac{Q}{F}\right)^2\cdot\frac{1}{2gh}}}.$$

Zur Bequemlichkeit kann man sich hiernach eine Tabelle construiren, so daß es nur eines Blickes auf diese bedarf, um die einer gewissen Hahnstellung entsprechende Ausflußmenge, oder um die einem gegebenen Ausflußquantum entsprechende Stellung des Hahnes zu finden. Ist z. B. $\mu = 0{,}7$ und $F = 4$ Quadratzoll, so hat man:

$$Q_1 = \frac{0{,}7\,.\,4\,.\,12\,.\,7{,}906\sqrt{h}}{\sqrt{1+0{,}49\,.\,\zeta}} = 265{,}6\sqrt{\frac{h}{1+0{,}49\,\zeta}}\ \text{Cubikzoll},$$

oder, wenn $h$ constant 1 Fuß mißt:

$$Q_1 = \frac{265{,}6}{\sqrt{1+0{,}49\,\zeta}}.$$

Wenn nun den Hahnstellungen $5^0$, $10^0$, $15^0$, $20^0$, $25^0$ u. s. w. die Widerstandscoefficienten 0,057; 0,293; 0,758; 1,559; 3,095 zukommen, so entsprechen denselben die Ausflußmengen: 262,1; 248,4; 226,8; 200,0; 166,4 Cubikzoll.

Um den Ausfluß durch eine Mündung $F$, Fig. 822, zu reguliren, wendet §. 486
man auch einen Hahn oder eine Klappe $A$, Fig. 822 an, welche durch einen

Fig. 822.

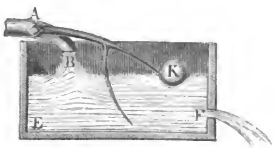
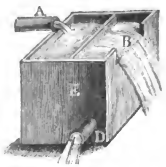



Fig. 823.




Schwimmer $K$ mittels eines Hebels regulirt wird, so daß durch $B$ immer nur so viel Wasser zu-, als durch $F$ abfließt.

Sehr einfach läßt sich auch der Abfluß des Wassers aus einem Reservoir $BDE$, Fig. 823, durch eine tiefere Mündung oder Röhre $D$, mittels eines breiten Ueberfalles $B$ reguliren, da hier eine mäßige Veränderung des Wasserzuflusses durch $A$, eine mäßige Vergrößerung des Wasserstandes über der Schwelle $B$, und eine verhältnißmäßig unbedeutende Vergrößerung der Druckhöhe der Ausflußmündung zur Folge hat.

Bezeichnet $F$ die Größe der Ausmündung $D$, $h$ die Höhe der Ueberfallschwelle über der Mitte dieser Mündung, $h_1$ die Höhe des Wasserspiegels

Digitized by Google

über der gedachten Schwelle, so hat man bei dem Ausflußcoefficienten $\mu$ das Abflußquantum durch $D$:

$$Q = \mu F \sqrt{2g(h + h_1)}.$$

Setzt man die Druckhöhe $h_1$ des Ueberfalles, welche sich aus dem Abflußquantum $Q_1$ der Breite $b_1$ und dem Ausflußcoefficienten $\mu_1$, mittels der Gleichung

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu_1\, b_1 \sqrt{2g h_1^3}, \text{ oder durch die Formel}$$

$$h_1 = \left[\frac{1}{2g}\left(\frac{{}^3/_2\, Q_1}{\mu_1\, b_1}\right)^2\right]^{1/3},$$

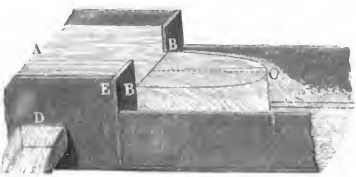
bestimmen läßt, in diesen Ausdruck ein, so erhält man die Formel

$$Q = \mu F \sqrt{2gh + \left(\frac{3g\, Q_1}{\mu_1\, b_1}\right)^{2/3}},$$

woraus zu ersehen ist, daß sich $Q$ mit $Q_1$ um so weniger verändert, je größer die Schwellenhöhe $h$ und je größer die Breite $b_1$ des Ueberfalles ist.

Die Ueberfallbreite $b_1$ läßt sich dadurch leicht vergrößern, daß man den Ueberfall einer Bogenform, wie $BOB$, Fig. 824, giebt. Die Ausmündung $D$ giebt dann ein ziemlich constantes Wasserquantum, obgleich der Zufluß bei $A$ sehr variabel ist, weil die Höhe des Wassers über der langen bogenförmigen Schwelle immer klein bleibt gegen die Höhe dieser Schwelle über der Mitte der Ausflußöffnung.

Fig. 824.




Anmerkung. Einen solchen Wassertheiler aus Eisenblech hat der Herr Oberkunstmeister Schwamkrug für den Wernergraben bei Freiberg construirt. Derselbe führt durch die rectanguläre Mündung $D$ von 5 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe fast constant 40 Cubikfuß Wasser pr. Secunde ab, während das übrige Wasser durch den Ueberfall, dessen Schwelle 2 Fuß über der oberen Mündungskante liegt, in den Graben fließt, welcher es nach dem Punkte des Bedarfs fortführt.

§. 487 **Hydrometrischer Becher.** Zur Ausmessung kleiner fließenden Wassermengen kann man sich eines kleinen in Fig. 825 abgebildeten Gefäßes bedienen, welchem ich den Namen hydrometrischer Becher gegeben habe. Dieses Instrument besteht aus einer 3 Zoll weiten und 12 Zoll langen Röhre $B$ mit einem trichterförmigen Einmündungsstücke $A$ und einem 6 Zoll weiten und ebenso hohen Gefäße $D$, welches durch ein conisches Zwischenstück $C$ mit $B$ fest verbunden ist. Dieses Gefäß ist mit einem Seitenloch $LL$ versehen, in welches verschiedene, kreisförmige Mündungen in der dünnen

Digitized by Google

Wand bildende Mundſtücke eingeſetzt werden können. Man hält dieſes Inſtrument mittels der Henkel $H$, $H$ unter das z. B. durch eine Röhre $R$ ausfließende Waſſer $S$ und läßt das auf dieſe Weiſe abgefangene Waſſer wieder durch das Mundſtück $L\,L$ abfließen. Um das eingefloſſene Waſſer zu beruhigen, iſt noch in dem Reſervoir $D$ ein feines Sieb angebracht, und um die Druckhöhe des Waſſers beobachten zu können, iſt eine Glasröhre $O\,P$ angeſetzt, welche an einer Meſſingſcala aufſteigt und ſich unten, $^1/_2$ Zoll über dem Boden des Gefäßes $D$ endigt. Aus der beobachteten Druckhöhe $h$, dem bekannten Querſchnitt des Mundſtückes und dem entſprechenden Ausflußcoefficienten läßt ſich dann die Ausflußmenge mittels der Formel

$$Q = \mu F \sqrt{2gh}$$

berechnen.

Fig. 825.

Wenn man ſich eine kleine Tabelle anfertigt, ſo kann man natürlich die Berechnung nach dieſer Formel ganz erſparen, und es iſt höchſtens nur eine einfache Interpolation zu den Tabellenwerthen erforderlich. Iſt $d$ der Durchmeſſer der Mündung, ſo hat man

$$F = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ und daher:}$$

$$Q = \frac{\mu\,\pi}{4}\, d^2 \sqrt{2gh} = \frac{\mu\,\pi}{4} \sqrt{2g} \,.\, d^2 \sqrt{h}.$$

Die Ausflußmenge $Q$ wird ſowohl das Doppelte bei dem doppelten Querſchnitte oder doppelten $d^2$ als auch bei der vierfachen Druckhöhe. Richtet man daher das Inſtrument ſo ein, daß die Maximaldruckhöhe das Vierfache der Minimaldruckhöhe, z. B. jene 12 und dieſe 3 Zoll beträgt, und bedient man ſich einer Sammlung von Mundſtücken, deren Durchmeſſer die geometriſche Reihe

$$d,\ \sqrt{2}\,d,\ 2\,d,\ 2\sqrt{2}\,d,\ 4\,d \text{ u. ſ. w.}$$

$$\text{d. i. } d;\ 1{,}414\,d;\ 2\,d;\ 2{,}828\,d,\ 4\,d \text{ u. ſ. w.}$$

bilden, ſo erhält man dadurch ein Mittel, zur Beſtimmung aller Waſſermengen innerhalb des Minimums, welches die kleinſte Mündung mit dem Durchmeſſer $d$ bei der kleinſten Druckhöhe giebt, und des Maximums, welches der größten Mündung mit dem Durchmeſſer $\sqrt{n}\,.\,d$ und der größten Druckhöhe $4\,h$ entſpricht.

Digitized by Google

Nimmt man für

| | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d =$ | $\frac{1}{8} = 0{,}1250$ | $\frac{1}{8}\sqrt{2} = 0{,}1768$ | $\frac{1}{4} = 0{,}2500$ | $\frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}3535$ | $\frac{1}{2} = 0{,}5000$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$ | 1 Zoll $= 1{,}0000$ |
| $\mu =$ | 0,690 | 0,675 | 0,660 | 0,647 | 0,635 | 0,627 | 0,620 |

an, ſo läßt ſich folgende zum Gebrauch nützliche Tabelle zuſammenſtellen.

Tabelle

über die ſtündliche Waſſermenge in Cubikfußen für folgende Mündungen:

| Druckhöhe $h$ in Zollen. | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,84 | 1,64 | 3,20 | 6,28 | 12,32 | 24,35 | 48,12 |
| 4 | 0,97 | 1,90 | 3,70 | 7,26 | 14,23 | 28,12 | 55,56 |
| 5 | 1,08 | 2,11 | 4,13 | 8,11 | 15,91 | 31,44 | 62,12 |
| 6 | 1,18 | 2,31 | 4,53 | 8,88 | 17,42 | 34,43 | 68,05 |
| 7 | 1,28 | 2,50 | 4,89 | 9,59 | 18,82 | 37,21 | 73,57 |
| 8 | 1,37 | 2,68 | 5,23 | 10,26 | 20,12 | 39,76 | 78,58 |
| 9 | 1,45 | 2,84 | 5,55 | 10,88 | 21,34 | 42,18 | 83,35 |
| 10 | 1,53 | 2,99 | 5,85 | 11,48 | 22,50 | 44,46 | 87,86 |
| 11 | 1,60 | 3,13 | 6,13 | 12,03 | 23,59 | 46,62 | 92,14 |
| 12 | 1,67 | 3 27 | 6,40 | 12,56 | 24,64 | 48,70 | 96,24 |
| 13 | 1,74 | 3,40 | 6,66 | 13,07 | 25,65 | 50,69 | 100,17 |

Der Gebrauch dieſer Tabelle iſt aus folgendem Beiſpiele zu erſehen.

Beiſpiel. Um die Ergiebigkeit eines Brunnens zu ermitteln, hat man das Waſſer deſſelben durch einen hydrometriſchen Becher fließen laſſen, und gefunden, daß beim Ausfluſſe durch die Mündung V. (von $\frac{1}{2}$ Zoll Durchmeſſer) der Beharrungszuſtand dann eintrat, als die Druckhöhe 10,4 Zoll war. Der Tabelle zufolge iſt für $h = 10$ Zoll:

$$Q = 22{,}50 \text{ Cubikfuß ſtündlich,}$$

und für $h = 11$ Zoll:

$$Q = 23{,}59 \text{ Cubikfuß,}$$

folglich die Differenz für 1 Zoll, 1,09 Cubikfuß, und für 0,4 Zoll, $0{,}4 \cdot 1{,}09 = 0{,}436$ Cubikfuß. Hieraus ergiebt ſich das Waſſerquantum für $h = 10{,}4$ Zoll Druckhöhe:

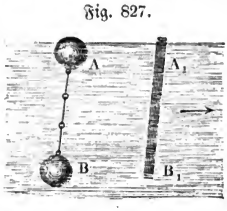
$$Q = 22{,}50 + 0{,}436 = 22{,}94 \text{ Cubikfuß.}$$

Digitized by Google

**Schwimmer.** Die Wassermengen von größeren Bächen, Canälen §. 488
und von Flüssen lassen sich nur mittels die Geschwindigkeit angebender Hydrometer bestimmen. Unter diesen Instrumenten sind aber die Schwimmer (franz. flotteurs; engl. floating-bodies) die einfachsten. Man kann zwar hierzu jeden schwimmenden Körper gebrauchen, doch ist es sicherer, Körper von mittlerer Größe, welche nur wenig specifisch leichter als Wasser sind, hierzu zu verwenden. Körper von ungefähr $^1/_{10}$ Cubikfuß Inhalt sind hinreichend groß. Sehr große Körper nehmen nicht leicht die Geschwindigkeit des Wassers an, und sehr kleine Körper lassen sich wieder, namentlich wenn sie viel aus dem Wasser hervorragen, leicht durch zufällige Umstände, zumal durch die Luft über dem Wasserspiegel, in ihrer Bewegung stören. Oft wendet man einfache Holzstücke an, gut ist es aber, wenn dieselben mit einer hellen Firnißfarbe überstrichen sind, und noch besser sind die hohlen Schwimmer, wie Glasflaschen, Blechkugeln u. s. w., weil man diese nach Belieben mit Wasser füllen kann. Am häufigsten wendet man aber die Schwimmkugeln an. Dieselben werden von 4 bis 12 Zoll Durchmesser aus Messingblech verfertigt, sie bekommen, um sie nicht leicht aus dem Auge zu verlieren, einen Anstrich von lichter Oelfarbe, und erhalten auch noch eine Oeffnung mit einem Halse, um sie mit Wasser anfüllen und verstöpseln zu können. Eine solche Schwimmkugel $A$, Fig. 826, giebt allerdings nur die Geschwindigkeit an der Oberfläche und sogar oft nur die im Stromstriche an, allein man kann durch das Aneinanderhängen zweier Kugeln $A$ und $B$, Fig. 827, auch die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmen. In diesem Falle wird die eine Kugel $B$, welche unter Wasser schwimmen soll, ganz mit Wasser, die andere aber, welche im Wasserspiegel zu schwimmen bestimmt ist, nur so viel mit Wasser angefüllt, daß sie nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Beide Kugeln werden durch einen Faden oder durch einen Draht oder durch eine dünne Drahtkette mit einander verbunden. Zuerst bestimmt man durch die einfache Kugel die Oberflächengeschwindigkeit $c_0$, und dann beobachtet man durch die Kugelverbindung die mittlere Geschwindigkeit $c$ beider; bezeichnet man nun die Geschwindigkeit in der Tiefe der zweiten Kugel durch $c_1$, so läßt sich setzen:

Fig. 826.

Fig. 827.




$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}, \text{ und daher umgekehrt: } c_1 = 2\,c - c_0.$$

Wenn man nun beide Kugeln durch längere und längere Drähte mit ein-

Digitized by Google

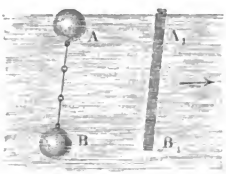
ander verbindet, so kann man auf diese Weise nach und nach die Geschwindigkeiten in größeren und größeren Tiefen finden. Uebrigens ergiebt sich auch die mittlere Geschwindigkeit $c$ eines Perpendikels, wenn man die zweite Kugel nahe über dem Boden schwimmen läßt und ebenfalls

$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}$$

setzt; genauer aber noch, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Geschwindigkeiten in einem Perpendikel nimmt.

Um die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel anzugeben, wendet man auch oft den in Fig. 828 abgebildeten Schwimmstab $A_1 B_1$ an, namentlich ist dieser bei Messungen in Canälen und Gräben bequem, zumal wenn er aus kurzen Stücken zusammengeschraubt werden kann. Der Schwimmstab, welchen der Verfasser anwendet, ist aus 15 ausgehöhlten Theilen, jeder von 1 Decimeter Länge, zusammengesetzt. Damit derselbe ziemlich aufrecht schwimme, wird stets das unterste Stück so stark mit Schrot angefüllt, daß der Kopf beim Schwimmen nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Die Anzahl der zusammenzuschraubenden Stücke hängt natürlich von der Tiefe des Canales ab.

Fig. 828.




An dem Schwimmstabe, sowie an der Schwimmkugelverbindung läßt sich auch wahrnehmen, daß bei ungehinderter Bewegung des Wassers in Betten die Geschwindigkeit am Wasserspiegel größer ist als am Boden, weil der Kopf des Stabes dem Fuße und die obere Kugel der unteren etwas vorausschwimmt. Nur bei durch Verengungen, z. B. durch Brückenpfeiler gebildeten Aufstauungen, findet das Gegentheil statt.

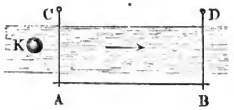
Anmerkung. In der Regel ist, namentlich bei großen Schwimmern, wie Schiffen u. s. w., die Geschwindigkeit der schwimmenden Körper etwas größer als die des Wassers, weniger deshalb, weil diese Körper beim Schwimmen von einer durch die Oberfläche des Wassers gebildeten schiefen Ebene herabgleiten, als deshalb, weil sie nicht oder nur zum Theil an der unregelmäßigen inneren Bewegung des Wassers Theil nehmen; doch ist die Abweichung bei kleinen Schwimmern klein genug, um sie vernachlässigen zu können.

§. 489 **Geschwindigkeits- und Querschnittsbestimmung.** Die Geschwindigkeit einer Schwimmkugel findet man, indem man mit einer guten Secundenuhr oder an einem halbe Secunden schlagenden Lothe oder Pendel (§. 327) die Zeit $t$ beobachtet, welche diese auf dem Wasser schwimmend braucht, um eine an einem Ufer abgesteckte und ausgemessene Strecke $AB = s$, Fig. 829, zurückzulegen. Es ist dann die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel, $c = \frac{s}{t}$. Damit die

Digitized by Google

Zeit $t$ genau dem am Ufer abgemeſſenen Wege entſprechend gefunden werde, iſt es nöthig, mit Hülfe eines Winkelkreuzes oder Winkelſpiegels am jenſeitigen Ufer zwei, Perpendikel auf $AB$ bezeichnende Signalſtangen $C$ und $D$ einzuſtecken. Stellt man ſich hinter $A$, ſo kann man den Zeitpunkt beobachten, wenn der etwas oberhalb $A$ eingeſetzte Schwimmer $K$ in das Alignement $AC$ kommt, und begiebt man ſich hinter $B$, ſo kann man ebenfalls an der in der Hand gehaltenen Uhr beobachten, wann der Schwimmer in das Alignement $BD$ gelangt, und man findet dann durch Subtraction der Beobachtungszeiten die geſuchte und der Durchlaufung von $s$ entſprechende Zeit $t$.

Fig. 829.




Außer der mittleren Geſchwindigkeit $c$ des Waſſers iſt auch noch der Inhalt $F$ des Querprofiles erforderlich, um das Waſſerquantum $Q = Fc$ zu beſtimmen. Um dieſen Inhalt angeben zu können, iſt es aber nöthig, daß man die Breite und mittlere Tiefe des Waſſers kenne. Die Tiefe mißt man mit einer eingetheilten Sondirſtange $AB$, Fig. 830, mit länglichem Querſchnitte und einem Brettchen $B$ am Fuße; bei größeren Tiefen kann man ſich auch einer Sondirkette bedienen, an deren Ende eine eiſerne Platte hängt, die ſich beim Einſenken auf das Grundbette aufſetzt. Die Breite und die den gemeſſenen Tiefen entſprechenden Abſciſſen oder Abſtände

Fig. 830.

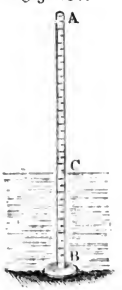


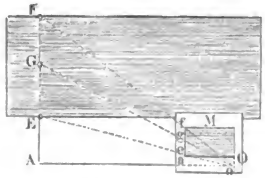

Fig. 831.

von den Ufern ergeben ſich bei Canälen und ſchmalen Bächen $EFG$, Fig. 831, durch Ausſpannen einer Meßkette $AB$ oder Legen einer Stange u. ſ. w. quer über das fließende Waſſer. Bei breiten Flüſſen beſtimmt man ſie mit Hülfe eines Meßtiſches $M$, den man in ſchicklicher Entfernung $AO$ vom zu meſſenden Querprofile $EF$, Fig. 832 (a. f. S.), aufſtellt. Iſt $ao$ auf der Menſel die verjüngte Entfernung $AO$ der Standpunkte $A$ und $O$ von einander, und hat man $ao$ in der Richtung von $AO$ und dadurch auch die vorher beim Aufſtellen des Meßtiſches aufgetragene Breitenrichtung $af$ mit der abgeſteckten Breitenlinie $AF$ parallel geſtellt, ſo ſchneidet jede Viſirlinie nach den Punkten $E$, $F$, $G$ u. ſ. w. im Querprofile, entſprechende Punkte $e$, $f$, $g$ auf der Menſel ab, und es ſind $ae$, $af$, $ag$ u. ſ. w. die Entfernungen $AE$, $AF$, $AG$ u. ſ. w. im verjüngten Maße.

Digitized by Google

Man hat alſo beim Einſetzen der Sondirſtange und dem dadurch bewirkten Tiefenmeſſen nicht erſt nöthig, die Entfernungen der entſprechenden Punkte von den Ufern zu meſſen, wenn der am Meßtiſche ſtehende Ingenieur die Sondirſtange beim Einſetzen in der Linie $EF$ anviſirt.

Fig. 832.




Beſteht nun die Breite $EF$, Fig. 831, eines Querprofiles aus den Theilen $b_1$, $b_2$, $b_3$ u. ſ. w. und ſind die mittleren Tiefen innerhalb dieſer Theile $a_1$, $a_2$, $a_3$, ſowie die mittleren Geſchwindigkeiten $c_1$, $c_2$, $c_3$ u. ſ. w., ſo hat man den Inhalt des Querprofiles:

$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots,$$

die Waſſermenge:

$$Q = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + \cdots,$$

und endlich die mittlere Geſchwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}.$$

Beiſpiel. An einer ziemlich geraden und unveränderlichen Flußſtrecke hat man Folgendes gefunden:

| | Fuß. | Fuß. | Fuß. | Fuß. | Fuß. |
|---|---|---|---|---|---|
| In den Mittelpunkten der Breitentheile: | 5 | 12 | 20 | 15 | 7 |
| die Tiefen . . . . . | 3 | 6 | 11 | 8 | 4 |
| die mittleren Geſchwindigkeiten . . | 1,9 | 2,3 | 2,8 | 2,4 | 2,1 |

Es läßt ſich daher ſetzen, der Inhalt des Querprofiles:

$F = 5.3 + 12.6 + 20.11 + 15.8 + 7.4 = 455$ Quadratfuß,

das Waſſerquantum:

$Q = 15.1{,}9 + 72.2{,}3 + 220.2{,}8 + 120.2{,}4 + 28.2{,}1 = 1156{,}9$ Cbfß.

Die mittlere Geſchwindigkeit iſt:

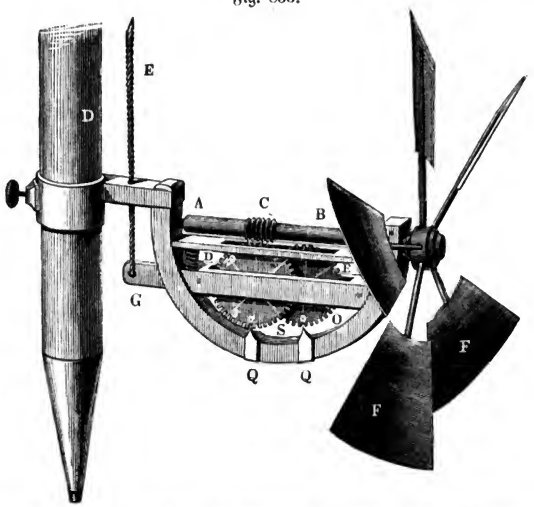
$$c = \frac{1156{,}9}{455} = 2{,}54 \text{ Fuß}.$$

§. 490 **Hydrometriſcher Flügel.** Das vorzüglichſte Hydrometer iſt das hydrometriſche Flügelrad von Woltmann (franz. Moulinet de Woltmann; engl. Tachometer of Woltmann), Fig. 833. Es beſteht aus einer

Digitized by Google

horizontalen Welle $AB$ mit 2 bis 5 ſchief gegen die Axenrichtung ſtehenden Flächen oder Flügeln $F$, und giebt, unter das Waſſer getaucht und der

Fig. 833.




Bewegungsrichtung deſſelben entgegengehalten, durch die Anzahl ſeiner Umdrehungen innerhalb einer gewiſſen Zeit die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers an. Um die Anzahl dieſer Umdrehungen ableſen zu können, erhält die Welle ein paar Schraubengänge $C$, und läßt man dieſe zwiſchen die Zähne eines Rades $D$ greifen, auf deſſen Seitenflächen Ziffern eingravirt ſind, welche an einem feſten Zeiger die Anzahl der Umdrehungen der Flügelwelle angeben. Um aber eine große Anzahl von Umdrehungen beobachten zu können, wird auf die Welle dieſes Zahnrades noch ein Getriebe aufgeſetzt, das in ein zweites Zahnrad $E$ eingreift, an dem ſich, gleichſam wie am Stundenweiſer einer Uhr, vielfache, z. B. fünf- oder zehnfache der Flügelumdrehungen ableſen laſſen. Hat z. B. jedes der beiden Zahnräder 50 Zähne, und das Getriebe deren 10, ſo dreht ſich das zweite Rad um einen Zahn, während das erſte um fünf Zähne fortrückt, oder das Flügelrad fünf Umdrehungen macht. Wenn der Zeiger des erſten Rades auf $27 = 25 + 2$ und der des zweiten auf 32 ſteht, ſo iſt hiernach die entſprechende Umdrehungszahl des Flügels:

$$= 32.5 + 2 = 162.$$

Das ganze Inſtrument wird mit einer Blechfahne an einen Stab geſchraubt,

Digitized by Google

um es bequem ins Wasser eintauchen und dem Strome entgegenhalten zu können. Damit aber das Räderwerk nur während der Beobachtungszeit umlaufe, läßt man seine Axen in Pfannen umgehen, welche auf einem Hebel $G\,O$ sitzen, der durch eine Feder niedergedrückt wird, so daß ein Eingreifen der Zähne des ersten Rades in die Schraubengänge nur so lange statt hat, als man den Hebel mittels einer Schnur $G\,E$ emporzieht.

Die Umdrehungszahl eines Flügels in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Secunde, ist nicht genau der Geschwindigkeit des Wassers proportional, es läßt sich daher auch nicht $v = \alpha . u$, wo $u$ die Umdrehungszahl, $v$ die Geschwindigkeit und $\alpha$ die Erfahrungszahl bezeichnen, setzen; es ist vielmehr zu setzen:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder genauer:

$$v = v_0 + \alpha u + \beta u^2 \cdots,$$

oder noch genauer:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2},$$

wo $v_0$ diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher das Wasser nicht mehr im Stande ist, den Flügel in Umdrehung zu setzen, $\alpha$ und $\beta$ aber Erfahrungscoefficienten ausdrücken. Die Constanten $v_0$, $\alpha$, $\beta$ sind für jedes Instrument besonders zu ermitteln. Mit Hülfe derselben ergiebt sich durch eine einzige Beobachtung die Geschwindigkeit, doch ist es sicherer, deren immer wenigstens zwei anzustellen, und den mittleren Werth als den richtigen einzuführen.

Beispiel. Wenn bei einem Flügelrade $v_0 = 0{,}110$ Fuß, $\alpha = 0{,}480$, und $\beta = 0$, also $v = 0{,}11 + 0{,}48\,u$ ist, und man hat bei einer Beobachtung mit diesem Instrumente in einer Zeit von 80 Secunden eine Umdrehungszahl von 210 gefunden, so ist die entsprechende Geschwindigkeit des Wassers:

$$v = 0{,}11 + 0{,}48 \cdot \frac{210}{80} = 0{,}11 + 1{,}26 = 1{,}37 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Die Constanten $v_0$, $\alpha$ und $\beta$ hängen vorzüglich von der Größe des Stoßwinkels, d. i. von dem Winkel ab, welchen die Flügelfläche mit der Bewegungsrichtung des Wassers und also auch mit der Arenrichtung des Flügels einschließt. Um bei kleinen Geschwindigkeiten noch ziemlich genau beobachten zu können, ist es gut, den Stoßwinkel groß, d. i. gegen $70^0$ zu machen. Uebrigens ist es zweckmäßig, Flügel von verschiedener Größe und verschiedenen Stoßwinkeln zu haben, um, je nachdem die Tiefe oder die Geschwindigkeit des fließenden Wassers größer oder kleiner ist, den einen oder den anderen anwenden zu können.

Anmerkung 2. Hätte der hydrometrische Flügel bei seiner Umdrehung keine Hindernisse zu überwinden, so würde der Flügel $A\,B$, Fig. 934, den Weg $C\,C_1 = C\,D\,.\,tang.\,C\,D\,C_1$ zurücklegen, während das Wasser um $C\,D$ fortläuft, bezeichnet daher $v$ die Geschwindigkeit des Wassers und $\delta$ den Stoßwinkel

Digitized by Google

$OCB = CDC_1$ desselben, so hat man unter dieser Voraussetzung, die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit des Flügels:

$$v_1 = v \, tang. \, \delta;$$

es ist hiernach zu ermessen, daß bei dem mittleren Flügelradius $r$ die Umdrehungszahl des Flügelrades

$$u = \frac{v_1}{2\pi r} = \frac{v \, tang. \, \delta}{2\pi r}$$

ausfällt, und folglich direct wie die Geschwindigkeit $v$ des Wassers und wie die Tangente des Stoßwinkels der Flügel, sowie umgekehrt wie der mittlere Flügelhalbmesser wächst.

Fig. 834.

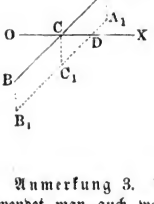



Fig. 835.

Anmerkung 3. Um die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers zu finden, wendet man auch wohl ein kleines Blechrädchen, wie Fig. 835 repräsentirt, an, indem man nur dessen Untertheil ins Wasser eintaucht. Die Anzahl der Umdrehungen desselben läßt sich durch ein Räderwerk genau wie beim hydraulischen Flügel angeben.

Um die Constanten oder Coefficienten eines hydrometrischen Flügelrades zu finden, ist es nöthig, dieses Instrument in fließende Wasser einzuhalten, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, und die entsprechenden Umdrehungszahlen zu beobachten. Wiewohl man eigentlich nur so viel Beobachtungen braucht, als Constanten vorhanden sind, so ist es doch viel sicherer, so viel Beobachtungen wie möglich, und namentlich auch bei sehr verschiedenen Geschwindigkeiten anzustellen, weil man dann die Methode der kleinsten Quadrate (s. analyt. Hülfslehren Art. 36) anwenden und dadurch den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler herabziehen kann. Uebrigens läßt sich die Geschwindigkeit des Wassers entweder durch eine Schwimmkugel oder auch dadurch finden, daß man das Wasser in einem Aichgefäße auffängt, und die darin gemessene Wassermenge durch das Querprofil dividirt. Bei Anwendung der Schwimmkugeln ist ruhige Luft und eine gerade und gleichförmig fließende Wasserstrecke nöthig. Der Flügel ist an mehreren Stellen des von dem Schwimmer durchlaufenen Weges einzuhalten, und es ist auch die Genauigkeit beförderend, wenn der Durchmesser der Schwimmkugel ungefähr gleich ist dem Durchmesser des Flügelrades. §. 491

Viele Vortheile gewährt die zweite Bestimmungsweise, wo man das Wasser, in welches der Flügel eingetaucht wird, in einem Aichkasten auffängt. Zu diesem Zwecke, und zum Justiren der Hydrometer überhaupt, ist es sehr gut, wenn der Hydrauliker über ein besonderes, aus einem Ausflußkasten, einem Aichreservoir und einem zwischen beiden befindlichen Gerinne bestehendes hydraulisches Observatorium verfügen kann. Bei einem solchen ist ohne Umstände dem Wasser jede beliebige Geschwindigkeit zu ertheilen, indem man nicht nur den Eintritt in das Gerinne, sondern auch die Bewegung



Digitized by Google

in demselben durch Einsatzbretter nach Willkür reguliren kann. Bei den Beobachtungen hat man den Flügel an verschiedenen Stellen eines Querprofiles im Grunde einzuhalten, die Tiefe dieses Profiles durch Wasserstandsscalen zu messen, und endlich das in irgend einer Zeit durchgelaufene Wasser im unteren Reservoir zu aichen (§. 480). Den Inhalt $F$ des Querprofiles erhält man durch Multiplication der mittleren Wassertiefe mit der mittleren Breite, und das Wasserquantum $Q$ erhält man aus dem mittleren Querschnitte $G$ des Aichmaßes und der Höhe $s$ des in der Zeit zugeflossenen Wasserquantums durch die Formel

$$Q = \frac{G s}{t};$$

aus $Q$ und $F$ folgt zuletzt die mittlere Wassergeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{G s}{F t}.$$

Die entsprechende Umdrehungszahl $u$ des Flügels ist das Mittel aus allen Umdrehungen, welche man erhält, wenn man das Instrument in verschiedenen Breiten und Tiefen des ausgemessenen Querprofiles einhält.

Hat man nun bei einer Versuchsreihe die mittleren Geschwindigkeiten $v_1$, $v_2$, $v_3$ u. s. w. und die entsprechenden Umdrehungszahlen gefunden, so erhält man durch Substitution in der Formel:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder in der genaueren:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$$

so viel Bestimmungsgleichungen für die Constanten $v_0$, $\alpha$, $\beta$, als Beobachtungen angestellt worden sind, und man kann nun hieraus die Constanten selbst finden, indem man entweder das Art. 36 der analyt. Hülfslehren angegebene Verfahren anwendet, oder indem man diese Gleichungen in so viel Gruppen theilt, als unbekannte Constanten vorhanden sind, und diese durch Addition zu so viel Bestimmungsgleichungen vereinigt, als zur Ermittelung von $v_0$, $\alpha$ und nach Befinden $\beta$, nöthig sind.

Unter der Voraussetzung, daß die passiven Widerstände des Instrumentes klein genug sind, um sie außer Acht lassen zu können, läßt sich $v = \alpha u$ setzen und $\alpha$ dadurch finden, daß man das Flügelrad im stillstehenden Wasser fortbewegt und hierbei die Anzahl $n = u t$ der Umdrehungen beobachtet, welche es bei Durchlaufung eines Weges $s = v t$ macht. Es ist dann:

$$\alpha = \frac{v}{u} = \frac{v t}{u t} = \frac{s}{n}.$$

Anmerkung 1. Wenn man die einfachere Formel mit zwei Constanten zu Grunde legt, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate setzen:

$$v_0 = \frac{\Sigma(y^2)\,\Sigma(x) - \Sigma(x\,y)\,\Sigma(y)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(x\,y)]^2} \text{ und } \alpha = \frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(x\,y)\,\Sigma(x)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(x\,y)]^2},$$

Digitized by Google

wobei $x = \frac{1}{v}$ und $y = \frac{u}{v}$, und das Zeichen $\Sigma$ die Summe von allen ihm folgenden gleichnamigen Werthen, z. B.

$$\Sigma(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots,$$

$$\Sigma(xy) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{u_1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{u_2}{v_2} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{u_3}{v_3} + \cdots$$

bezeichnet.

Beiſpiel. Man hat mit einem kleinen hydrometriſchen Flügel bei den Geſchwindigkeiten:

0,163; 0,205; 0,298; 0,366; 0,610 Meter.

die Umdrehungszahlen pr. Secunde:

0,600; 0,835; 1,467; 1,805; 3,142

beobachtet, und ſoll nun die dieſem Flügel entſprechenden Conſtanten beſtimmen. Mit Hülfe der in der Anmerkung gegebenen Formel folgt, da

$$\Sigma(x) = \frac{1}{0,163} + \frac{1}{0,205} + \cdots = 18,740,$$

$$\Sigma(y) = \frac{0,600}{0,163} + \frac{0,835}{0,205} + \cdots = 22,759,$$

$$\Sigma(x^2) = \left(\frac{1}{0,163}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,205}\right)^2 + \cdots = 82,846,$$

$$\Sigma(y^2) = 105,223, \text{ und}$$

$$\Sigma(xy) = \frac{0,600}{(0,163)^2} + \frac{0,835}{(0,205)^2} + \cdots = 80,961$$

iſt,

$$v_0 = \frac{105,223 \,.\, 18,740 - 80,961 \,.\, 22,759}{82,846 \,.\, 105,223 - (80,961)^2} = \frac{129,5}{2162} = 0,060 \text{ und}$$

$$a = \frac{368,3}{2162} = 0,1703,$$

daher gilt für dieſes Inſtrument die Formel:

$$v = 0,060 + 0,1703\, u.$$

Setzt man hierin $u = 0,6$, ſo bekommt man:

$$v = 0,060 + 0,102 = 0,162;$$

ferner $u = 0,835$ giebt:

$$v = 0,060 + 0,142 = 0,202;$$

ferner $u = 1,467$:

$$v = 0,060 + 0,249 = 0,309;$$

ferner $u = 1,805$:

$$v = 0,060 + 0,307 = 0,367;$$

endlich $u = 3,142$:

$$v = 0,060 + 0,535 = 0,595;$$

es findet alſo eine ſehr gute Uebereinſtimmung dieſer berechneten Werthe mit den beobachteten ſtatt.

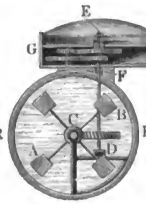
Anmerkung 2. Man kann auch nach Lapointe das hydrauliſche Flügelrad in eine cylindriſche Röhre einſetzen, und ſich von demſelben die Geſchwindigkeit des durchfließenden Waſſers angeben laſſen. Der Zählapparat kann dann außerhalb des Waſſers ſtehen und mit dem Rade durch eine ſtehende Welle in Verbindung geſetzt werden. Lapointe nennt dieſes Inſtrument une tube jaugeur (ſ. Comptes



Digitized by Google

rendues T. XXV, 1848; auch Polytechn. Centralblatt 1847. Fig. 836 führt eine ideelle Darstellung des hydrometrischen Flügelrades in einer Röhre vor Augen. Das Flügelrad $ACB$ setzt auch hier mittels Schraube ohne Ende eine Welle $DE$ in Umdrehung; die letztere ist aber mittels einer Stopfbüchse $F$ aus der Röhre $RR$, in welcher das zu messende Wasser fließt, in das Gehäuse $GH$ des Zählapparates geführt, dessen innere Einrichtung sehr verschieden sein kann.

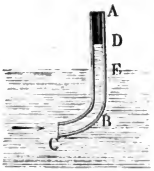
Fig. 836.




Anmerkung 3. In Frankreich fängt man erst seit Kurzem an, dem hydraulischen Flügelrade die nöthige Aufmerksamkeit zu schenken. Wir finden eine ausführliche Abhandlung über dieses Instrument in den Annales des ponts et chaussées, T. XIV, 1847, von Baumgarten, und einen Auszug hiervon im Polytechnischen Centralblatte, 1849. Herr Baumgarten empfiehlt besonders die Schraubenflügel, und macht hierzu noch manche Bemerkungen, die mit den von uns allerdings schon längst gemachten Erfahrungen ganz im Einklange stehen. Ein neues hydrometrisches Flügelrad mit einer langen Schraube und ohne Räder beschreibt Boileau in seinem Traité de la mesure des eaux courantes.

§. 492 **Pitot'sche Röhre.** Die übrigen Hydrometer sind unvollkommener als der hydraulische Flügel, denn sie gewähren entweder weniger Genauigkeit, oder sie sind umständlicher im Gebrauche. Das einfachste Instrument dieser Art ist die Pitot'sche Röhre (franz. la tube de Pitot; engl. Pitot's tube). In seiner einfachsten Gestalt besteht es in einer gläsernen Knieröhre $ABC$, Fig. 837, welche so ins Wasser gehalten wird, daß der untere Theil derselben horizontal und dem Wasser entgegen zu stehen kommt. Durch den Wasserstoß wird nun in dieser Röhre eine Wassersäule zurückgehalten, die über das Niveau des äußeren Wasserspiegels zu stehen kommt, und die Erhebung $DE$ dieser Wassersäule fällt um so größer aus, je größer der Stoß oder die ihn erzeugende Geschwindigkeit des Wassers ist; es kann daher auch umgekehrt, diese Erhebung oder Niveaudifferenz als Maß der Geschwindigkeit des Wassers dienen. Setzen wir diese Erhebung $DE$ über den äußeren Wasserspiegel, $= h$, und die Geschwindigkeit des Wassers, $= v$, so können wir, wenn $\mu$ eine Erfahrungszahl bezeichnet,

Fig. 837.




$$h = \frac{v^2}{2g\mu^2}$$

setzen, und daher umgekehrt

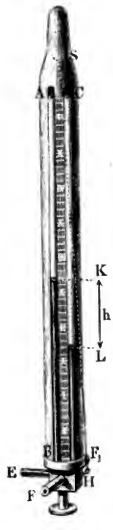
$$v = \mu\sqrt{2gh} \text{ oder einfacher}$$
$$v = \psi\sqrt{h}.$$

Digitized by Google

Um die Constante $\psi$ zu finden, hält man das Instrument an einer Stelle ins Wasser, wo die Geschwindigkeit $v_1$ bekannt ist; zeigt sich hier die Erhebung $= h_1$, so hat man für die Constante $\psi = \frac{v_1}{\sqrt{h_1}}$, welche nun in anderen Fällen, wo die Geschwindigkeit mit diesem Instrumente gesucht werden soll, zu gebrauchen ist.

Um das Ablesen der Höhe $h$ zu erleichtern, läßt man das Instrument aus zwei Röhren $AB$ und $CD$ bestehen, und wie Fig. 838 zeigt, aus der einen ein Röhrchen $E$ in der Stromrichtung, aus der anderen aber zwei Röhrchen $F$ und $F_1$ rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, durch beide Röhren aber einen einzigen Hahn $H$ gehen, womit man die Wassersäulen in beiden Röhren absperren kann. Zieht man das Instrument aus dem Wasser heraus, so kann man bequem an einer zwischen beiden Röhren befindlichen Scala die Differenz $KL = h$ der beiden Wassersäulen ablesen. Damit das Wasser in der Röhre keine großen Schwankungen annehme, ist es nöthig, den Röhren enge Einmündungen zu geben, und damit das Absperren der Röhren schnell und sicher vor sich gehen könne, versieht man den Hahn mit einem Arme und einer in der Figur größtentheils punktirten Zugstange $HS$, welche oben nahe an der Handhabe des Instrumentes sich endigt.

Fig. 838.



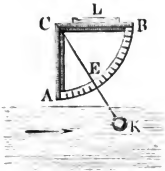

Anmerkung 1. Wenn auch die Pitot'sche Röhre nicht die Genauigkeit gewährt wie das hydrometrische Flügelrad, so ist sie doch wegen ihres einfachen Gebrauches ein sehr zu empfehlendes Instrument. Der Verfasser handelt im Polytechnischen Centralblatte, 1847, etwas specieller von diesem Instrumente, und theilt auch daselbst eine Reihe von Erfahrungszahlen und die darauf gegründete Bestimmung des Coefficienten $\psi$ mit. Bei seinem Instrumente sind die Geschwindigkeiten zwischen 0,32 und 1,24 Meter, $v = 3{,}545\sqrt{h}$ Meter zu setzen.

Anmerkung 2. Duchemin empfiehlt eine Pitot'sche Röhre mit Schwimmer. Da dieselbe ziemlich weit sein muß, so giebt sie eine nicht unbeträchtliche Stauung, weshalb sie in engen Canälen nicht zu gebrauchen ist (s. Duchemin: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides). Boileau beschreibt in dem oben (§. 412) citirten Werke eine neue Pitot'sche Röhre mit einem kleinen Aichgefäße, wodurch die Geschwindigkeit des fließenden Wassers mittels der Wassermenge, welche das letztere über den Wasserspiegel drückt, gemessen wird.

Digitized by Google

§. 493 **Stromquadrant.** Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel (franz. pendule hydrométrique; engl. hydrometrical-pendulum) ist vorzüglich von Ximenes, Michelotti, Gerstner und Eytelwein zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wasser angewendet worden. Dieses Instrument besteht aus einem in Grade und feinere Theile eingetheilten Quadranten $AB$, Fig. 839, und aus einer im Mittelpunkte $C$ desselben mittels eines Fadens aufgehängten Metall- oder Elfenbeinkugel $K$ von 2 bis 3 Zoll Durchmesser; es giebt die Geschwindigkeit des Wassers durch den Winkel $ACE$ an, um welchen der von der Kugel gespannte Faden von der Verticalen $CA$ abweicht, wenn man die Ebene des Instrumentes in die Richtung des Stromes bringt, und die Kugel unter das Wasser tauchen läßt. Da der Winkel nicht leicht 40 und mehr Grade beträgt, so giebt man diesem Instrumente oft nur die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes und bringt die Gradtheilung auf der horizontalen Kathete desselben an. Zum Einstellen der Index- oder Nulllinie in die Verticale wendet man am besten eine oben aufsitzende Röhrenlibelle an, oder man bedient sich dazu der Kugel selbst, indem man dieselbe außerhalb des Wassers hängen läßt und das Instrument so lange dreht, bis der Faden in die Nulllinie der Eintheilung fällt. Bei Geschwindigkeiten unter 4 Fuß kann man sich einer Elfenbeinkugel, bei größeren Geschwindigkeiten muß man sich aber schwerer Metallkugeln bedienen. Wegen der steten Schwankungen der Kugel in der Bewegungsrichtung des Wassers sowohl als auch rechtwinkelig gegen die Stromrichtung ist das Ablesen ziemlich beschwerlich und läßt viel Unsicherheit zurück; es ist daher dieses Instrument nicht zu den vollkommneren zu zählen.

Fig. 839.




Die Abhängigkeit zwischen dem Ablenkungswinkel und der Geschwindigkeit des Wassers läßt sich bei einer nicht sehr tief eingetauchten Kugel auf folgende Weise ermitteln. Aus dem Gewichte $G$ der Kugel und aus dem mit dem Quadrate der Geschwindigkeit $v$ und dem Querschnitte $F$ der Kugel gleichmäßig wachsenden Wasserstoße $P = \mu F v^2$, folgt eine Mittelkraft $R$, deren Richtung auch der Faden annimmt, und welche bestimmt ist durch den Ablenkungswinkel $\delta$, für den man hat:

$$tang.\,\delta = \frac{P}{G} = \frac{\mu F v^2}{G};$$

es ist daher auch umgekehrt:

$$v^2 = \frac{G\,tang.\,\delta}{\mu F}, \text{ und } v = \sqrt{\frac{G}{\mu F}} \cdot \sqrt{tang.\,\delta},$$

d. i.:

$$v = \psi \sqrt{tang.\,\delta},$$

Digitized by Google

wenn $\psi$ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den man vor dem Gebrauche auf dem oben angegebenen Wege (§. 491) zu ermitteln hat.

**Rheometer.** Die übrigen Hydrometer, als: Lorgna's Wasserhebel, Ximenes' Wasserfahne, Michelotti's hydraulische Schnellwage, Brünning's Tachometer, Poletti's Rheometer u. s. w., sind im Gebrauche umständlicher und zum Theil auch unsicher. Das Princip ist bei allen diesen Instrumenten dasselbe; diese Instrumente sind aus einer Stoßfläche und einer Wage zusammengesetzt, und es dient die letztere dazu, den Stoß $P$ des Wassers gegen die erstere anzugeben; da dieser aber $= \mu F v^2$ ist, so hat man umgekehrt: § 494

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \psi \sqrt{P},$$

wo $\psi$ eine von der Größe der Stoßfläche $F$ abhängige Erfahrungsconstante bezeichnet.

Das Rheometer, welches in der neueren Zeit von Poletti vorgeschlagen wurde, und im Wesentlichen nicht von Michelotti's hydrometrischer Schnellwage abweicht, besteht aus einem um eine feste Axe $C$ drehbaren Hebel $AB$, Fig. 840, und einem zweiten Arme $CD$, an welchen die Stoßfläche oder, nach Poletti, ein bloßer Stoßstab angeschraubt wird. Um dem Stoße des Wassers gegen diese Fläche das Gleichgewicht zu halten, werden in die am Hebelende $A$ hängende Blechbüchse Gewichte oder Schrotkörner eingelegt, und um die leere Wage im stillstehenden Wasser ins Gleichgewicht zu setzen, ist bei $B$ ein Gegengewicht angesetzt, welches das äußerste Ende des Armes $CB$ ausmacht. Aus dem aufgelegten Gewichte $G$ folgt die Stoßkraft $P$ mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CF = b$, durch die Formel $Pb = Ga$, weshalb nun

Fig. 840.

$$P = \frac{a}{b} G \text{ und } v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \sqrt{\frac{aG}{mbF}} = \psi \sqrt{G}$$

ist, wo $\psi$ wieder eine Erfahrungsconstante bezeichnet.

Ein nach demselben Principe construirtes Hydrometer, wo dem Wasserstoß durch die Kraft einer Feder das Gleichgewicht gehalten wird (hydromètre dynamométrique), beschreibt Boileau in seiner Abhandlung über das Wassermessen.

Anmerkung 1. Ueber die letzteren Hydrometer wird ausführlicher gehandelt in Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, ferner in Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. II., in Brünning's Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, in Venturoli's Elementi di

Digitized by Google

Meccanica e d'Idraulica, Vol. II. Wegen Poletti's Rheometer ist in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. XX., 1826, nachzusehen. Stevenson's Hydrometer ist der Woltmann'sche Flügel, s. Dingler's Journal, Bd. LXV., 1842. Die nach Art der Reactionsräder construirten Hydrometer und Gasuhren werden im folgenden Capitel abgehandelt.

Anmerkung 2. Ein besonders auch zum praktischen Gebrauch zu empfehlendes Werk ist die Hydrometrie oder praktische Anleitung zum Wassermessen, von Bornemann, Freiberg 1849. Der Schrift von Boileau ist schon wiederholt gedacht worden (s. §. 412 u. s. w.).

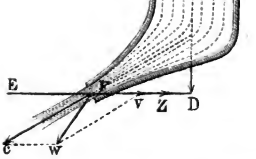
---

## Neuntes Capitel.

## Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

§. 495 **Reaction des Wassers.** Der Gesammtdruck des in einem Gefäße stillstehenden Wassers reducirt sich nach §. 362 auf eine dem Gewichte dieser Wassermasse gleiche Verticalkraft; wenn aber das Gefäß $AF$, Fig. 841, eine Oeffnung $F$ hat, durch welche das Wasser ausfließen kann, so erleidet diese Kraft eine Veränderung, und zwar nicht allein, weil in $F$ ein Theil der Gefäßwand ausfällt, sondern auch deshalb, weil das der Mündung zufließende Wasser wie jeder andere Körper, der seinen Bewegungszustand ändert, vermöge seiner Trägheit reagirt. Die Bewegungsänderung eines Körpers kann sich sowohl auf eine Veränderung der Geschwindigkeit als auch auf eine Veränderung der Bewegungsrichtung erstrecken; und daher kann auch die Reaction (franz. réaction; engl. reaction) des ausfließenden Wassers sowohl aus einer Beschleunigung als auch aus einer stetigen Richtungsänderung des der Mündung zuströmenden Wassers entspringen.

Fig. 841.




Auf folgendem Wege gelangen wir sogleich zur Kenntniß der vollständigen Reaction des Wassers in einem Ausflußgefäße.

Es sei $c$ die Geschwindigkeit des durch die Mündung $F$ fließenden Wassers, $c_1$ die relative Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche bei $A$,

Digitized by Google

$G$ der Inhalt dieser Fläche und $h$ die Druckhöhe $AD$ in der Ausmündung. Dann haben wir:

$$\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g},$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = Fc = Gc_1.$$

Denken wir das Gefäß $AF$, Fig. 841, mit einer Geschwindigkeit $v$ horizontal fortgehend, so müssen wir für die absolute Geschwindigkeit $c_2$ des eintretenden Wassers:

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2,$$

und bei dem Neigungswinkel $EFc = \alpha$ der Strahlaxe gegen den Horizont, für die absolute Geschwindigkeit $w$ des austretenden Strahles:

$$w^2 = c^2 + v^2 - 2cv\ cos.\alpha$$

setzen.

Nun ist das Arbeitsvermögen des Wassers vor dem Ausflusse:

$$L_1 = \left(\frac{c_1^2}{2g} + h\right) Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das Arbeitsvermögen desselben nach dem Ausflusse:

$$L_2 = \frac{w^2}{2g}\, Q\gamma = \left(\frac{c^2 + v^2 - 2cv\ cos.\alpha}{2g}\right) Q\gamma,$$

daher folgt das dem Wasser entzogene und auf das Gefäß übergetragene Arbeitsquantum:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - c^2 + 2cv\ cos.\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $\frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = h$ ist:

$$L = \frac{cv\ cos.\alpha}{g}\, Q\gamma;$$

und hiernach der horizontale Component der Reaction des Wassers:

$$H = \frac{L}{v} = \frac{c\ cos.\alpha}{g}\, Q\gamma.$$

Da $Q = Fc$ ist, so haben wir auch:

$$H = \frac{c^2}{g}\, F\gamma\ cos.\alpha = 2 \cdot \frac{c^2}{2g}\, F\gamma\ cos.\alpha = 2hF\gamma\ cos.\alpha$$

und daher bei einem horizontal gerichteten Strahle, wie Fig. 842:

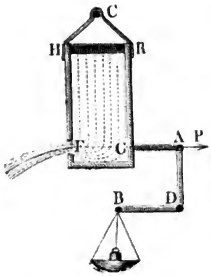
$$H = 2hF\gamma.$$

Es ist also die Reaction eines horizontalen Strahles gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Geschwindigkeitshöhe ($2h$) zur Länge hat.

Digitized by Google

Anmerkung. Ein Engländer, Peter Ewart, hat in der neueren Zeit die Richtigkeit dieses Gesetzes durch Versuche zu bestätigen gesucht (s. Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II., oder den „Ingenieur, Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen", Bd. I.). Hierbei wurde das Gefäß $HRF$, Fig. 842, an eine horizontale Axe $C$ aufgehangen, und die Reaction durch eine Winkelhebelwage $ADB$ gemessen, auf welche das Gefäß mittels eines horizontalen Stabes $AG$ wirkte, der sich genau der Mündung $F$ gegenüber, an das Gefäß anstemmte. Beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ergab sich:

Fig. 842.




$$P = 1{,}14 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma.$$

Setzt man den Strahlquerschnitt

$$F_1 = 0{,}64 \, . \, F$$

und die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = 0{,}96 \, v$$

(s. §. 405), so erhält man nach der theoretischen Formel:

$$P = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot F_1\gamma = 2 \, . \, 0{,}96^2 \, . \, 0{,}64 \, . \, \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}18 \, \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

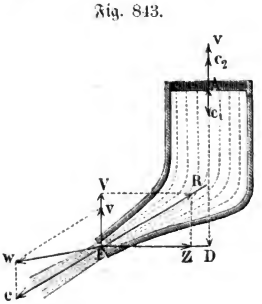
also ziemlich dasselbe, was die Versuche gegeben haben. Bei einer nach dem contrahirten Wasserstrahle geformten Mündung wurde $P = 1{,}73 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, der Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient aber $= 0{,}94$ gefunden. Da hier $F_1 = F$ und $v_1 = 0{,}94\, v$ ist, so hat man theoretisch:

$$P = 2 \, . \, 0{,}94^2 \, \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}77 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

also wieder eine gute Uebereinstimmung.

§. 496. Denkt man sich das Ausflußgefäß $AF$, Fig. 843, mit einer Geschwindigkeit $v$ vertical aufwärts bewegt, so hat man für die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers:

Fig. 843.




$$c_2 = v - c_1,$$

und dagegen für die des ausfließenden, bei der im vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnung:

$$w^2 = c^2 + v^2 + 2cv\cos.(90^0 + \alpha)$$
$$= c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha.$$

Es ist hiernach das ganze Leistungsvermögen der Wassermenge $Q$ pr. Secunde:

$$L_1 = \left(\frac{(v - c_1)^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das des abfließenden Wassers:

$$L_2 = (c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha)\, Q\gamma,$$

Digitized by Google

und folglich die mechanische Arbeit, welche das Wasser dem Gefäße mitgetheilt hat:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{2\,v\,c_1 + c_1^2 - c^2 + 2\,c\,v\,sin.\,\alpha}{2\,g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $h = \frac{c^2}{2\,g} - \frac{c_1^2}{2\,g}$ ist:

$$L = \frac{(c\,sin.\,\alpha - c_1)\,v}{g}\,Q\gamma,$$

und die entsprechende Verticalkraft:

$$V = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\,sin.\,\alpha - c_1}{g}\right) Q\gamma = \left(sin.\,\alpha - \frac{F}{G}\right)\frac{c}{g}\,Q\gamma$$
$$= \left(sin.\,\alpha - \frac{F}{G}\right)\frac{c^2}{g}\,F\gamma = \left(sin.\,\alpha - \frac{F}{G}\right).2\,h\,F\gamma.$$

Ist die Ausflußmündung klein gegen die Oberfläche $G$, so hat man $\frac{F}{G} = 0$, und daher den verticalen Componenten der Reaction:

$$V = 2\,h\,F\gamma\,sin.\,\alpha.$$

Nach dem vorigen Paragraphen hat man aber den horizontalen Componenten dieser Kraft:

$$H = 2\,h\,F\gamma\,cos.\,\alpha,$$

daher ist die vollständige Reaction des Wassers:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = 2\,h\,F\gamma,$$

und die Richtung derselben der Bewegung des ausfließenden Wassers genau entgegengesetzt.

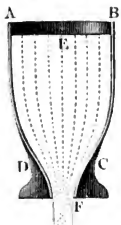
Ist $F = G$, fließt z. B. das Wasser durch eine überall gleichweite Röhre, so hat man $\frac{F}{G} = 1$ und daher:

$$V = (sin.\,\alpha - 1).2\,h\,F\gamma = -(1 - sin.\,\alpha).2\,h\,F\gamma;$$

dann wirkt also $V$ nicht nach oben, sondern nach unten, und es ist die vollständige Reaction:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{cos.\,\alpha^2 + (1 - sin.\,\alpha)^2}.2\,h\,F\gamma$$
$$= \sqrt{2\,(1 - sin.\,\alpha)}.2\,h\,F\gamma$$
$$= 4\,h\,F\gamma\,sin.\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 844.




Für $\alpha = -90^0$, d. i. wenn die Röhre einen Halbkreis bildet, ist $R = 4\,h\,F\gamma$.

Ist $\alpha = +90^0$, so hat man es also im Allgemeinen mit dem Ausflusse, wie Fig. 844, zu thun, und es ist $Z = 0$ und

$$V = \frac{(c - c_1)}{g}\,Q\gamma = \left(1 - \frac{F}{G}\right).2\,h\,F\gamma,$$

Digitized by Google

folglich für $\frac{F'}{G} = 0$:

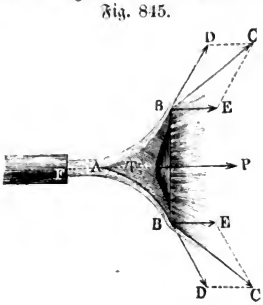
$$V = R = 2hF\gamma.$$

Um diese Kraft wird das ganze Gewicht des im Ausflußapparate befindlichen Wassers vermindert, wenn das letztere zum Ausfluß gelangt.

§. 497 **Stoss und Widerstand des Wassers.** Das Wasser oder eine andere Flüssigkeit übt gegen einen festen Körper einen Stoß aus, wenn sie mit diesem zusammentrifft, und dadurch in ihrem Bewegungszustande verändert wird. Von dem Stoße ist der Widerstand (franz. résistance; engl. resistence), welchen das Wasser der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, nicht wesentlich verschieden. Die Untersuchung beider Kräfte bildet den dritten Haupttheil der Hydraulik. Man unterscheidet zunächst von einander: 1) den Stoß isolirter Wasserstrahlen (franz. choc d'une veine de fluide; engl. impact of an isolated stream), 2) den Stoß im begrenzten Wasser oder Gerinne (franz. choc d'un fluide défini; engl. impact of a bounded stream), und 3) den Stoß im unbegrenzten Wasser (franz. choc d'un fluide indéfini; engl. impact of an unlimited stream). Ein Stoß der ersten Art findet statt, wenn sich dem aus einem Gefäße ausfließenden Wasserstrahl ein Körper, z. B. die Schaufel eines oberschlägigen Wasserrades, entgegenstellt; ein Stoß der zweiten Art tritt ein, wenn das Wasser in einem Canale oder Gerinne gegen einen, den Querschnitt des letzteren ganz ausfüllenden Körper, z. B. gegen die Schaufel eines unterschlägigen Wasserrades trifft; die dritte Art kommt endlich vor, wenn ein fließendes Wasser gegen einen in dasselbe eingetauchten Körper trifft, dessen Querschnitt nur ein sehr kleiner Theil ist vom Querschnitte des Wasserstromes, wie z. B. wenn es gegen die Schaufeln eines Schiffmühlenrades stößt.

Uebrigens ist zu unterscheiden, der Wasserstoß gegen ruhende und der gegen bewegte Körper, ferner der Stoß gegen krumme Flächen und der gegen ebene Flächen, und bei letzterem wieder, der senkrechte und der schiefe Stoß.

Fig. 845.




Wir betrachten gleich einen allgemeineren Fall, nämlich den Stoß eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche, welche sich in ihrer eigenen, mit der der Bewegungsrichtung des Strahles zusammenfallenden Axe bewegt.

§. 498 **Stoss isolirter Strahlen.** Es sei $BAB$, Fig. 845, eine Rota-

Digitized by Google

tionsfläche, $AP$ ihre Axe, und $FA$ ein in der Richtung dieser Axe antreffender Wasserstrahl; setzen wir die Geschwindigkeit des Wassers, $= c$, die der Fläche, $= v$ und den Winkel $BTP$, welchen die Tangente $DT$ am Ende $B$ der Erzeugungscurve oder jeder die Fläche verlassende Wasserfaden $BD$ mit der Axenrichtung $BE$ einschließt, $= \alpha$, nehmen wir endlich noch an, daß das Wasser beim Hinlaufen an der Fläche durch Reibung an lebendiger Kraft nichts verliere. Das Wasser trifft die Fläche mit der relativen Geschwindigkeit $c - v$ und geht daher auch mit dieser an der Fläche hin, entfernt sich also auch mit derselben in den Tangentialrichtungen $TB$, $TB$ u. s. w. von der Fläche. Aus der Tangentialgeschwindigkeit $BD = c - v$ und der Axengeschwindigkeit $BE = v$ ergiebt sich aber die absolute Geschwindigkeit $BC = c_1$ des Wassers nach dem Zusammenstoße mit der Fläche durch die bekannte Formel:

$$c_1 = \sqrt{(c - v)^2 + 2\,(c - v)\,v\,\cos.\alpha + v^2}.$$

Nun kann aber ein Wasserquantum $Q$ durch seine lebendige Kraft die mechanische Arbeit $\frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma$ verrichten, wenn es hierbei seine Geschwindigkeit $c$ vollkommen zusetzt; es ist demnach auch das im Wasser zurückbleibende Arbeitsvermögen $= \frac{c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$, folglich die auf die Fläche übergetragene Arbeit:

$$\begin{aligned} Pv &= \frac{c^2}{2g}\,Q\gamma - \frac{c_1^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{c^2 - c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma \\ &= \frac{[c^2 - (c - v)^2 - 2\,(c - v)\,v\,\cos.\alpha - v^2]}{2g}\,Q\gamma \\ &= \frac{2cv - 2v^2 - 2\,(c - v)\,v\,\cos.\alpha}{2g}\,Q\gamma, \text{ d. i.:} \end{aligned}$$

$$Pv = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma,$$

und die Kraft oder der Wasserstoß in der Axenrichtung:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma.$$

Geht die Fläche dem Wasser mit der Geschwindigkeit $v$ entgegen, so hat man:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c + v)}{g}\,Q\gamma,$$

und ist dieselbe ohne Bewegung, also $v = 0$, so stellt sich der Stoß oder hydraulische Axendruck

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{c}{g} \cdot Q\gamma$$

heraus.

Digitized by Google

Es folgt hieraus, daß der Stoß einer und derselben Wassermasse unter übrigens gleichen Umständen der relativen Geschwindigkeit $c \mp v$ des Wassers proportional ist.

Aus dem Inhalte $F$ des Querschnittes vom Wasserstrahle folgt das zum Stoße gelangende Wasserquantum $Q = F(c \mp v)$; daher:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c \mp v)^2}{g}\,F\gamma;$$

und für $v = 0$:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{v^2}{g}\,F\gamma.$$

Bei gleichem Querschnitte des Strahles wächst also hiernach der Stoß gegen eine ruhende Fläche wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers.

§. 499 **Stoss gegen ebene Flächen.** Der Stoß eines und desselben Wasserstrahles hängt vorzüglich auch noch von dem Winkel $\alpha$ ab, unter welchem das Wasser nach dem Stoße sich von der Axe entfernt; er ist Null, wenn dieser Winkel = Null ist, und dagegen ein Maximum, nämlich

$$= 2\,\frac{(c \mp v)}{g}\,Q\gamma,$$

wenn dieser Winkel $180^0$, also dessen Cosinus $= -1$ ausfällt, wo das Wasser, wie Fig. 846 repräsentirt, in der entgegengesetzten Richtung die Fläche verläßt, in welcher es dieselbe trifft. Ueberhaupt ist derselbe bei concaven Flächen größer als bei convexen, weil dort der Winkel stumpf, also der Cosinus negativ ausfällt und $1 - \cos.\alpha$ in $1 + \cos.\alpha$ übergeht.

Fig. 846.

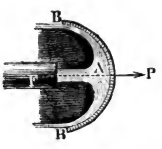



Fig. 847.

Am häufigsten ist die Fläche, wie Fig. 847 vorstellt, eben, und daher $\alpha = 90^0$, also $\cos.\alpha = 0$ und der Stoß

$$P = \frac{(c \mp v)}{g} \cdot Q\gamma;$$

bei einer ruhenden Fläche:

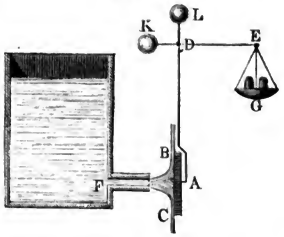
$$P = \frac{c}{g}\,Q\gamma = \frac{c^2}{2g}\,F\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g}\,F\gamma = 2\,Fh\gamma.$$

Der Normalstoß des Wassers gegen eine ebene Fläche ist also gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis den Querschnitt $F$ des Strahles und zur Höhe die zweifache Geschwindigkeitshöhe $\left(2\,h = 2 \cdot \frac{c^2}{2g}\right)$ hat.

Digitized by Google

Die hierüber angestellten Versuche von Michelotti, Vince, Langsdorf, Bossut, Morosi und Bidone haben ziemlich zu dem nämlichen Ergebnisse geführt, wenn der Querschnitt der gestoßenen Fläche mindestens 6mal so groß war, als der des Strahles, und wenn diese Fläche wenigstens zweimal so weit von der Ebene der Ausflußmündung abstand, als die Strahldicke maß. Der Apparat, welcher hierbei in Anwendung gekommen ist, bestand in einem Hebel,

Fig. 848.




ähnlich wie Poletti's Rheometer (§. 494), welcher auf der einen Seite den Wasserstoß aufnahm, dem durch Gewichte auf der anderen Seite das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Instrument, welches Bidone angewendet hat, ist in Fig. 848 abgebildet. $BC$ ist die vom Strahle $FA$ gestoßene Fläche, $G$ die Wagschale zur Aufnahme von Gewichten, ferner $D$ die Drehungsaxe und $K$ und $L$ sind Gegengewichte.

Anmerkung. Die ausführlichsten Versuche über den Wasserstoß sind von Bidone. S. Memoire de la Reale Accademia delle Scienze di Torino. T. XL. 1838. So wurden bei einer Geschwindigkeit von mindestens 27 Fuß und an Messingplatten von 2 bis 9 Zoll Durchmesser angestellt. Im Allgemeinen fand Bidone den Normalstoß gegen eine ebene Fläche etwas größer als $2\,Fh\gamma$, doch ist diese Abweichung wohl einer Vergrößerung des Hebelarmes beizumessen, welche durch das zurückfallende Wasser erzeugt wurde. S. Duchemin: Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides (ins Deutsche übersetzt von Schnuse). Wenn die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe war, so fiel bei Bidone $P$ nur 1,5 $Fh\gamma$ aus. Wenn ferner die Fläche mit dem Strahle gleichen Querschnitt hat, in welchem Falle das Wasser nur um einen spitzen Winkel $\alpha$ abgelenkt wird, so ist nach du Buat und Langsdorf, $P$ nur $= Fh\gamma$. Endlich hat sich auch bei Bidone und Anderen ergeben, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß ist, als der permanente Stoß. Vergleichende Versuche über den Stoß und die Reaction des Wassers mit Hülfe eines Reactionsrades sind von dem Verfasser angestellt worden, siehe dessen „Experimentalhydraulik", sowie den „Civilingenieur" Bd. I. 1854.

Durch neuere Versuche über den Stoß isolirter Luft- und Wasserstrahlen (siehe „Civilingenieur", Bd. VII. Heft 5, und Bd. VIII. Heft 1) hat der Verfasser gefunden, daß der effective Stoß eines isolirten Luft- oder Wasserstrahles gegen eine normale Ebene, 92 bis 96 Procent der theoretischen Kraft $P = \frac{c\,Q\gamma}{g}$ ist, daß dagegen der Stoß eines solchen Strahles gegen eine hohle Rotationsfläche, welche die Richtung des anschlagenden Strahles um $\delta = 134$ Grad abändert, nur 83 bis 88 Procent der theoretischen Kraft $P = c\,(1 - cos.\,\delta)\,\frac{Q\gamma}{g}$ ausfällt.

Digitized by Google

§. 500 **Maximalarbeit des Stosses.** Die mechanische Arbeit

$$Pv = (1 - \sin.\alpha)\,\frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma$$

des Stoßes hängt vorzüglich auch von der Geschwindigkeit $v$ der gestoßenen Fläche ab; sie ist z. B. Null, nicht nur für $v = c$, sondern auch für $v = 0$; es muß daher auch eine Geschwindigkeit geben, bei welcher die Arbeit des Stoßes ein Maximum ist. Offenbar kommt es hierbei nur darauf an, daß $(c - v)\,v$ zu einem solchen wird. Sehen wir $c$ als den halben Umfang eines Rechteckes und $v$ als die Grundlinie desselben an, so haben wir für dessen Höhe $= c - v$ und für dessen Inhalt $= (c - v)\,v$; nun hat aber unter allen Rechtecken das Quadrat bei gegebenem Umfange $2c$ den größten Inhalt, es ist daher auch $(c - v)\,v$ ein Maximum, wenn $c - v = v$, d. i. $v = \frac{c}{2}$ gemacht wird, und wir erhalten so den Maximalwerth der Arbeit des Wasserstoßes, wenn die Fläche mit der halben Geschwindigkeit des Wassers ausweicht, und zwar:

$$Pv = (1 - \cos.\alpha).\,{}^1/_2 \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma = (1 - \cos.\alpha).\,{}^1/_2\,Qh\gamma.$$

Ist nun $\alpha = 180^0$, wird also die Bewegung des Wassers durch den Anstoß die entgegengesetzte, so hat man allerdings die Arbeit

$$= 2\,.\,{}^1/_2\,Qh\gamma = Qh\gamma;$$

ist aber $\alpha = 90^0$, wie beim Stoße gegen eine ebene Fläche, so stellt sich diese Arbeit nur ${}^1/_2\,Qh\gamma$ heraus, es wird also im letzteren Falle von der ganzen disponiblen oder der lebendigen Kraft des Wassers entsprechenden Arbeit nur die Hälfte gewonnen oder auf die Fläche übergetragen.

Beispiele. 1) Wenn ein Wasserstrahl von 40 Quadratzoll Querschnitt eine Wassermenge von 5 Cubikfuß pr. Secunde liefert, und gegen eine ebene Fläche normal stößt, welche mit 12 Fuß Geschwindigkeit ausweicht, so ist die Stoßkraft:

$$P = \frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma = \left(\frac{5\,.\,144}{40} - 12\right).\,0{,}032\,.\,5\,.\,66 = 6\,.\,0{,}032\,.\,330$$

$= 63{,}36$ Pfund,

und die auf die Fläche übergetragene mechanische Arbeit:

$$Pv = 63{,}36\,.\,12 = 760{,}32 \text{ Fußpfund.}$$

Die größte Leistung ist für

$$v = \frac{c}{2} = {}^1/_2 \cdot \frac{5\,.\,144}{40} = 9 \text{ Fuß}$$

zu erwarten und zwar:

$$L = {}^1/_2 \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma = {}^1/_2\,.\,18^2\,.\,0{,}016\,.\,5\,.\,66 = 81\,.\,0{,}16\,.\,66 = 855{,}36 \text{ Fußpfd.};$$

der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck beträgt:

$$P = \frac{855{,}36}{9} = 95{,}04 \text{ Pfund.}$$

Digitized by Google

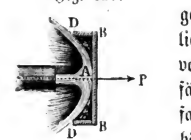
2) Wenn ein Strahl $FA$, Fig. 849, von 64 Quadratzoll Querschnitt und 40 Fuß Geschwindigkeit gegen einen unbeweglichen Kegel von dem Convergenzwinkel $BAB = 100^0$ stößt, so ist der hydraulische Druck in der Richtung des Strahles:

Fig. 849.

$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{c}{g}\,Q\gamma$$
$$= (1 - cos.\,50^0) \,.\, 40 \,.\, 0{,}032 \cdot \frac{64}{144} \cdot 40 \,.\, 61{,}74$$
$$= (1 - 0{,}64279) \,.\, 1{,}28 \cdot \frac{3292{,}8}{3}$$
$$= 0{,}35721 \,.\, 1405 = 501{,}9 \text{ Pfund.}$$

**Stoss des begrenzten und unbegrenzten Wassers.** Besetzt man den Umfang einer ebenen Fläche $BB$, Fig. 850, mit Leisten $BD$, $BD$ (franz. rebords; engl. borders), welche über der vom Wasser getroffenen Seite hervorragen, so wird das Wasser, ähnlich wie bei concaven Flächen, um einen stumpfen Winkel von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, und es fällt daher der Stoß größer aus, als bei der einfachen ebenen Fläche. Die Wirkung dieses Stoßes hängt vorzüglich von der Höhe der Einfassung und von dem Querschnittsverhältnisse zwischen dem Strahle und dem eingefaßten Theile ab. Bei einem Versuche, wo der Strahl 1 Zoll Dicke, die cylindrische Einfassung aber 3 Zoll Weite und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte, floß daß Wasser beinahe in umgekehrter Richtung, und es betrug der Stoß: §. 501

Fig. 850.

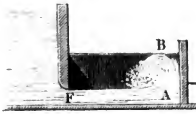



$$3{,}93\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma;$$

in jedem anderen Falle war diese Kraft eine kleinere. Wegen der Reibung des Wassers an der Fläche und Einfassung ist der theoretische Maximalwerth $4\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma$ nie ganz zu erreichen.

Auch bei dem Stoße des begrenzten Wassers $FAB$, Fig. 851, findet zwar auch eine Einfassung statt, es nimmt aber diese Einfassung nur einen Theil des Umfanges ein, und erstreckt sich dagegen auf die gestoßene Fläche und den Wasserstrahl zugleich. Das stoßende Wasser nimmt die Richtung nach dem meingefaßten Theil des Umfanges hinein, wird also auch hier um den Rechtwinkel abgelenkt, weshalb hier auch die oben gefundene Formel für den isolirten Strahl

Fig. 851.




$$P = \frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma = \left(\frac{c - v}{g}\right)cF\gamma.$$



Digitized by Google

ihre Giltigkeit hat. Weicht die Fläche $BB$, Fig. 847, gegen welche der Wasserstrahl normal anstößt, mit der Geschwindigkeit $c$ in einer Richtung aus, welche um den Winkel $\delta$ von der ursprünglichen Richtung des Strahles abweicht, so ist die Geschwindigkeit der Fläche in der Richtung des Stoßes,

$$v_1 = v \cos. \delta,$$

daher die Stoßkraft

$$P = \frac{(c - v \cos. \delta)}{g} Q\gamma,$$

und die Leistung derselben pro Secunde:

$$L = P v_1 = \frac{(c - v \cos. \delta)\, v \cos. \delta}{g} Q\gamma.$$

Diese Formel findet vorzüglich ihre Anwendung beim Stoße eines unbegrenzten Stromes statt, wo

$$Q = F(c - v \cos. \delta)$$

zu setzen ist, so daß

$$P = \frac{(c - v \cos. \delta)^2}{g} F\gamma \text{ ausfällt.}$$

§. 502 **Schiefer Stoss.** Bei dem schiefen Stoße gegen ebene Flächen müssen wir unterscheiden, ob das Wasser nur nach einer oder nach zwei oder nach allen Richtungen in der Ebene abfließt. Ist wie beim Stoße des begrenzten Wassers die Fläche $AB$, Fig. 852, von drei Seiten eingefaßt, so daß es nur nach einer Richtung abströmen kann, so hat man den hydraulischen Druck des Wassers gegen die Fläche in der Richtung des Strahles:

$$P = (1 - cos. \alpha) \frac{(c - v)}{g} Q\gamma.$$

Fig. 852.

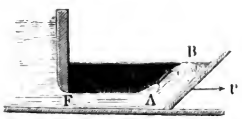
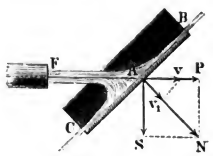



Fig. 853.




Ist aber die gestoßene Ebene $BC$, Fig. 853, nur auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, so theilt sich der Strahl in zwei ungleiche Theile, der größere Theil $Q_1$ nimmt die kleinere Ablenkung $\alpha$ und der kleinere Theil $Q_2$ die größere Ablenkung $= 180 - \alpha$ an, es ist daher der Gesammtstoß in der Richtung des Strahles:

$$P = (1 - cos. \alpha) \cdot \frac{c - v}{g} Q_1\gamma + (1 + cos. \alpha) \cdot \frac{c - v}{g} Q_2\gamma$$

Digitized by Google

$$= \left(\frac{c-v}{g}\right)[(1-\cos.\alpha)\,Q_1 + (1+\cos.\alpha)\,Q_2]\,\gamma.$$

Nun fordert aber das Gleichgewicht der beiden Strahltheile, daß die Drücke

$$\frac{(c-v)}{g}(1-\cos.\alpha)\,Q_1\,\gamma \text{ und } \frac{(c-v)}{g}(1+\cos.\alpha)\,Q_2\,\gamma$$

zwischen denselben einander gleich seien, es ist daher auch:

$$(1-\cos.\alpha)\,Q_1 = (1+\cos.\alpha)\,Q_2,$$

oder da $Q_1 + Q_2 = Q$,

$$(1-\cos.\alpha)\,Q_1 = (1+\cos.\alpha)\,(Q-Q_1), \text{ d. i.:}$$

$$Q_1 = \left(\frac{1+\cos.\alpha}{2}\right)Q \text{ und } Q_2 = \left(\frac{1-\cos.\alpha}{2}\right)Q$$

zu setzen, so daß endlich der gesammte Stoß in der Richtung des Strahles:

$$P = \frac{(c-v)}{g}\,.\,2\,(1-\cos.\alpha)\,\frac{(1+\cos.\alpha)\,Q}{2}\gamma$$

$$= \frac{(c-v)}{g}(1-\cos.\alpha^2)\,Q\,\gamma, \text{ d. i.:}$$

$$P = \frac{c-v}{g}\,\sin.\alpha^2\,.\,Q\,\gamma \text{ ausfällt.}$$

Dividirt man die Stoßleistung

$$L = P\,v = \frac{(c-v)}{g}\,v\sin.\alpha^2\,.\,Q\,\gamma$$

durch die Geschwindigkeit $\overline{A\,c_1} = c_1 = v\sin.\alpha$, mit welcher die Fläche in normaler Richtung ausweicht, so erhält man den Normalstoß:

$$N = \frac{(c-v)\,v\sin.\alpha^2}{g\,v\sin.\alpha}\cdot Q\,\gamma = \frac{(c-v)}{g}\,\sin.\alpha\,.\,Q\,\gamma,$$

und dieser besteht außer dem bekannten Parallelstoße

$$P = N\sin.\alpha = \frac{(c-v)}{g}\,\sin.\alpha^2\,.\,Q\,\gamma$$

noch aus einem Seitenstoße

$$S = N\cos.\alpha = \frac{(c-v)}{g}\sin.\alpha\cos.\alpha\,.\,Q\gamma = \frac{(c-v)}{2\,g}\,.\,\sin.2\,\alpha\,.\,Q\,\gamma.$$

Es wächst also der Normalstoß wie der Sinus, der Parallelstoß wie das Quadrat des Sinus des Einfallswinkels und der Seitenstoß wie der Sinus vom Doppelten dieses Winkels.

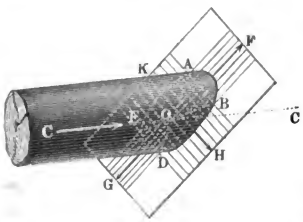
Hat endlich die schiefgestoßene Fläche gar keine Einfassung, so daß sich das Wasser nach allen Richtungen auf ihr ausbreiten kann, so fällt der Stoß noch größer aus, weil unter allen Winkeln, um welche die Wasserfäden abgelenkt werden, gerade $\alpha$ der kleinste ist, und daher jeder Faden, welcher sich nicht in der Normalebene bewegt, einen größeren Druck ausübt, als der Faden in der Normalebene. Nehmen wir an, daß ein den Sectoren $A\,O\,B$



Digitized by Google

und $DOE$, Fig. 854, entsprechender Theil $Q_1$ um die Winkel $COF = \alpha$ und $COG = 180 - \alpha$, und ein anderer, den Sectoren $AOE$ und $BOD$ entsprechender Theil $Q_2$ um $COK = COH = 90^0$ abgelenkt werde, und daß beide Theile einen gleichen Parallelstoß ausüben, so können wir setzen:

Fig. 854.




$$P = \frac{c - v}{g} Q_1 \gamma \sin.\alpha^2 + \frac{c - v}{g} Q_2 \gamma,$$

ferner $Q_1 \sin.\alpha^2 = Q_2$ und $Q_1 + Q_2 = Q$; es folgt daher:

$$Q_1 (1 + \sin.\alpha^2) = Q,$$

und der gesammte Parallelstoß:

$$P = \left(\frac{c - v}{g}\right) \frac{2 Q \gamma \sin.\alpha^2}{1 + \sin.\alpha^2} = \frac{2 \sin.\alpha^2}{1 + \sin.\alpha^2} \cdot \frac{c - v}{g} \cdot Q\gamma.$$

Wiewohl diese Voraussetzung nur eine annähernd richtige ist, so stimmt diese Formel doch ziemlich mit den neuesten Versuchen von Bidone überein.

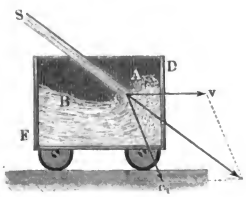
Anmerkung. Herr Prof. Broch findet in seiner Mechanik, Seite 614, für den schiefen Wasserstoß gegen eine Kreisfläche

$$P = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) tang.\alpha \left(\frac{c - v}{g}\right) Q\gamma, \text{ und}$$

$$N = tang.\alpha \, Ln.cotg.\frac{\alpha}{2} \left(\frac{c - v}{g}\right) Q\gamma.$$

§. 503 **Stoss des Wassers ins Wasser.** Wenn das Wasserquantum $Q$ mit einer gewissen Geschwindigkeit $\overline{Ac} = c$ in ein mit der Geschwindigkeit $\overline{Av} = v$ fortbewegtes Gefäß $DE$, Fig. 855, strömt, so wird von dem Arbeitsvermögen $L_0 = \frac{Qc^2}{2g}\gamma$ desselben

Fig. 855.




ein Theil $L_1 = \frac{Qc_1^2}{2g}\gamma$ auf die Bildung und Erhaltung des Wasserwirbels $AB$ verwendet, welcher aus dem Verluste der Geschwindigkeit $c_1$ hervorgeht. Bezeichnet $\alpha$ den Winkel $vAc$, um welchen die Richtung des Wasserstrahles von der Bewegungsrichtung des Gefäßes abweicht, so ist

$$c_1^2 = c^2 + v^2 - 2cv \cos.\alpha,$$

Digitized by Google

und daher die durch den Wasserwirbel verloren gehende mechanische Arbeit

$$L_1 = \frac{Q(c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha)}{2g}.$$

Nun behält aber das Wasserquantum $Q$ noch das Arbeitsvermögen $L_2 = \frac{Qv^2}{2g}\gamma$ in sich, da es die Geschwindigkeit $v$ des Gefäßes behält, daher folgt die **mechanische Arbeit**, welche auf das Gefäß übergeht, und auf die Fortbewegung desselben verwendet wird:

$$L = L_0 - L_1 - L_2$$
$$= \left(\frac{c^2 - (c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha) - v^2}{2g}\right) Q\gamma = \frac{2cv\cos.\alpha - 2v^2}{2g} Q\gamma$$
$$= \frac{(c\cos.\alpha - v)v}{g} Q\gamma,$$

und die **Kraft**, mit welcher das Gefäß in seiner Bewegungsrichtung durch das einströmende Wasser fortgetrieben wird:

$$P = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\cos.\alpha - v}{g}\right) Q\gamma.$$

Noch ist das stoßende Wasserquantum pr. Secunde, $Q = Fc$, wenn $F$ den Querschnitt des Strahles bei seinem Eintritt bezeichnet, daher hat man auch

$$P = \frac{(c\cos.\alpha - v)c}{g} F\gamma,$$

und für den Fall, daß das Gefäß still steht, also $v = 0$ ist,

$$P = \frac{c^2\cos.\alpha}{g} F\gamma = 2\frac{c^2}{2g} F\gamma\cos.\alpha = 2Fh\gamma\cos.\alpha,$$

wobei $h$ die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ bezeichnet.

Die mechanische Arbeit ist ein Maximum für $v = {}^1/_2 c\cos.\alpha$, und zwar

$$L_m = {}^1/_2 \frac{c^2(\cos.\alpha)^2}{2g} Q\gamma = {}^1/_2 Qh\gamma(\cos.\alpha)^2.$$

Führt man den Strahl in der Bewegungsrichtung des Gefäßes ein, macht man also $\alpha = 0$, so erhält man:

$$L = \frac{(c - v)v}{g} Q\gamma \text{ und}$$
$$L_m = {}^1/_2 Qh\gamma.$$

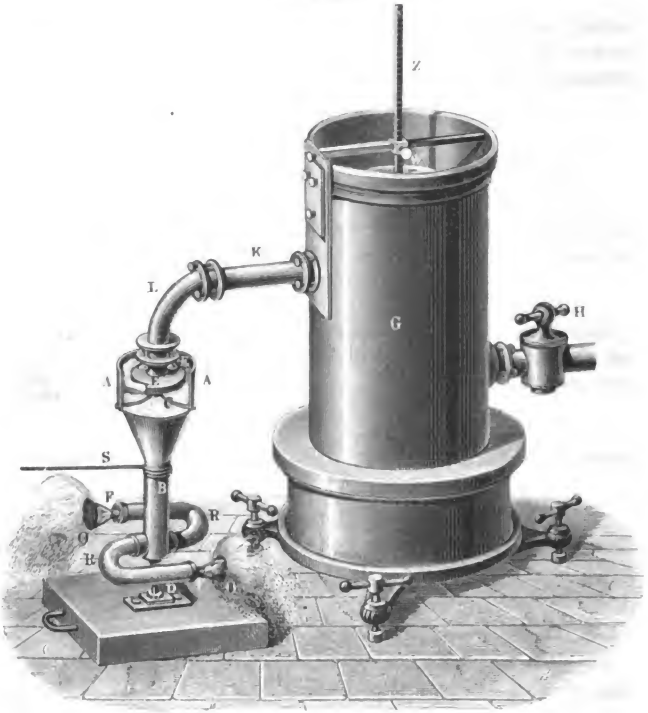
Es wird daher in diesem Falle nur die Hälfte des ganzen mechanischen Arbeitsvermögens $Qh\gamma$ des Wassers gewonnen (vergl. §. 500).

**Reactionsrad zu Versuchen.** Zur Prüfung der vorstehenden Theorie §. 504
des Stoßes und der Reaction des Wassers bedient man sich am besten eines kleinen **Reactionsrades** $AAB$, Fig. 856 (a. f. S.), mit verticaler Um-

Digitized by Google

drehungsaxe $CD$ (ſ. des Verfaſſers Experimental-Hydraulik §. 48 u. f. w.). Das Waſſer, welches zum Umtriebe dieſes Rades dient, wird oben durch zwei Seitencanäle $E$, $E$ nahe tangential in den Behälter $A\,A$ des Rades eingeführt, und

Fig. 856.




ſtrömt unten, durch zwei Seitenmündungen $F$, $F$ in den Enden der Schwungröhren $R$, $R$ aus. Zur Erzielung eines conſtanten Waſſerzufluſſes und einer conſtanten Umtriebskraft dient der Hahn $H$ in der Röhre, welche das Betriebswaſſer zunächſt dem Behälter $G$ zuführt, aus dem es wieder durch eine Röhre $K\,L$ in die Kammer $E\,E$ mit den Eintrittscanälen $E$, $E$ geleitet wird. Während des Ganges der Maſchine iſt der Hahn $H$ ſo zu ſtellen, daß die Oberfläche $W$ des Waſſers im Reſervoir $G$ immer von der Spitze des Zeigers $Z$ berührt wird.

Digitized by Google

Um die Reaction des ausfließenden Wassers zu finden, befestigt man noch an der Mittelröhre $B$ des Rades eine dünne Schnur $S$, welche das vom Rade zu hebende Gewicht trägt und mittels einer Leitrolle nach dem Rade geführt wird. Das Aufschlagwasserquantum wird in dem Reservoir, aus welchem das Wasser in die Röhre mit dem Hahne fließt, dadurch gemessen, daß man den Inhalt $A$ und die Tiefe $a$ der Senkung des Wasserspiegels während der Versuchszeit ausmittelt. Ist dann die Ausfluß- oder Beobachtungszeit $= t$, so hat man das Aufschlagwasserquantum pr. Secunde,

$$Q = \frac{Aa}{t},$$

und ist das Gefälle, d. i. die senkrechte Tiefe der Ausmündungen des Rades unter dem Wasserspiegel im Reservoir $G$, $= h$, so läßt sich das ganze Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers pr. Secunde

$$L = Qh\gamma = \frac{Aah\gamma}{t} \text{ setzen.}$$

Wird nun in der Zeit $t$ von der Maschine das Gewicht $G$ auf die senkrechte Höhe $s$ gehoben, so ist dagegen die wirklich verrichtete mechanische Arbeit des Reactionsrades:

$$L_1 = \frac{Gs}{t},$$

und es lassen sich nun beide Arbeitswerthe, von welchen der letztere stets der kleinere ist, mit einander vergleichen.

**Theorie des Reactionsrades.** Das ganze Gefälle $h$ eines solchen Wasserrades besteht aus der Höhe $h_1$ vom Wasserspiegel bis an die Eintrittsstelle $E$ gemessen, und aus der Höhe $h_2$, von dem letzteren Punkte aus bis zu den Ausflußöffnungen des Rades gerechnet. Aus $h_1$ bestimmt sich die Eintrittsgeschwindigkeit $c_1$ des Wassers durch die Formel $c_1 = \sqrt{2gh_1}$, und aus $h_2$ läßt sich die relative Ausflußgeschwindigkeit des Wassers beim Austritt aus dem Rade nach §. 304 mittels der Formel §. 505

$$c = \sqrt{2gh_2 + v^2 - v_1^2}$$

berechnen, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeiten $v_1$ und $v$ des Rades an der Ein- und an der Austrittsstelle bekannt sind. Da die als Umdrehungskraft dienende Reaction des Wassers der Ausflußgeschwindigkeit entgegengesetzt wirkt, so ist die absolute Geschwindigkeit des Wassers, beim Austritt aus dem Rade:

$$w = c - v,$$

und deren Quadrat:

$$w^2 = c^2 - 2cv + v^2 = 2gh_2 - 2cv + 2v^2 - v_1^2,$$

Digitized by Google

und folglich das mechanische Arbeitsvermögen des fortfließenden Wassers:

$$L_2 = Q\gamma \cdot \frac{w^2}{2g} = Q\gamma \left( h_2 - \frac{(c-v)\,c}{g} - \frac{v_1^2}{2g} \right).$$

Das mit der relativen Geschwindigkeit $w_1 = c_1 - v_1$ in das Rad einströmende Wasser verliert außerdem durch den Stoß (nach §. 436) das Arbeitsvermögen

$$L_1 = Q\gamma \frac{(c_1 - v_1)^2}{2g} = Q\gamma \left( h_1 - \frac{c_1 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g} \right),$$

folglich geht von dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers auf das Rad

$$Qh\gamma = Q(h_1 + h_2)\gamma,$$

nur die mechanische Arbeit:

$$L = Q\gamma(h - h_1 - h_2) = Q\gamma \left( \frac{(c-v)\,c}{g} + \frac{c_1 v_1}{g} \right) \text{über.}$$

Um eine möglichst große Arbeit des Rades zu erlangen, muß $w =$ Null, also $v = c$, und ebenso $w_1 =$ Null, also $v_1 = c_1$ sein, wonach dann

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_2, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_2}, \text{ sowie}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_1, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_1} \text{ folgt.}$$

Es ist also in diesem Falle $h_1 = h_2 = {}^1/_2\, h$, und die entsprechende Maximalleistung der Maschine:

$$L_m = Q\gamma \cdot \frac{c_1 v_1}{g} = Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{g} = 2\,Qh_1\gamma = Qh\gamma,$$

d. i. gleich dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers.

Bezeichnet $r_1$ den Abstand des Eintrittspunktes und $r$ den mittleren Abstand der Ausflußöffnungen des Rades von der Axe desselben, so hat man

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r}, \text{ daher } c_1 = \frac{r_1}{r}\, c$$

und die Radleistung überhaupt

$$L = Q\gamma \left( c - v + \frac{r_1}{r} c_1 \right) \frac{v}{g};$$

so daß nun die Umdrehungskraft, im Abstande $r$ gemessen:

$$P = \frac{L}{v} = \frac{Q\gamma}{g} \left( c - v + \frac{r_1}{r} c_1 \right) \text{ folgt.}$$

Wenn die Last oder das angehangene Gewicht $G$ am Hebelarme $a$ wirkt, welcher z. B. im abgebildeten Apparate, sehr nahe dem Halbmesser der Mittelröhre $B$ gleich ist, so hat man $Ga = Pr$, und daher das anzuhängende und während der Umdrehung des Rades emporzuhebende Gewicht:

$$G = \frac{r}{a} P = \frac{Q\gamma}{ga} [(c-v)\,r + c_1 r_1],$$

also für $c = v$ und $c_1 = v_1$,

Digitized by Google

$$G = \frac{Q\gamma}{ga} c_1 r_1 = \frac{Q\gamma}{ga} v_1 r_1.$$

Bezeichnet $F$ den Inhalt der Ausflußmündungen, sowie $F_1$ den der Eintrittsöffnungen des Rades zusammengenommen, so ist

$$Q = Fc = F_1 c_1, \text{ und daher}$$

$$F_1 = \frac{Q}{c_1} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_1}}, \text{ sowie}$$

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_2 + v^2 - v_1^2}} = F_1 \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_2 + v^2 - v_1^2}}.$$

Für $v = c$, und $v_1 = c_1$, wo $h_1 = h_2 = {}^1/_2\, h$ ist, hat man $Q = Fv$, daher:

$$P = \frac{Qh\gamma}{v} = Fh\gamma,$$

dagegen für $v = 0$, ist $Q = F\sqrt{2gh_2}$, daher

$$P = \frac{Fc\gamma}{g}\left(c + \frac{r_1}{r} c_1\right).$$

Führt man noch das Wasser sehr langsam ins Rad ein, so läßt sich $c_1 = 0$, sowie $h_1 = 0$ setzen, und es folgt im letzteren Falle die Reactionskraft:

$$P = \frac{Fc\gamma}{g} = \frac{2Fc^2\gamma}{2g} = 2Fh_2\gamma = 2Fh\gamma,$$

wie schon oben gefunden worden ist.

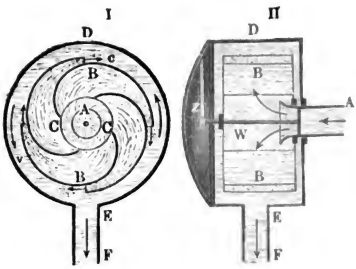
Da wir bei den vorstehenden Entwickelungen von den Nebenhindernissen abgesehen haben, so geben die Versuche an der abgebildeten Maschine nicht genau die gefundenen, sondern um einige Procent kleinere Kraftwerthe. Uebrigens stehen die Ergebnisse der Versuche an einem solchen Rade bei sorgfältiger Ausführung im besten Einklang mit der im Vorstehenden entwickelten Theorie.

Um diese Maschine zur Prüfung der Theorie des Wasserstoßes zu verwenden, befestigt man Stoßplatten, $O$, $O$, kleine Gefäße u. s. w. so an den Schwungröhren des Rades, daß dieselben den Stoß des ausfließenden Wassers aufnehmen können. Es ist dann die Umdrehungskraft gleich der Differenz zwischen der Reaction des Wassers im Rade und der Stoßkraft desselben außerhalb des Rades. Ganz der Theorie entsprechend bleibt dann das Rad stehen, wenn das ausströmende Wasser winkelrecht gegen ebene Stoßplatten oder in mit Wasser angefüllte Gefäße strömt; es behält dagegen noch eine Umdrehungsbewegung in der Richtung der Reaction, wenn es schief gegen ebene Stoßplatten oder gerade gegen convexe Stoßplatten stößt, und es dreht sich dagegen in der Richtung des ausfließenden Wassers um, wenn dasselbe von concaven Stoßplatten aufgefangen wird.

Digitized by Google

§. 506 **Wassermesser.** In neuerer Zeit bedient man ſich auch zum Meſſen des fließenden Waſſers der Waſſermeſſer (franz. compteurs hydrauliques; engl. water-meters), welche durch die Reactionskraft des ausfließenden Waſſers in Bewegung geſetzt werden, und im Weſentlichen die Einrichtung eines Reactionsrades oder einer Turbine haben. Eine ideelle Darſtellung eines ſolchen Waſſermeſſers führt Fig. 857 im Durchſchnitt vor Augen. Das zu meſſende Waſſer fließt durch eine Röhre $A$ in das Innere des Rades $BB$, und gelangt durch 4 Canäle $CB$, $CB$ ... am äußern Umfang deſſelben zum Ausfluß in das Gehäuſe $DE$, aus welchem es mittels einer Röhre $EF$ weiter geführt wird. Die Welle $W$ dieſes Rades trägt einen Zeiger $Z$, oder vielmehr einen ganzen Zeigermechanismus, welcher die Umdrehungszahl des Rades und dadurch auch das derſelben proportionale Quantum des durchgefloſſenen Waſſers zu jeder Zeit angiebt. Bezeichnet $h$ den durch die Höhe einer Waſſerſäule gemeſſenen Druckverluſt beim Durchgang durch das Rad, ferner $Q$ das durchfließende Waſſerquantum pr. Secunde, $c$ die Ausfluß- und $v$ die in umgekehrter Richtung erfolgende Radgeſchwindigkeit am Umfange, ſo hat man $c^2 - v^2 = 2gh$ und die Leiſtung des Rades:

Fig. 857.




$$L = \frac{(c - v)\,v}{g} Q\gamma \text{ (ſ. § 505).}$$

Iſt $R$ der Widerſtand des Rades, in Folge ſeiner Axenreibung u. ſ. w., ſo kann man $L = Rv$ ſetzen, und erhält die Formel

$$R = \left(\frac{c - v}{g}\right) Q\gamma,$$

oder, wenn noch $F$ die Summe der Inhalte ſämmtlicher Ausmündungen bezeichnet, ſo daß $Q = Fc$, oder $c = \frac{Q}{F}$ geſetzt werden kann,

$$R = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{Q\gamma}{g}; \text{ ſo daß}$$

$$v = \frac{Q}{F} - \frac{gR}{Q\gamma} \text{ folgt.}$$

Wäre $R$ Null, oder wenigſtens ſehr klein, ſo ließe ſich $v = \frac{Q}{F}$ ſetzen,

Digitized by Google

also annehmen, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit $v$ der Wassermenge $Q$ proportional wäre, was allerdings auch zu fordern ist. Wenn dagegen $R = \psi v$ wäre, also der Widerstand des Rades mit $v$ gleichmäßig wüchse, so würde

$$v + \frac{\psi g v}{Q\gamma} = \frac{Q}{F}, \text{ also}$$

$$v = \frac{Q}{F\left(1 + \frac{\psi g}{Q\gamma}\right)}, \text{ annähernd} = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{\psi g}{Q\gamma}\right) \text{ zu setzen sein.}$$

Wenn also der Widerstand $R$ des Rades nicht sehr klein ist, so nimmt das Instrument eine kleinere Umdrehungsgeschwindigkeit an als wenn derselbe Null oder wenigstens unbeträchtlich ist, und es giebt auch dann das Instrument ein zu kleines Wasserquantum an.

Setzt man $v = 0$, so erhält man bei der Ausflußmenge $Q_0$ die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{gR}{Q_0\gamma},$$

und es läßt sich dann wenigstens annähernd

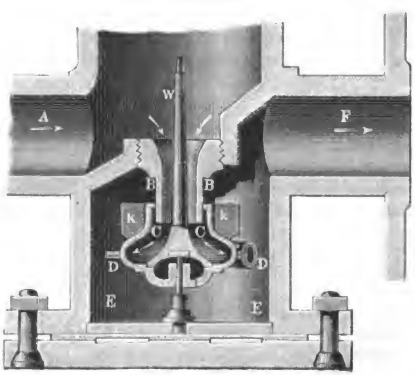
$$v = c - c_0, \text{ sowie}$$

$$Q = F(v + c_0) = \frac{\pi F r u}{30} + Q_0 = \mu u + Q_0$$

setzen, wenn $r$ den Radhalbmesser, $u$ die Umdrehungszahl des Rades und $\mu$ einen durch Versuche zu bestimmenden Coefficienten bezeichnen.

Am meisten haben in der neuesten Zeit die Wassermesser dieser Art von Siemens Anwendung gefunden, wovon Fig 858 den Haupttheil im Durch-

Fig. 858.

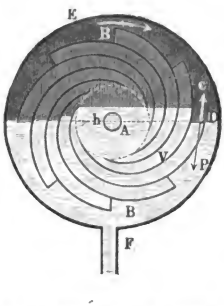



Digitized by Google

schnitt darstellt. Das aus $A$ zufließende Wasser tritt durch die Röhre $BB$ in das Rad $CC$, und wird von da durch die Schwungröhren $DD$ in das Gehäuse $EE$ geführt, aus dem es die Röhre $F$ weiter leitet. Die Welle $W$ des Rades ist oben durch eine Stopfbüchse geführt, und setzt mit ihrem schraubenförmigen Ende den Zählapparat in Bewegung. Die Flügel $k$, $k$ auf dem Rade sollen durch den Widerstand, welchen sie im Wasser erleiden, zum Reguliren der Umdrehungsbewegung des Rades beitragen.

Man kann auch das Reactionsrad so einrichten, daß es bei jeder Umdrehung eine bestimmte Wassermenge durchführt. In dieser Absicht taucht man das Rad $BAB$, Fig. 859, nur zum Theil ins Wasser, so daß sich bei Umdrehung desselben, die Röhren oder Spiralgänge abwechselnd mit Luft und Wasser füllen. Das Wasser wird auch hier durch eine Röhre ins Innere des Rades und von da durch die Spiralgänge in den übrigen Raum des Gehäuses $EF$ geführt, aus dem es in der Röhre $F$ abläuft. Das Wasser steht hier im Innern des Rades um eine gewisse Höhe $h$ über dem Wasser im Gefäße, und wenn daher bei der Umdrehung des Rades in der angedeuteten Richtung eine Ausmündung $D$ unter den Wasserspiegel im Inneren gelangt, so fängt das Wasser an durch dieselbe auszufließen, und übt dabei eine gewisse Reactionskraft $P$ aus, wodurch die Umdrehungsbewegung des Rades unterhalten wird. Ist $V$ die Wassermenge, welche ein Spiralgang faßt, und $n$ die Anzahl dieser Canäle, so fließt bei der Umdrehungszahl $u$ des Rades pr. Minute, die Wassermenge $Q = \frac{nuV}{60}$ pr. Secunde durch das Rad.

Fig. 859.



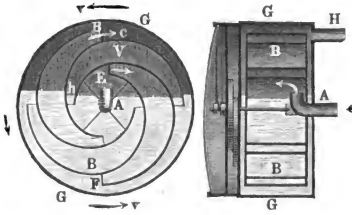

Anmerkung. Ueber den Siemen'schen Wassermesser ist nachzulesen: die Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Bd. I., 1857, wo auch noch ein nach dem Principe des Aichens construirter Wassermesser von Jopling beschrieben wird. Siehe auch die Schrift: Siemens and Adamsons Patent-Water-Meter. Ein ganz eigenthümlich construirter Wassermesser in Form eines Reactionsrades ist im Génie industrielle Tome XXI, No. 126, 1861, unter dem Namen: Compteur hydraulique pour la mesure d'écoulement des liquides, par Guyet beschrieben. Zwei Wassermesser sind auch in der englischen Schrift Hydraulia, by W. Matthews behandelt. Ein Compteur hydraulique, welcher auf dem Bahnhofe zu Chartres gebraucht wird, ist beschrieben im Bulletin de la Société d'encouragement, 51. Jahrgang (1852). Ueber Uhler's Meßapparat für Flüssigkeit handelt Dingler's Journal, Bd. 161. Die Beschreibung eines Controlapparates zum Messen des in den Branntweinbrennereien gewonnenen Spiritus

Digitized by Google

von Perels enthalten die Mittheilungen des Gewerbevereines für Hannover, Neue Folge 1861.

**Gasmesser.** Die sogenannten naſſen Gasmeſſer oder Gasuhren (franz. compteurs à gaz; engl. gas-meters) ſind ebenſo wie gewiſſe Waſſermeſſer, kleine Räder mit Spiralgängen, welche zur größeren Hälfte ins Waſſer eintauchen, und durch die Reaction des durchſtrömenden Gaſes in Umdrehung geſetzt werden, wobei jeder Spiralgang eine gewiſſe Gasmenge von innen nach außen führt. Die weſentliche Einrichtung eines ſolchen Gasmeſſers iſt aus den beiden Durchſchnitten in Fig. 860 erſichtlich. Das zuſtrömende Gas wird durch eine Kropfröhre $A$ in das Innere eines Rades $BB$ geleitet, wo es den Waſſerſpiegel um die Höhe $h$ tiefer drückt, welche dem Spannungsverluſt des Gaſes beim Durchgang durch das Inſtrument entſpricht. Aus denſelben tritt es nach und nach in die Einmündungen der Spiralgänge, füllt dieſelben faſt ganz aus, und ſtrömt zuletzt durch die Mündungen am Radumfang in das Gehäuſe $GG$, aus welchem es durch eine Röhre $H$ nach dem Punkte des Bedarfes geführt wird. Damit durch einen Spiralgang des Rades eine beſtimmte Gasmenge abgeführt werde, iſt die Anordnung ſo zu treffen, daß ſich von den beiden Mündungen einer Windung immer mindeſtens eine unter Waſſer befindet, weil dann während des Anfüllens eines Ganges kein Abfluß ſtatthat, und während des Abfluſſes nicht noch Gas von innen nachſtrömt. Es iſt dann die Gasmenge $V$, welche ein Spiralgang durchläßt, eine beſtimmte, und daher das Gasquantum

Fig. 860.




§. 507

$$Q = \frac{n\,u\,V}{60}$$

zu ſetzen, wenn das Rad mit $n$ Spiralgängen pr. Minute $u$ Umdrehungen macht. Bezeichnet $b$ den Barometerſtand des abſtrömenden Gaſes, ſo iſt $b + h$ der Barometerſtand des zuſtrömenden Gaſes, daher, nach dem Mariotte'ſchen Geſetze, das Luftquantum eines Spiralganges, gemeſſen unter dem Drucke außerhalb des Rades:

$$V_1 = \left(\frac{b+h}{b}\right) V,$$

und folglich die Luftmenge, welche zunächſt beim Austritt einer Außenmündung aus dem Waſſer, aus dem Rade in den übrigen Gefäßraum ſtrömt,

Digitized by Google

$$V_1 - V = \frac{h}{b} V.$$

Bei dieſem Ausſtrömen wird die mechaniſche Arbeit

$$A = V p \; Log.\,nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)$$

frei (ſ. §. 388), welche, da wegen der Kleinheit von $\frac{h}{b}$ annähernd

$$Log.\,nat.\left(\frac{b+h}{b}\right) = Log.\,nat.\left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b}$$

und bei der Dichtigkeit $\gamma$ der Manometerfüllung, $p = (b+h)\gamma = b\gamma$ iſt, auch $A = V h \gamma$ geſetzt werden kann.

Von dieſer Arbeit wird ein Theil auf die Umdrehungsbewegung des Rades verwendet, und ein Theil von der Wirbelbildung aufgezehrt. Der erſtere Theil iſt durch den Ausdruck

$$A_1 = \frac{(c-v)v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1,$$

in welchem $h$ den mittleren Manometerſtand, $c$ die mittlere Ausflußgeſchwindigkeit, $v$ die äußere Radgeſchwindigkeit und $\gamma_1$ die Dichtigkeit des ausſtrömenden Gaſes bezeichnet, beſtimmt. Iſt $R$ der auf den Radumfang reducirte Widerſtand des Rades, ſowie $r$ der Halbmeſſer deſſelben, ſo hat man die von demſelben beanſpruchte Arbeit:

$$A_1 = R \cdot \frac{2\pi r}{n}, \text{ und daher zu ſetzen:}$$

$$\frac{(c-v)v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{2\pi r}{n} R, \text{ oder da } 2\pi r = \frac{60\,v}{u} \text{ iſt,}$$

$$\frac{c-v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{60\,R}{n\,u}$$

und es folgt daher die dem Abſtande $h$ zwiſchen den beiden Waſſerſpiegeln entſprechende Umdrehungsgeſchwindigkeit

$$v = c - \frac{g\,b}{h\,V\gamma_1} \cdot \frac{60\,R}{n\,u}$$

ſowie die Umdrehungszahl der Gasuhr pro Minute:

$$u = \frac{30}{\pi r}\left(c - \frac{60\,g\,b\,R}{n\,u\,V\,h\,\gamma_1}\right).$$

Annähernd fällt $c = \sqrt{2\,g\,\frac{h\gamma}{\gamma_1}}$ aus, wenn $\gamma$ die Dichtigkeit der Manometerfüllung bezeichnet. Das Gasquantum pro Minute iſt natürlich

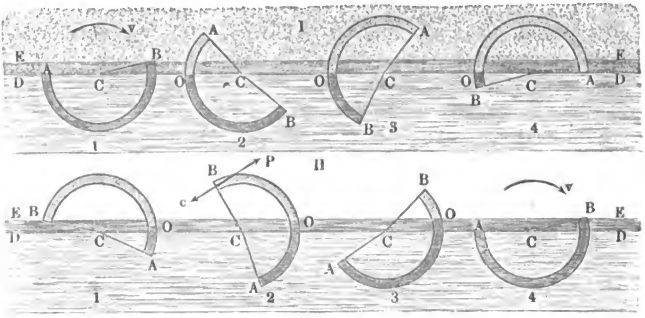
$$Q = \frac{n\,u}{60} V,$$

alſo der Umdrehungszahl $u$ proportional.

Digitized by Google

**Neuere Gasuhren.** Anstatt die Spiralgänge einer Gasuhr in einer Ebene um die Welle zu legen, kann man dieselben auch schraubenförmig um dieselbe herumführen. Die Art und Weise der Wirkung eines solchen Gasmessers ist aus den Durchschnitten in I. und II., Fig. 861, zu ersehen, wo $DD$ den Wasserspiegel an der vorderen und $EE$ den Wasserspiegel an der hinteren Stirnfläche des §. 508

Fig. 861.




eine liegende Trommel bildenden Rades vorstellt. Die Mündung $A$ des Spiralganges $AOB$ mündet in der Kammer an der vorderen Fläche aus und nimmt das zuströmende Gas auf, die Mündung $B$ hingegen führt das Gas in die Kammer an der hinteren Stirnfläche, von welcher aus es mittels einer Röhre weiter geführt wird. In Fig. 861, I. sind die verschiedenen Stellungen eines Spiralganges von der vorderen Stirnfläche aus gesehen, abgebildet. Fig. 861, II. dagegen stellt verschiedene Stellungen dieses Ganges von der hinteren Stirnfläche des Rades aus betrachtet, dar. Bei der durch einen Pfeil angedeuteten Richtung der Umdrehung des Rades um die horizontale Axe $C$ tritt in (I., 1) die Einmündung $A$ eben aus dem vorderen Wasser heraus, während die Ausmündung $B$ in das hintere Wasser zu treten beginnt; ferner sind in (I., 2) und (I., 3) Gasbögen $AO$, $AO$ durch die Mündung $A$ eingetreten, und es taucht in (I., 4) die Einmündung $A$ wieder in das Vorderwasser, wobei nach Aufnahme einer gewissen Gasmenge $V$ das weitere Einströmen von Gas durch $A$ aufhört. Kurz darauf gelangt aber die Ausmündung $B$ wie (II., 1) darstellt, aus dem Hinterwasser, und es beginnt das Ausströmen des vorher eingenommenen Gases, welches bei den Stellungen (II., 2) und (II., 3) vollkommen im Gange ist. Bei einer neuen Umdrehung tritt $B$ wieder in das Hinterwasser, wie (II., 4) darstellt, und es beginnt nun eine neue Aufnahme von Gas. Es wird also bei der einen Hälfte der Umdrehung von dem Spiralgange $AOB$ ein Gasbogen $AO$ (I., 4) von der größeren Pressung $b + h$ aufgenommen, und bei der zweiten

Digitized by Google

Hälften von demſelben in den Raum mit der kleineren Preſſung geführt. Bei dem Uebergange aus der größeren Preſſung in die kleinere wird wieder das Arbeitsquantum $A = Vh\gamma$ frei, von welchem ein Theil die Umdrehung des Rades bewirkt, wie bereits im vorigen Paragraphen angegeben worden iſt. Die allgemeine Einrichtung und Thätigkeit einer ſolchen Gasuhr iſt aus einer ideellen Darſtellung in Fig. 862 noch beſſer zu erkennen. Das Gas wird zunächſt durch ein Kropfrohr $A$ in eine Kammer $BB$ geführt, welche nur in der Mitte, um die Umdrehungsaxe $C$ herum, mit dem Waſſer im Gehäuſe $EFG$ communicirt, am äußeren Umfange aber, wo die Spiralgänge $HK$ und $LM$ einmünden, luftdicht abgeſchloſſen iſt. In der Abbildung iſt dargeſtellt, wie der Spiralgang $HK$ aus $BB$ Gas aufnimmt, und wie dagegen der Spiralgang $LM$ das kurz vorher aufgenommene Gas bei $M$ in den oberen Raum des Gehäuſes $EFG$ führt, aus dem es durch eine Röhre $F$ weiter geleitet wird. Bei dieſer Einrichtung der Gasuhr iſt das Gas in der Vorkammer durch das Waſſer von dem in dem Gehäuſe ganz abgeſperrt, und daher eine Liderung, welche durch die Reibung viel Kraft verzehrt, nicht nöthig. Das andere Ende $D$ der Axe $CD$ des Rades iſt mit einem Schraubengewinde verſehen, wodurch der Rädermechanismus des Zählapparates in Bewegung geſetzt wird.

Fig. 862.

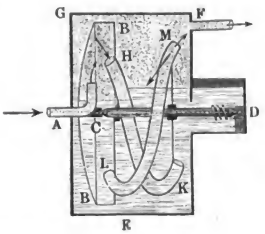
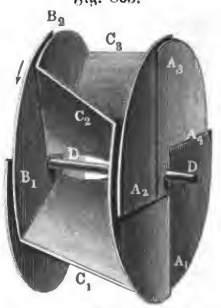



Fig. 863.




Die Crosley'ſchen Gasuhren, welche eine allgemeine Verbreitung erlangt haben, ſind nach dem im Vorſtehenden erklärten Principe conſtruirt; nur ſind hier die Spiralgänge nicht röhrenförmig, ſondern wirkliche Kammern mit ſpiralförmigen Scheidewänden und durch Ausbiegung der Stirnwände gebildeten triangulären Ein- und Ausmündungscanälen. Figur 863 iſt eine perſpectiviſche Anſicht eines ſolchen Rades bei abgenommenem Mantel, welches ſich aus 4 Blechſtücken, wie Fig. 864 darſtellt, zuſammenſetzen läßt. Man ſieht in $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ die Ein- und in $B_1$, $B_2$ ... die Ausmündungen, ſowie in $C_1$, $C_2$, $C_3$ ... die Scheidewände des um die Axe $DD$ umlaufen-

Digitized by Google

den Rades der Gasuhr. In Fig. 865 ist ein Längendurchschnitt der Gasuhr mit dem Aeußeren der Trommel abgebildet; man bemerkt bei *K* die Kropfröhre, welche das Gas in die Vorkammer des Rades oder der Trommel einführt, und in *Z* die Röhre, welche das Gas aus dem oberen Raume *AA* des Uhrgehäuses ableitet. Das Gas strömt nicht unmittelbar aus der Gasleitung nach *K*, sondern die Röhre *E* führt erst das Gas in eine Kammer *F*, und von da durch die Ventilöffnung *i* in die Kammer *G*, von wo aus es durch den oberen Theil der verticalen Röhre *H* in die Kropfröhre *K* gelangt. Der äußere Wasserspiegel reicht gerade bis zur Einmündung der Röhre *H*, durch welche das überschüssige Wasser nach unten in einen Behälter *L* abgeführt wird. Damit auf der anderen Seite das Wasser nicht zu tief sinke, ist ein Schwimmer *S* angebracht, welcher das Admissionsventil *i* trägt, und dasselbe verschließt, wenn er bis auf eine gewisse Tiefe sinkt. Der Gaszufluß hört dann ganz auf und man wird dadurch benachrichtigt, daß eine Nachfüllung von Wasser durch eine Mündung *M* in einer nur unten mit dem Wasserraume in Communication stehenden Kammer *N* nöthig ist.

Fig. 864.

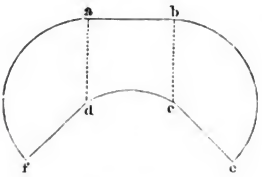
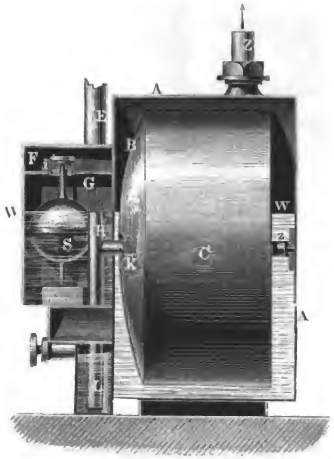



Fig. 865.




Die Abbildung in Fig. 866 (a. f. S.) führt die Gasuhr in einem vordern Durchschnitt vor Augen, woran außer der Kammer *N* mit der Mündung *M*, vorzüglich das Uhrwerk *U* des Zählapparates, welches mittels eines Schraubengewindes an der Axe der Trommel, und durch eine stehende Welle mit Zahnrad *P* im Umtrieb gesetzt wird, zu sehen ist.

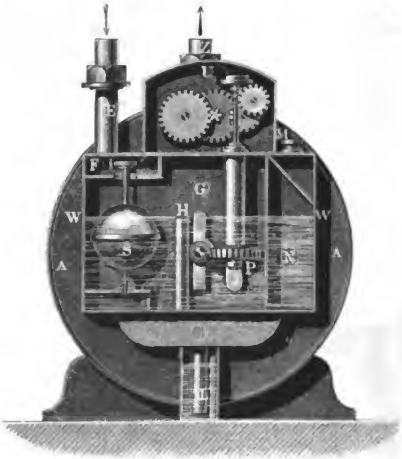
Ein wesentlicher Widerstand bei dem Gange der Crosley'schen Gasuhr geht aus dem Ein- und Austritt des Wassers durch die verengten trian-



Digitized by Google

gulären Mündungen hervor. Aus dem Inhalte $F$ einer Ein- oder Ausmündung und der durchſtrömenden Waſſermenge pr. Secunde, welche ſich dem Gasquantum $Q$ gleichſetzen läßt, folgt die Ein- und Austrittsgeſchwindigkeit

Fig. 866.




des Waſſers $v_1 = \frac{Q}{F}$, und daher der entſprechende Arbeitsverluſt pr. Secunde:

$$L_1 = \varepsilon \frac{v_1^2}{2g} Q\gamma = \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \frac{Q\gamma}{g}.$$

Anmerkung. Näheres über Gasuhren iſt nachzuleſen in Schilling's Handbuch der Steinkohlengasbeleuchtung, ferner Heeren's Aufſatz: „die Einrichtung der Gasuhren" in den Mittheilungen des Gewerbevereins für das K. Hannover, Jahrgang 1859. Eine neue Gasuhr von Hanſen iſt beſchrieben im Journal für Gasbeleuchtung, 1861.

§. 509 **Wirkungen unbegrenzter Flüſſigkeiten.** Wenn ſich ein Körper in einer unbegrenzten Flüſſigkeit progreſſiv fortbewegt, oder wenn ein Körper in eine bewegte Flüſſigkeit gebracht wird, ſo erleidet derſelbe einen Druck, der von der Form und Größe dieſes Körpers, ſowie von der Dichtigkeit der Flüſſigkeit und von der Geſchwindigkeit der einen oder der anderen Maſſe abhängt, und in einem Falle Widerſtand, im anderen aber Stoß

Digitized by Google

der Flüssigkeit genannt wird. Dieser hydraulische Druck entspringt aber vorzüglich aus der Trägheit des Wassers, dessen Bewegungszustand durch das Zusammentreffen mit dem festen Körper verändert wird, dann aber auch noch aus der Kraft des Zusammenhängens der Wassertheilchen, die hierbei theilweise von einander getrennt oder an einander verschoben werden. Bewegt sich ein Körper $AC$, Fig. 867, dem stillstehenden Wasser entgegen, so schiebt er eine gewisse Wassermasse mit erhöhtem Drucke vor sich her. Während diese Wassermasse beim weiteren Fortrücken des Körpers auf der einen Seite immer mehr Zuwachs erhält, findet auf einer anderen Seite, nahe am Körper ein steter Abfluß statt, indem die der Vorderfläche $AB$ zunächst liegenden

Fig. 867.

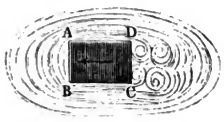
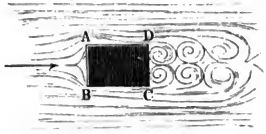



Fig. 868.




Theilchen eine Bewegung in der Richtung dieser Fläche annehmen. Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper $AC$, Fig. 868, so erzeugt sich vor demselben ebenfalls ein erhöhter Wasserdruck und macht, daß die Wassertheilchen vor dem Körper von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden und sich an der Vorderfläche $AB$ hinbewegen. Haben diese Wassertheilchen die Grenzen der Vorderfläche erreicht, so machen dieselben eine Wendung, und laufen nachher an den Seitenflächen des Körpers hin, bis sie an die Hinterfläche kommen, wo sie sich nicht sogleich wieder vereinigen, sondern zunächst wirbelnde Bewegungen annehmen. Man sieht, daß die allgemeinen Bewegungsverhältnisse der den Körper umgebenden Wasserelemente beim Stoße des bewegten Wassers dieselben sind, wie beim Widerstande eines im Wasser bewegten Körpers; nur findet bei den Wirbeln eine Verschiedenheit insofern statt, als bei kurzen Körpern die Wirbel im letzteren Falle einen kleineren Raum einnehmen als im ersteren. Die Geschwindigkeit der Wasserelemente nimmt in beiden Fällen von der Mitte der Vorderfläche an nach den Grenzen derselben immer mehr und mehr zu, erreicht am Anfange der Seitenflächen, wo in der Regel noch eine Contraction eintritt, ihr Maximum, nimmt nun bei dem an den Seitenflächen hingehenden Wasser allmälig ab, und erreicht endlich ihr Minimum bei dem Wasser, welches die Hinterfläche erlangt und in wirbelnde Bewegung übergeht.

**Theorie des Stosses und Widerstandes.** Der Normaldruck des §. 510
ruhenden oder bewegten Wassers gegen einen in demselben bewegten oder in



Digitized by Google

Ruhe befindlichen Körper ist an verschiedenen Punkten dieses Körpers sehr verschieden. Er ist in der Mitte der Vorderfläche desselben am größten, und in der Mitte der Hinterfläche und nächstdem am Anfange der Seitenflächen am kleinsten, weil dort mehr ein Zu-, hier aber mehr ein Entströmen des Wassers in Hinsicht auf den Körper statt hat. Ist der Körper, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, in Hinsicht auf die Bewegungsrichtung symmetrisch, so heben sich die sämmtlichen Pressungen rechtwinkelig gegen diese Richtung auf, und es kommen daher nur die Pressungen in der Bewegungsrichtung in Betracht. Nun sind aber die Pressungen auf der Hinterfläche des Körpers den Pressungen auf der Vorderfläche entgegengesetzt, es läßt sich daher der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers gleichsetzen der Differenz zwischen dem Drucke gegen die Vorder- und dem gegen die Hinterfläche.

Wenn wir auch die Größe dieser Drücke a priori nicht angeben können, so können wir doch wegen der großen Aehnlichkeit der Verhältnisse mit dem Stoße isolirter Strahlen annehmen, daß wenigstens das allgemeine Gesetz für den Stoß des unbegrenzten Wassers von dem für den Stoß isolirter Strahlen nicht abweiche. Ist also $F$ der Inhalt einer Fläche, welche von einem unbegrenzten Strome, dessen Dichtigkeit $\gamma$ sein möge, mit der Geschwindigkeit $v$ getroffen wird, so läßt sich der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck:

$$P = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$$

setzen, wobei $\zeta$ noch eine von der Form der Fläche abhängige Erfahrungszahl bezeichnet. Dieser Ausdruck läßt sich aber nicht nur auf die Wirkung gegen die Vorderfläche, sondern auch auf die gegen die Hinterfläche anwenden, nur besteht sie hier, wo das Wasser ein Bestreben hat, sich zu entfernen, in einem Zuge oder einem Negativdrucke. Ist nun $Fh\gamma$ der hydrostatische Druck (§. 690) gegen die Vorder- und gegen die Hinterfläche eines Körpers, so folgt der Gesammtdruck gegen die Vorderfläche:

$$P_1 = Fh\gamma + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und der gegen die Hinterfläche:

$$P_2 = Fh\gamma - \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und es ergiebt sich so der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers:

$$P = P_1 - P_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

wenn $\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$ gesetzt wird.

Diese allgemeine Formel für den Stoß und Widerstand des unbegrenzten Wassers findet auch ihre Anwendung auf den Stoß des Win-

Digitized by Google

des und auf den Widerstand der Luft. Allerdings findet hier außer der Verschiedenheit des aërodynamischen Druckes an der Vorder- und Hinterfläche auch noch eine Verschiedenheit des aërostatischen Druckes statt, indem die Luft vor der Vorderfläche bei ihrer größeren Spannung auch eine größere Dichtigkeit ($\gamma$) hat, als an der Hinterfläche. Deshalb fallen wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, wie sie z. B. bei Geschützkugeln vorkommen, die Widerstandscoefficienten der Luft größer aus, als die des Wassers.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Erscheinung beim Stoße und Widerstande unbegrenzter Mittel (Wasser oder Luft) ist das Anhängen einer gewissen Wasser- oder Luftmasse an dem Körper, dessen Einfluß sich bei der ungleichförmigen Bewegung der Körper, wie z. B. bei Pendelschwingungen, besonders bemerkbar macht. Bei einer Kugel hat die dem bewegten Körper anhängende Luft- oder Wassermasse ein Volumen von 0,6 des Volumens der Kugel. Bei einem in der Arenrichtung bewegten prismatischen Körper ist das Verhältniß dieser Volumina

$$= 0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{F}}{l},$$

wo $l$ die Länge und $F$ den Querschnitt des Körpers bezeichnet. Diese schon von du Buat aufgefundenen Verhältnisse haben durch die neueren Beobachtungen von Bessel, Sabine und Baily vollkommene Bestätigung gefunden.

**Stoss und Widerstand gegen Flächen.** Der Widerstands- §. 511
coefficient $\zeta$ oder die Zahl, womit die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ zu multipliciren ist, um die Höhe einer den hydraulischen Druck messenden Wassersäule zu erhalten, ist bei Körpern von verschiedenen Formen sehr verschieden, und nur bei Platten, welche rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung stehen, von beinahe bestimmter Größe. Nach den Versuchen von du Buat, und nach denen von Thibault läßt sich für den Luft- und Wasserstoß gegen eine ruhende ebene Fläche, $\zeta = 1{,}86$ setzen, wogegen, jedoch mit weniger Sicherheit, für den Widerstand der Luft und des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche, $\zeta = 1{,}25$ anzunehmen sein möchte. In beiden Fällen kommen auf die Vorderfläche ungefähr zwei, und auf die Hinterfläche ein Drittel der ganzen Wirkung. Der Widerstand, welchen die Luft einer im Kreise umlaufenden Fläche entgegensetzt, ist von Borda, Hutton und Thibault sehr verschieden gefunden worden. Der Letztere fand mittels einer rotirenden ebenen Fläche von 0,1 Quadratmeter Inhalt den Widerstand:

$$P = 0{,}108 F v^2, \text{ wonach}$$

$$\zeta = 0{,}108 \cdot \frac{2g}{\gamma} = 0{,}108 \cdot \frac{19{,}62}{1{,}25} = 1{,}70 \text{ ist.}$$

Dieser Widerstand bleibt, diesen Versuchen zufolge, fast unverändert, so lange der Winkel $\alpha$, um welchen die Fläche von der Bewegungsrichtung abweicht, nicht unter 45 Grad herabgeht. Von 45 Grad an nimmt er mit dem Stoßwinkel $\alpha$ ab, so daß bei $\alpha = 10$ Grad, $\zeta$ nur $= 0{,}53$ ausfällt.

Digitized by Google

Nach den Versuchen von Didion u. s. w. ist für den Widerstand rotirender ebener Flächen von 0,2 . 0,2 = 0,04 Quadratmeter Inhalt:

$$\zeta = (0{,}1002 + 0{,}0434\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}573 + 0{,}681\, v^{-2},$$

wo $v$ in Metern zu geben ist.

An einer ebenen Fläche von 1 Quadratmeter Inhalt fand dagegen Didion u. s. w. bei einer senkrechten Bewegung derselben, den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = (0{,}084 + 0{,}036\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}318 + 0{,}565\, v^{-2},$$

wogegen Thibault an solchen Flächen von 0,1 und 0,2 Quadratmeter Inhalt den Coefficienten

$$\zeta = (0{,}1188 + 0{,}036\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}865 + 0{,}565\, v^{-2} \text{ findet.}$$

Vorstehende Formeln gelten nur für eine gleichförmige Bewegung der Fläche; erfolgt die Bewegung derselben ungleichförmig, so erfordern dieselben noch eine Ergänzung. Aendert sich die Geschwindigkeit eines in einem widerstehenden Mittel bewegten Körpers, so wird auch die von dem Körper in Bewegung gesetzte, oder von demselben mit fortgenommene Flüssigkeitsmasse eine andere, und deshalb läßt sich der Widerstand auch noch von der Acceleration $p$ des Körpers abhängig darstellen. Nach den Versuchen von Didion u. s. w. an einer Fläche von 1 und an einer solchen von $^1/_4$ Quadratmeter Inhalt, welche in einer verticalen Linie bewegt wurde, ist der Widerstand:

$$P = (0{,}084\, v^2 + 0{,}036 + 0{,}164 p) F, \text{ und hiernach:}$$

$$\zeta = [0{,}084 + (0{,}036 + 0{,}164\, p)\, v^{-2}] \cdot \frac{2g}{\gamma}$$

$$= 1{,}318 + (0{,}565 + 2{,}574\, p)\, v^{-2}.$$

Uebrigens ist zu beachten, daß bei der ungleichförmigen Bewegung das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit von dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit verschieden ist.

Stoß und Widerstand unbegrenzter Mittel werden auch erhöht, wenn man die Flächen aushöhlt oder am Umfange mit vorstehenden Rändern versieht; doch ist man hierüber zu allgemeinen Ergebnissen noch nicht gelangt.

An einem Fallschirm von 1,2 Quadratmeter Querschnitt, 1,27 Meter mittlerem Durchmesser und 0,430 Meter Tiefe fand Didion u. s. w. bei einer accelerirten Bewegung, wobei die hohle Seite vorausging:

$$P = (0{,}163\, v^2 + 0{,}070 + 0{,}142 p) F,$$

wonach also

$$\zeta = 2{,}559 + (1{,}099 + 2{,}229 p)\, v^{-2} \text{ ist.}$$

Digitized by Google

**Stoss und Widerstand gegen Körper.** Der Stoß und Wider- §. 512
stand des Wassers gegen prismatische Körper, deren Axe mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, nimmt ab, wenn die Länge der Körper eine größere wird. Nach den Versuchen von du Buat und Duchemin ist der Stoß von der Vorderfläche unveränderlich, und nur die Wirkung gegen die Hinterfläche veränderlich. Jenem entspricht der Coefficient $\xi_1 = 1{,}186$. für die Gesammtwirkung aber ist bei den relativen Längen

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$$

$$\xi = 1{,}86;\ 1{,}47;\ 1{,}35;\ 1{,}33.$$

Bei noch größerem Verhältnisse zwischen der Länge $l$ und der mittleren Breite $\sqrt{F}$ des Körpers nimmt $\xi$ in Folge der Reibung des Wassers an den Seitenflächen des Körpers wieder zu. Bei dem Widerstande des Wassers treten umgekehrte Verhältnisse ein. Hier ist nach du Buat für die Wirkung gegen die Vorderfläche unveränderlich $\xi_1 = 1$, für die Gesammtwirkung aber bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$

$$\xi = 1{,}25;\ 1{,}28;\ 1{,}31;\ 1{,}33,$$

so daß also bei einem Prisma, welches dreimal so lang als dick ist, der Stoß mit dem Widerstande des Wassers gleich groß ausfällt.

Die von Newton, Borda, Hutton, Vince, Désaguilliers u. A. angestellten Versuche über den Widerstand von eckigen und runden Körpern lassen noch viel Unsicherheit zurück. Was die Kugeln betrifft, so scheint bei mäßigen Geschwindigkeiten der Widerstandscoefficient für die Bewegung in Luft oder Wasser 0,5 bis 0,6 gesetzt werden zu können. Bei großer Geschwindigkeit und für die Bewegung in der Luft ist aber nach Robins und Hutton zu setzen für die Geschwindigkeiten

$v = 1, \quad 5, \quad 25, \quad 100, \quad 200, \quad 300, \quad 400, \quad 500, \quad 600$ Meter:

$\xi = 0{,}59;\ 0{,}63;\ 0{,}67;\ 0{,}71;\ 0{,}77;\ 0{,}88;\ 0{,}99;\ 1{,}04;\ 1{,}01.$

Duchemin und Piobert haben besondere Formeln für das Wachsen dieser Widerstandscoefficienten angegeben. Nach Piobert ist der Widerstand der Geschützkugeln in der Luft:

$$P = 0{,}029\ (1 + 0{,}0023\,v)\,F v^2 \text{ Kilogramm, wonach}$$

$$\xi = 0{,}451\ (1 + 0{,}0023\,v) \text{ folgt.}$$

Für den Stoß des Wassers gegen eine Kugel findet Eytelwein:

$$\xi = 0{,}7886,$$

wogegen nach den Versuchen Piobert's u. s. w., angestellt mit Geschützkugeln von 0,10 bis 0,22 Meter Durchmesser, der Widerstand der Kugeln im Wasser:

$$P = 23{,}8\ F v^2 \text{ Kilogramm; und daher}$$

$\xi = 0{,}467$ zu setzen ist.

Digitized by Google

Die Widerſtandscoefficienten fallen auch bei nur zum Theil eingetauchten Körpern anders aus, als bei ganz vom Waſſer umgebenen Körpern. Für einen ſchwimmenden prismatiſchen Körper, welcher 5 bis 6 mal ſo lang als breit iſt, und in der Axenrichtung bewegt wird, ſoll $\zeta = 1{,}10$ geſetzt werden. Iſt der Körper durch zwei Verticalebenen vorn zugeſchärft, wie $ABC$, Fig. 869, ſo nimmt $\zeta$ mit dem Zuſchärfungswinkel $ACA = \beta$ ab, und es iſt

| für $\beta =$ | $180^0$ | $156^0$ | $132^0$ | $108^0$ | $84^0$ | $60^0$ | $36^0$ | $12^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta =$ | 1,10 | 1,06 | 0,93 | 0,84 | 0,59 | 0,48 | 0,45 | 0,44 |

Iſt das Hintertheil des Körpers $ACB$, Fig. 870, zugeſchärft, und $\beta$ der Zuſchärfungswinkel, ſo hat man dagegen

Fig. 869.

Fig. 870.

| für $\beta =$ | $180^0$ | $138^0$ | $96^0$ | $48^0$ | $24^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta =$ | 1,10 | 1,03 | 0,98 | 0,95 | 0,92 |

Bei zugeſpitzten Vorder- und Hintertheilen des ſchwimmenden Körpers fällt natürlich $\zeta$ noch kleiner aus; für Flußdampfſchiffe iſt $\zeta = 0{,}12$ bis $0{,}20$, und für große Seedampfſchiffe $\zeta = 0{,}05$ bis $0{,}10$.

Anmerkung. Sehr ausführlich über dieſe Verhältniſſe handeln Poncelet in ſeiner eben citirten Introduction, und Duchemin ſowie Thibault in ihren Récherches expérimentales etc. Ueber den Widerſtand gegen ſchwimmende Körper, namentlich gegen Schiffe, ſowie auch vom Stoße des Windes gegen Räder, wird im zweiten und dritten Theile gehandelt.

Beiſpiel. Wenn man nach Borda den Widerſtand und Stoß rechtwinkelig gegen die Are eines Cylinders $\frac{1}{2}$mal ſo groß ſetzt, als den gegen ein Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Dimenſionen hat, ſo erhält man für den Widerſtand den Coefficienten:

$$\zeta = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}28 = 0{,}64,$$

und für den Stoß, denſelben

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}47 = 0{,}735.$$

Wendet man nun dieſe Werthe auf den menſchlichen Körper an, deſſen Querſchnitt etwa 7 Quadratfuß Inhalt hat, ſo findet man für den Widerſtand und Stoß der Luft gegen denſelben die Werthe:

$$P = 0{,}64 \cdot 0{,}016 \cdot 7 \cdot 0{,}086\, v^2 = 0{,}00616\, v^2$$

und

$$P = 0{,}735 \cdot 0{,}016 \cdot 7 \cdot 0{,}086\, v^2 = 0{,}00708\, v^2.$$

Digitized by Google

Bei einer Geschwindigkeit von 5 Fuß ist daher der Widerstand der Luft nur 0,00616 . 25 = 0,154 Pfund; und die entsprechende Leistung pr. Secunde = 5 . 0,154 = 0,77 Fußpfund; bei einer Geschwindigkeit von 10 Fuß fällt dieser Widerstand schon 4mal und der Arbeitsaufwand 8mal so groß aus, und bei einer Geschwindigkeit von 15 Fuß ist der Widerstand das 9- und die Arbeit sogar das 27fache. Bewegt sich ein Mensch mit 5 Fuß Geschwindigkeit dem Winde von 50 Fuß Geschwindigkeit entgegen, so hat er einen der relativen Geschwindigkeit 50 + 5 = 55 Fuß entsprechenden Widerstand 0,00708 . $55^2$ = 21,42 Pfund zu überwinden, und dabei die übermäßige Arbeit von 21,42 . 5 = 107,1 Fußpfund zu verrichten.

**Bewegung in widerstehenden Mitteln.** Die Gesetze der Bewegung eines Körpers in widerstehenden Mitteln sind nicht sehr einfach, weil man es hier mit einer veränderlichen, d. h. mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsenden Kraft zu thun hat. Aus der Kraft $P$, die einen Körper forttreibt, und aus dem Widerstande $P_1 = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, welchen das Mittel der Bewegung entgegensetzt, folgt die bewegende Kraft: §. 513

$$P_0 = P - P_1 = P - \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

da aber die Masse des Körpers, $M = \frac{G}{g}$ ist, so ergiebt sich die Beschleunigung des Körpers:

$$p = \frac{P_0}{M} = \left(P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma\right) : M = \left(\frac{P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G}\right) \cdot g,$$

oder, wenn wir $\frac{\zeta F\gamma}{2gP}$ durch $\frac{1}{w^2}$ bezeichnen, also $\sqrt{\frac{2gP}{\zeta F\gamma}} = w$ setzen:

$$p = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g.$$

Die größte Geschwindigkeit, welche der Körper annehmen kann, ist

$$v = w = \sqrt{\frac{2gP_1}{\zeta F\gamma}}.$$

Ist die bewegende Kraft $P_1$ constant, so nähert sich die Bewegung nach und nach der Gleichförmigkeit, denn die Acceleration $p$ fällt immer kleiner und kleiner aus, je größer $v$ wird.

Nun nimmt aber bei der Acceleration $p$ die Geschwindigkeit $v$ in dem kleinen Zeittheilchen $\tau$ um $\varkappa = p\tau$ zu, daher läßt sich setzen:

$$\varkappa = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g\tau, \text{ und umgekehrt:}$$

$$\tau = \frac{G}{P} \cdot \frac{\varkappa}{g\left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]}.$$

Digitized by Google

Um nun die einer gegebenen Geschwindigkeitsveränderung entsprechende Zeit zu finden, theilen wir die Differenz $v_n - v_0$ zwischen der End- und Anfangsgeschwindigkeit in $n$ Theile, setzen einen solchen Theil:

$$\frac{v_n - v_0}{n} = \varkappa,$$

berechnen hiernach die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = v_0 + \varkappa,\ v_2 = v_0 + 2\varkappa,\ v_3 = v_0 + 3\varkappa \text{ u. s. w.},$$

und führen diese Werthe in die Simpson'sche Formel ein. Auf diese Weise erhalten wir die gesuchte Zeit, bei Annahme von vier Theilen:

$$1)\ t = \frac{G}{P}\cdot\frac{v_n - v_0}{12\,g}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4}{1-\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{1-\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4}{1-\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Es ist ferner der in einem Zeittheilchen $\tau$ zurückgelegte Raumtheil (§. 19):

$$\sigma = v\tau, \text{ oder da sich } \tau = \frac{\varkappa}{p} \text{ setzen läßt:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{p}, \text{ also hier:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{1-\left(\frac{v}{w}\right)^2}\cdot\frac{G}{Pg}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel findet man nun den Raum, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit $v_0$ in $v_n$ übergeht.

$$2)\ s = \frac{G}{P}\cdot\frac{v_n - v_0}{12\,g}\left(\frac{v_0}{1-\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4\,v_1}{1-\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,v_2}{1-\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4\,v_3}{1-\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{v_4}{1-\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Natürlich wird die Genauigkeit größer, wenn man 6, 8 oder noch mehr Theile annimmt. Uebrigens gestattet diese Formel auch eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Widerstandscoefficienten, welches bei bedeutenden Geschwindigkeiten nothwendig ist. Beim freien Fall der Körper in der Luft oder im Wasser ist $P = G$ das scheinbare Gewicht des Körpers, und bei der Bewegung auf der Horizontalebene $P = 0$, oder richtiger, gleich der Reibung $fG$. Da diese ein Widerstand ist, so hat man sie negativ in Rechnung zu bringen, weshalb hier

Digitized by Google

$$P_0 = -(P + P_1) \text{ und}$$

$$p = -\left[1 + \left(\frac{c}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G}\, g$$

zu setzen ist. Da ferner hier nicht von einer Zu-, sondern nur von einer Abnahme der Geschwindigkeit die Rede sein kann, so haben wir hier statt $v_n - v_0$, $v_0 - v_n$ in den obigen Formeln zu setzen.

In dem Falle, wenn der Körper durch eine Kraft, z. B. durch sein Gewicht getrieben wird, nähert sich die Bewegung immer mehr und mehr einer gleichförmigen, so daß sie schon nach einer gewissen Zeit als eine solche angesehen werden kann, wiewohl sie es in Wahrheit nie wird. Es fällt die Acceleration $p =$ Null aus, wenn $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = P_0$, wenn also

$$v = \sqrt{\frac{2gP_0}{\zeta F\gamma}} = w \text{ ist.}$$

Diesem Ziele nähert sich also die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immer mehr und mehr, ohne es je vollkommen zu erreichen.

Beispiel. Piobert, Morin und Didion fanden für einen Fallschirm, dessen Tiefe 0,31 des Oeffnungsdurchmessers betrug, den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1{,}94 \,.\, 1{,}37 = 2{,}66$. Von welcher Höhe wird sich hiernach ein 150 Pfd. schwerer Mensch mit einem ähnlichen Fallschirme von 10 Pfund Gewicht und 60 Quadratfuß Querschnitt herablassen können, ohne eine größere Geschwindigkeit anzunehmen, als diejenige, welche er erlangt, wenn er ohne Fallschirm 10 Fuß hoch herabspringt? Die letzte Geschwindigkeit ist $v = 7{,}906\sqrt{10} = 25$ Fuß, ferner die Kraft $P = G = 150 + 10 = 160$ Pfd., die Fläche $F = 60$ Quadratfuß, die Dichtigkeit $\gamma = 0{,}0859$ und der Widerstandscoefficient $\zeta = 2{,}66$, daher:

$$\frac{1}{w^2} = \frac{60\,.\,0{,}0859}{62{,}5\,.\,160} = 0{,}000515 \text{ und}$$

$$\zeta \cdot \frac{v^2}{w^2} = 2{,}66\,.\,0{,}000515\,.\,25^2 = 0{,}85625.$$

Nehmen wir nun 6 Theile an, so erhalten wir für diese:

$$1 - \zeta\,\frac{v^2}{w^2} = 0{,}97621;\ 0{,}90486;\ 0{,}78593;\ 0{,}61944;\ 0{,}40537;\ 0{,}14375,$$

und für

$$\frac{v}{1 - \zeta\,\frac{v^2}{w^2}} = 0;\ 4{,}268;\ 9{,}210;\ 15{,}905;\ 26{,}910;\ 51{,}393 \text{ und } 173{,}913,$$

daher nach der Simpson'schen Regel den mittleren Werth hiervon

$= (1.0 + 4.4{,}268 + 2.9{,}210 + 4.15{,}905 + 2.26{,}910 + 4.51{,}393 + 1.173{,}913) : (3.6)$

$= \frac{532{,}42}{18} = 29{,}58$; und hieraus den gesuchten Fallraum:

$s = \frac{v_n - v_0}{g}$ mal Mittel von $\frac{v}{1 - \zeta \cdot \frac{v^2}{w^2}} = \frac{25 - 0}{31{,}25} \cdot 29{,}58 = 23{,}6$ Fuß

Die entsprechende Fallzeit ist, da der mittlere Werth von $\frac{1}{1 - \zeta\,\frac{v^2}{w^2}}$

Digitized by Google

$= (1.0 + 4.1{,}024 + 2.1{,}105 + 4.1{,}272 + 2.1{,}614 + 4.2{,}467 + 1.6{,}957) : 18$
$= 1{,}747$ beträgt:

$$t = \frac{25}{31{,}25} \cdot 1{,}747 = 1{,}4 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Für einen conſtanten Widerſtandscoefficienten ergiebt ſich für den freien Fall durch den höheren Calcül:

$$v = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) w = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) \sqrt{2g \cdot \frac{G}{\zeta F \gamma}}$$

und

$$s = Ln.\left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4\, e^{\mu t}}\right) \frac{w^2}{2g} = Ln.\left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4\, e^{\mu t}}\right) \frac{G}{\zeta F \gamma}$$
$$= Ln.\left(\frac{w^2}{w^2 - v^2}\right) \cdot \frac{w^2}{2g},$$

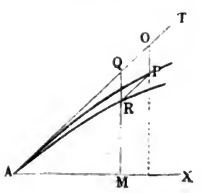
wobei

$$\mu = \sqrt{2g \cdot \zeta \frac{F\gamma}{G}},$$

$e$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmenſyſtemes und $Ln.$ den natürlichen Logarithmen bezeichnen.

§. 514 **Geworfene Körper.** Wir haben ſchon früher die Wurfbewegung im luftleeren Raume kennen gelernt und §. 39 gefunden, daß derſelben eine Parabel entſpricht. Jetzt können wir uns auch über dieſe Bewegung in einem widerſtehenden Mittel, z. B. über die eines abgeſchoſſenen Körpers in der Luft nähere Kenntniß verſchaffen.

Fig. 871.




Jedenfalls iſt die Bahn eines die Luft durchſchneidenden Körpers keine Parabel wie im luftleeren Raume, ſondern eine unſymmetriſche Curve, mit einem ſchwächer auf- und ſtärker niederſteigenden Schenkel, wie aus Folgendem hervorgeht. Während der kleinen Zeit $\tau$ durchläuft der mit der Geſchwindigkeit $v$ in der Richtung $AT$, Fig. 871, aufſteigende Körper in Folge ſeiner Trägheit einen Weg

$$AO = s = v\tau,$$

ſowie in Folge ſeiner Schwere den ſenkrechten Weg:

$$OP = h = \frac{g\tau^2}{2};$$

und es wird der erſtere Weg durch den Widerſtand $\zeta \frac{c^2}{2g} F\gamma$ der Luft noch um eine Größe vermindert, welche ſich durch den Ausdruck

$$OQ = \frac{\zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G} \cdot \frac{g\tau^2}{2} = \zeta \frac{F\gamma}{2G} \cdot \frac{v^2\tau^2}{2}$$ beſtimmen läßt.

Digitized by Google

Setzt man $\zeta \frac{F\gamma}{2G} = \mu$, so hat man einfach:

$$OQ = \mu \frac{v^2\tau^2}{2}.$$

Der vierte Eckpunkt $R$ des aus $OP$ und $OQ$ construirten Parallelogrammes $OPRQ$ giebt den Ort an, wo sich der Körper am Ende der Zeit $\tau$ befindet, während $P$ der Ort ist, welchen der Körper in diesem Augenblicke einnähme, wenn der Widerstand der Luft Null wäre. Es zieht sich folglich die Bahn $AR$ des geworfenen Körpers unter der Parabel $AP$ hin, welche der Körper im luftleeren Raume durchlaufen würde.

Ebenso sind für einen in der Richtung $AT$, Fig. 872, mit der Anfangsgeschwindigkeit $v$ niedersteigenden Körper die in der Zeit $\tau$ gleichzeitig zurückgelegten Wege

$$AO = v\tau,$$

$$OP = g\frac{\tau^2}{2} \text{ und}$$

$$OQ = \mu\frac{v^2\tau^2}{2},$$

und es ergiebt sich aus denselben wieder der Ort $R$, welchen der Körper am Ende dieser Zeit einnimmt, sowie der Ort $P$, welchen er einnehmen würde, wenn die Bewegung im luftleeren Raume erfolgte. Es läuft also auch in diesem Falle die Bahn $AR$ des Körpers unter der parabolischen Bahn $AP$ hin, welche der Körper verfolgen würde, wenn die Luft kein widerstehendes Mittel wäre.

Ist der Neigungswinkel, unter welchem der Körper von $A$ aus mit der

Fig. 872.

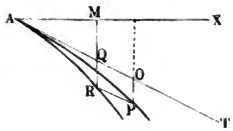
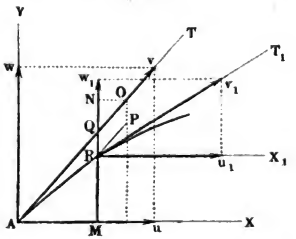



Fig. 873.




Anfangsgeschwindigkeit $v$ emporsteigt, $TAX = \alpha$, Fig. 873, sind folglich die anfänglichen Coordinaten- oder Axengeschwindigkeiten:

$$u = v\cos.\alpha$$

und

$$w = v\sin.\alpha,$$

Digitized by Google

ſo hat man nach Verlauf der kleinen Zeit $\tau$ für den Ort $R$ des bewegten Körpers die Abſciſſe:

$$AM = x = AQ\cos.\alpha = \left(v\tau - \frac{\mu v^2\tau^2}{2}\right)\cos.\alpha$$

$$= \left(1 - \frac{\mu v\tau}{2}\right) v\tau\cos.\alpha,$$

und die Ordinate:

$$MR = y = AQ\sin.\alpha - QR = \left(1 - \frac{\mu v\tau}{2}\right) v\tau\sin.\alpha - \frac{g\tau^2}{2};$$

ferner die Abſciſſengeſchwindigkeit:

$$\overline{Ru_1} = u_1 = v\cos.\alpha - \mu v^2\tau\cos.\alpha = (1 - \mu v\tau)\, v\cos.\alpha,$$

und die Ordinatengeſchwindigkeit:

$$\overline{Rw_1} = w_1 = v\sin.\alpha - \mu v^2\tau\sin.\alpha - g\tau = (1 - \mu v\tau)\, v\sin.\alpha - g\tau.$$

Aus beiden Geſchwindigkeiten folgt nun für den Neigungswinkel $T_1 R X_1 = \alpha_1$ der Bahn in $R$:

$$tang.\,\alpha_1 = \frac{w_1}{v_1} = tang.\,\alpha - \frac{g\tau}{(1 - \mu v\tau)\, v\cos.\alpha},$$

und die Curvengeſchwindigkeit:

$$\overline{Rv_1} = v_1 = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} = \sqrt{(1-\mu v\tau)^2 v^2 - 2(1-\mu v\tau) v g\tau\sin.\alpha + g^2\tau^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieſer Formeln läßt ſich der ganze Lauf der Wurflinie finden. Setzt man z. B. in die obigen Formeln für $x$ und $y$ ſtatt $\alpha$ und $v$ die durch die letzten Ausdrücke beſtimmten Werthe für $\alpha_1$ und $v_1$ ein, ſo erhält man durch dieſelben die Coordinaten $x_1$ und $y_1$ eines neuen Punktes in Beziehung auf $R$ u. ſ. w.

Beiſpiel. Eine maſſive gußeiſerne Kugel von $2r = 4$ Zoll Durchmeſſer werde unter dem Elevationswinkel $\alpha = 25$ Grad mit der Geſchwindigkeit $v = 1000$ Fuß abgeſchoſſen, man ſoll den Ort derſelben nach Verlauf von $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ Secunde u. ſ. w. angeben.

Da die Dichtigkeit der Luft $\gamma = 0{,}0859$, und die des Gußeiſens $\gamma_1 = 470$ Pfund iſt, ſo hat man:

$$\mu = \frac{F\gamma}{2G}\cdot\zeta = \frac{\pi r^2.\gamma}{^8/_3\,\pi r^3\gamma_1}\zeta = {}^3/_8\frac{\gamma}{r\gamma_1}\zeta = {}^3/_8\,.\,6\,.\,\frac{0{,}0859}{470}\zeta = 0{,}00041122\,\zeta,$$

und daher für $v = 1000$ Fuß, wo $\zeta = 0{,}9$ iſt (ſ. §. 512):

$$\mu = 0{,}0003701.$$

Nimmt man nun $\tau = 0{,}1$ Secunden an, ſo erhält man:

$$x = (1 - 0{,}0003701\,.\,1000\,.\,0{,}05)\;100\cos.25^0 = 0{,}9815\,.\,90{,}63 = 88{,}95 \text{ Fuß},$$

$$y = 0{,}9815\,.\,100\sin.25^0 - 31{,}25\cdot\frac{0{,}01}{2} = 0{,}9815\,.\,42{,}26 - 0{,}156 = 41{,}32 \text{ Fuß},$$

$$tang.\,\alpha_1 = tang.\,25^0 - \frac{31{,}25\,.\,0{,}1}{(1 - 0{,}03701)\,.\,90{,}63} = 0{,}46631 - \frac{3{,}125}{0{,}9630\,.\,90{,}63}$$

$$= 0{,}46631 - 0{,}00358 = 0{,}46273,$$

hiernach iſt der Steigwinkel ſelbſt:

$$\alpha_1 = 24^0\,50',$$

Digitized by Google

und die Curvengeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{(0{,}9630 \,.\, 1000)^2 - 2 \,.\, 0{,}9630 \,.\, 1000 \,.\, 31{,}25 \,.\, 0{,}04226 + (3{,}125)^2}$$
$$= \sqrt{927369 - 2543 + 10} = \sqrt{924836} = 961{,}68 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man von Neuem $\tau = 0{,}1$ Secunde an, so erhält man, da für $v = 962$ Fuß, $\zeta = 0{,}88$ und folglich $\mu = 0{,}88 \,.\, 0{,}00041122 = 0{,}0003619$ zu setzen ist:

$$x_1 = (1 - 0{,}0003619 \,.\, 961{,}7 \,.\, 0{,}05) \,.\, 96{,}17 \,.\, \cos. 24^0\,50'$$
$$= 0{,}9825 \,.\, 96{,}17 \,.\, 0{,}9075 = 85{,}75 \text{ Fuß},$$
$$y_1 = 0{,}9825 \,.\, 96{,}17 \,.\, \sin. 24^0\,50' - 0{,}156 = 39{,}53,$$

ferner:

$$\text{tang. } \alpha_2 = \text{tang. } 24^0\,50' - \frac{3{,}125}{0{,}9652 \,.\, 96{,}17 \,.\, \cos. 24^0\,50'}$$
$$= 0{,}46277 - 0{,}00371 = 0{,}15906,$$

hiernach:

$$\alpha_2 = 24^0\,39' \text{ und}$$
$$v_2 = \sqrt{(0{,}9652 \,.\, 961{,}7)^2 - 2 \,.\, 0{,}9652 \,.\, 961{,}7 \,.\, 31{,}25 \,.\, 0{,}04200 + (3{,}125)^2}$$
$$= \sqrt{861590 - 2347 + 10} = \sqrt{859163} = 926{,}92 \text{ Fuß}.$$

Nochmals $\tau = 0{,}1$ Secunde angenommen und $v = 927$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0{,}87$ gesetzt, folgt:

$$\mu = 0{,}87 \,.\, 0{,}00041122 = 0{,}0003578,$$

und daher:

$x_2 = (1 - 0{,}0003578 \,.\, 926{,}9 \,.\, 0{,}05) \,.\, 92{,}69 \,.\, \cos. 24^0\,39' = 0{,}9834 \,.\, 92{,}69 \,.\, 0{,}9089$
$= 82{,}85$ Fuß, sowie
$y_2 = 0{,}9834 \,.\, 92{,}69 \sin. 24^0\,39' - 0{,}156 = 37{,}86$ Fuß.

Es ist hiernach der Ort des abgeschossenen Körpers nach 0,3 Secunden in Hinsicht auf den Anfangspunkt durch die Coordinaten

$x + x_1 + x_2 = 88{,}95 + 85{,}75 + 82{,}85 = 257{,}55$ Fuß und
$y + y_1 + y_2 = 41{,}32 + 39{,}53 + 37{,}86 = 118{,}71$ Fuß bestimmt.

Ohne Luftwiderstand und ohne Schwere wäre

$x + x_1 + x_2 = c\,t \cos. \alpha = 1000 \,.\, 0{,}3 \,.\, \cos. 25^0 = 300 \,.\, 0{,}9063 = 271{,}89$ Fuß, sowie:
$y + y_1 + y_2 = c\,t \sin. \alpha = 300 \,.\, \sin. 25^0 = 300 \,.\, 0{,}4226 = 126{,}78$ Fuß,

und bloß ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft:

$x + x_1 + x_2 = 271{,}89$ Fuß, sowie

$$y + y_1 + y_2 = 126{,}78 - \frac{g\,t^2}{2} = 126{,}78 - 31{,}25 \cdot \frac{0{,}09}{2} = 126{,}78 - 1{,}41$$
$$= 125{,}37 \text{ Fuß}.$$

Digitized by Google

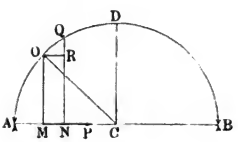
# Anhang.

## Die Theorie der Schwingungen.

(§. 1) **Schwingungstheorie.** Ein Körper hat eine schwingende Bewegung (franz. mouvement oscillatoire; engl. oscillatory motion) oder ist in Schwingung (franz. und engl. oscillation), wenn er wiederholt in gleichen Zeiten denselben Weg hin- und zurückläuft. Die Natur bietet uns außer der Bewegung eines Pendels noch viele andere Schwingungsbewegungen dar. Die vorzüglichste Ursache einer solchen Bewegung ist eine Kraft, welche den schwingenden Körper nach einem und demselben Punkte hinzieht oder hintreibt. So ist es z. B. die Schwerkraft, welche ein Pendel in schwingende Bewegung setzt. Wenn ein vorher in Ruhe befindlicher Körper ungestört der Kraft folgen kann, welche denselben nach einem gewissen Punkte hintreibt, so erfolgt die Schwingung desselben in einer geraden Linie; außerdem aber nimmt er Schwingungen in einer Curve an, wie z. B. ein Pendel, wo die Wirkung der Schwerkraft durch die Verbindung des Körpers mit einem festen Punkte fortwährend gestört wird. Ebenso erfolgen oft Schwingungen in krummen Linien, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Körpers eine andere Richtung hat als die Kraft.

Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall ist der, wenn die Kraft der Entfernung von einem gewissen Punkte $C$ proportional ist.

Fig. 874.




Es sei $A$, Fig. 874, der Anfangspunkt der Bewegung, $C$ der Sitz der Kraft, d. i. der Ort des Körpers, wo die Kraft Null ist, und $M$ der veränderliche Ort des Körpers. Bezeichnen wir nun den Abstand $CM$ durch $x$ und bedeutet $\mu$ eine constante Erfahrungszahl, so können wir die Acceleration des Körpers in $M$,

$$p = \mu x$$

Digitized by Google

setzen, und erhalten sonach für die Geschwindigkeit $v$ des Körpers (s. §. 20, III.), da $x$ um $MN = \partial x$ abnimmt, wenn der Weg $AM$ um ebensoviel wächst,

$$^1/_2 v^2 = -\int p\,\partial x = -\mu \int x\,\partial x = -\frac{\mu x^2}{2} + Con.$$

Nun ist aber in $A$, $v = 0$ und $x$ eine bestimmte Größe $CA = a$, daher hat man:

$$0 = -\frac{\mu a^2}{2} + Con., \text{ und}$$

$$v^2 = \mu\,(a^2 - x^2),$$

also die Geschwindigkeit selbst,

$$v = \sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}.$$

Kommt der Körper in $C$ an, ist also $x = 0$, so wird $v$ ein Maximum, und zwar:

$$v = c = \sqrt{\mu a^2} = a\sqrt{\mu}.$$

Jenseits von $C$ nimmt $v$ wieder allmälig ab, und ist die Entfernung $x$ von $C$, $CB = -a$, so fällt wieder $v = 0$ aus, und es kehrt nachher der Körper mit wachsender Geschwindigkeit nach $C$ zurück. Diese rückgängige Bewegung erfolgt genau nach demselben Gesetze, wie die hingehende; es ist in $C$, $v = -c$ und in $A$, $v = 0$. Auf diese Weise wiederholt sich die Bewegung ohne Ende in dem Raume $AB = 2a$, die man deshalb die doppelte Schwingungsweite (franz. amplitude des oscillations; engl. amplitude of oscillations) nennt.

Die Zeit, während welcher der schwingende Körper einen gewissen Weg (§. 2) $AM = x_1$, Fig. 875, zurücklegt, läßt sich, wie folgt, bestimmen. Wird in dem Zeitelemente $\partial t$ das Wegelement $MN = \partial x_1 = -\partial x$ zurückgelegt, so hat man nach (§. 20, I.):

$$\partial x_1 = v\,\partial t, \text{ d. i. } \partial x = -\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}\,\partial t;$$

und daher umgekehrt:

$$\partial t = -\frac{\partial x}{\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}}.$$

Beschreiben wir über $AB$ mit dem Halbmesser $CA = CB = a$ einen Kreis $ADB$, so erscheint in demselben $\sqrt{a^2 - x^2}$ als Ordinate $MO = y$, und es ist daher:

$$\partial t = -\frac{\partial x}{\sqrt{\mu}.y}.$$

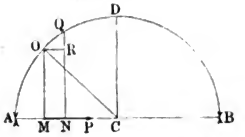
Setzen wir ferner den der Abscisse $CM = x$ entsprechenden Bogen $DO = s$, und das Element $OQ$ desselben $= -\partial s$, so giebt uns die Aehnlichkeit gewisser Dreiecke $OQR$ und $OCM$, in welchen $OR = -\partial x$,



Digitized by Google

$OQ = -\partial s$, $MO = y$ und $OC = a$ ist, die Proportion:

Fig. 875.




$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{y}{a}, \text{ daher:}$$

$$\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial s}{a}, \text{ und es folgt sonach:}$$

$$\partial t = -\frac{\partial s}{\sqrt{\mu}.a}, \text{ sowie}$$

$$t = -\int \frac{\partial s}{\sqrt{\mu}.a} = -\frac{s}{\sqrt{\mu}.a} + Con.$$

Nun ist aber für den Anfangspunkt $A$, $t = 0$ und $s$ der Quadrant $DA = {}^1/_2 \pi a$, daher hat man:

$$0 = -\frac{{}^1/_2 \pi a}{\sqrt{\mu}.a} + Con.,$$

und die Schwingungsdauer oder die Zeit, innerhalb welcher $A$ nach $M$ kommt:

$$t = \frac{{}^1/_2 \pi a}{\sqrt{\mu}.a} - \frac{s}{\sqrt{\mu}.a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{a}\right).$$

Für die halbe Schwingungsdauer, d. i. für die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach dem Ruhe- oder Mittelpunkt $C$ kommt, ist $s = 0$, daher:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

ferner die Zeit einer ganzen Schwingung oder zum Durchlaufen des Weges $AB = 2a$,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

endlich die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach $A$ zurückkehrt, ist:

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Eben so groß ist auch die Schwingungsdauer, oder die Zeit zum Durchlaufen eines Weges $2AB = 4a$, wenn dieselbe an einem anderen Orte $M$ zu zählen angefangen wird; denn die Zeit für den Weg $MB$ hin und zurück ist

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } OB}{\sqrt{\mu}.a},$$

und die für den Weg $MA$ hin und zurück:

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } OA}{\sqrt{\mu}.a};$$

folglich die Zeit für den Weg $2MB + 2MA$,

Digitized by Google

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen}\,(OB + OA)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2 \cdot \pi a}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Es hängt also die Schwingungsdauer gar nicht von der Amplitude ab. Gehen wir von dem Ruhepunkte $C$ aus, so können wir einfacher die Zeit, welche der Elongation $CM = x$ entspricht, setzen

$$t = \frac{s}{\sqrt{\mu} \cdot a},$$

oder, da $s = a\,arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right)$ ist:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right), \text{ und umgekehrt:}$$

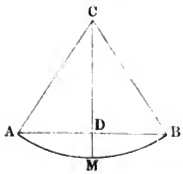
$$x = a\,sin.\,(t\sqrt{\mu}),$$

sowie:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2\,[sin.\,(t\sqrt{\mu})]^2} = \sqrt{\mu} \cdot a\sqrt{1 - [sin.\,(t\sqrt{\mu})]^2}$$
$$= \sqrt{\mu} \cdot a\,cos.\,(t\sqrt{\mu}).$$

Anmerkung. Die vorstehende Schwingungstheorie läßt sich sogar auf das Kreispendel $CM$, Fig. 876, anwenden, wenn man kleine Schwingungsbögen voraussetzt. Es ist die Beschleunigung des im Bogen $AMB$ schwingenden Punktes an der Stelle $A$:

Fig. 876.




$$p = g\,sin.\,ACD = \frac{DA}{CA} \cdot g,$$

oder da bei kleinen Elongationen $DA = MA$ gesetzt werden kann:

$$p = \frac{MA}{CA} \cdot g.$$

Bezeichnet man nun $CA$ mit $r$ und $MA$ mit $x$, so erhält man:

$$p = \frac{gx}{r},$$

und daher durch Vergleichung mit der Formel $p = \mu x$ des vorigen Paragraphen:

$$\mu = \frac{g}{r}.$$

Folglich ist die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ (vergl. §. 321).}$$

**Längenschwingungen.** Die vorzüglichste Ursache schwingender Bewe- (§. 3)
gungen ist die Elasticität der Körper. Den einfachsten Fall bietet ein Faden oder eine Stange (Draht) $OC$, Fig. 877 (a. f. S.), dar, wenn derselbe durch ein Gewicht $G$ gespannt wird. Führt man dieses Gewicht von dem Ruhepunkte $C$ in der Axenrichtung des Fadens um einen Weg $CA = a$ fort, und überläßt man es nun sich selbst, so wird es in Folge der Elasticität des



Digitized by Google

Fadens wieder bis $C$ gehoben, kommt daselbst mit einer gewissen Geschwindigkeit $c$ an, und steigt durch seine lebendige Kraft bis zu einem Punkte $B$, von wo aus es wieder zurückfällt u. s. w. In dem Ruhepunkte wird das Gewicht $G$ von der Elasticität $\frac{\lambda}{l} FE$ (s. §. 204) der Stange aufgehoben, es ist folglich hier die bewegende Kraft:

Fig. 877.

$$P = \frac{\lambda}{l} FE - G = 0, \text{ also } \frac{\lambda}{l} FE = G.$$

Ist aber das Gewicht in einem tieferen Punkte $N$, welcher um $CN = x$ von $C$ absteht, so fällt die bewegende Kraft

$$P = \frac{\lambda + x}{l} FE - G = \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE - G = \frac{FE}{l} x$$

aus, und befindet es sich in einem höheren Punkte $Q$, so ist diese Kraft:

$$P = G - \frac{\lambda - x}{l} FE = G - \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE = \frac{FE}{l} x.$$

Vernachlässigen wir die Masse der Stange, so ist folglich die Acceleration, mit welcher sich das Gewicht $G$ nach $C$ zurückbewegt:

$$p = \frac{P}{G} g = \frac{FE}{Gl} gx, \text{ und daher:}$$

$$\mu = \frac{FEg}{Gl},$$

wenn $p = \mu x$ gesetzt wird, $F$ den Querschnitt, $l$ die Länge und $E$ den Elasticitätsmodul der Stange bezeichnen. Da dieses Gesetz mit dem in den vorigen Paragraphen behandelten Fall übereinstimmt, so haben wir auch hier die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{Gl}{FEg}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Setzt man statt $F$ das Gewicht $G_1 = Fl\gamma$ der Stange und statt $E$ den Elasticitätsmodul $L = \frac{E}{\gamma}$ nach Länge (s. §. 204, Anmerk. 1) ein, so erhält man auch:

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G}{G_1 L}}.$$

Wenn man umgekehrt, die Schwingungszeit $t$ beobachtet, so kann man die Elasticitätsmodeln berechnen, indem man setzt:

Digitized by Google

$$E = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G l}{F} \text{ oder } L = \frac{\pi^2 l^2}{g t^2} \cdot \frac{G}{G_1}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Schwingung der Stange nur durch bloßes Anhängen des Gewichtes (in $B$) hervorgebracht wird; es ist hier die Amplitude zu beiden Seiten von $C$:

$$a = \lambda = \frac{G}{FE} l,$$

wogegen wir oben $a < \lambda$ angenommen haben.

Beispiel. Wenn ein Eisendraht von 20 Fuß Länge und 0,1 Zoll Dicke durch ein Gewicht $G = 100$ Pfund in Längenschwingungen versetzt wird, deren Zeitdauer $1/9$ Secunde ist, so hat man $t = 1/18''$ und den Elasticitätsmodul desselben:

$$E = 0{,}032 \,.\, \pi^2 \,.\, 18^2 \cdot \frac{100 \,.\, 20 \,.\, 4}{(0{,}1)^2 \,.\, \pi} = 0{,}032 \,.\, 8000 \,.\, 18^2 \pi$$
$$= 25600 \,.\, 324\, \pi = 26'000000 \text{ Pfund}.$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich auch anwenden, wenn das Gewicht (§. 4)
$G$ zusammendrückend auf eine steife prismatische Stange wirkt. Ebenso finden dieselben noch ihre Anwendung, wenn das an das untere Stangenende angehängte Gewicht gleich anfangs mit einer gegebenen Geschwindigkeit $v$ niedergeht. Nach dem Principe der mechanischen Arbeiten ist in diesem Falle für die Fallhöhe $h$ von $G$:

$$G h + G \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{l} FE \cdot \frac{h}{2} = \frac{FE}{2l} \cdot h^2, \text{ daher:}$$

$$h = \frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Nach Durchlaufung dieses Weges hat das Gewicht $G$ seine Geschwindigkeit verloren und steigt nun in Folge der Elasticität bis $A$ zurück, wo es wieder mit der Geschwindigkeit $v$ ankommt. Endlich aber erhebt es sich in Folge seiner lebendigen Kraft $G \frac{v^2}{2g}$, indem es die Stange comprimirt, noch um eine Höhe $h_1$, ehe es wieder zurückkehrt und eine neue Schwingung beginnt. Für diese zweite Höhe ist

$$G \frac{v^2}{2g} = G h_1 + \frac{FE}{2l} h_1^2, \text{ und daher:}$$

$$h_1 = -\frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Durch Addition von $h$ und $h_1$ erhält man nun die ganze Schwingungsamplitude:

$$2a = h + h_1 = 2\sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

Digitized by Google

und daher die einfache Elongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{G\,l}{F\,E}\right)^2 + \frac{2\,G\,l}{F\,E}\cdot\frac{c^2}{2\,g}}.$$

Da auch hier $p = \frac{F\,E}{G\,l}\,g\,x = \mu\,x$ ist, so hat man wie oben, die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,l}{F\,E}}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c$ des Gewichtes $G_1$ durch ein **niederfallendes Gewicht** $G$ erzeugt wird, so hat man es mit dem in §. 348 abgehandelten Falle (Fig. 878) zu thun. Lassen wir das Gewicht $G$ mit der Geschwindigkeit $c$ aufschlagen, und setzen wir einen unelastischen Stoß voraus, so haben wir die Anfangsgeschwindigkeit von $G + G_1$:

Fig. 878.

$$v = \frac{G\,c}{G + G_1},$$

daher die größte Schwingungselongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{(G + G_1)\,l}{F\,E}\right)^2 + \frac{2\,G^2\,l}{(G + G_1)\,F\,E}\cdot\frac{c^2}{2\,g}},$$

und die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{(G + G_1)\,l}{F\,E}}.$$

Die Elemente der Stange nehmen an den Schwingungen von $G$ oder $G + G_1$ ebenfalls Antheil, nur ist die Amplitude um so kleiner, je näher das Element dem Aufhängepunkte liegt. Für ein Element $C_1$, Fig. 877, im Abstande $O\,C_1 = x$ vom Aufhängepunkte ist die Amplitude:

$$y = \frac{x}{l}\,a;$$

wogegen die Schwingungszeit, da diese gar nicht von $y$ oder $a$ abhängt, dieselbe ist wie für $G$. Es schwingen also alle Elemente der Stange in von $C$ nach $O$ stetig abnehmenden Amplituden **isochron**.

§. 5 **Querschwingungen.** Auch die **Biegungs-** sowie die **Torsionselasticität** bietet Gelegenheiten zu solchen Schwingungen dar, wie wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben. Für eine an einem Ende $O$ festgehaltene und am anderen Ende $C$ durch ein Gewicht $G$ gespannte Stange oder Feder $O\,C$ (Fig. 879) haben wir nach §. 217 die Einbiegung:

$$H\,C = a = \frac{P\,l^3}{3\,W\,E}$$

Digitized by Google

gefunden; es folgt daher umgekehrt, die Kraft $P$, mit welcher die Stange gebogen ist,

Fig. 879.

$$P = \frac{3\,WEa}{l^3}.$$

Wird nun diese Kraft durch ein angehängtes Gewicht $G$ ersetzt, und $a$ um $CA = CB = x$ vergrößert oder verkleinert, so hat man die Kraft, mit welcher das Stangenende nach der Ruhelage durch die Elasticität der Stange zurückgetrieben wird:

$$P = \frac{3\,WE(a+x)}{l^3} - G = \frac{3\,WE(a+x)}{l^3} - \frac{3\,WE}{l^3}a = \frac{3\,WE}{l^3}x;$$

daher die Acceleration, wenn wir bloß die Masse von $G$ in Betracht ziehen:

$$p = \frac{P}{G}\,g = \frac{3\,WE}{G\,l^3}\,g\,x, \text{ und, da hiernach } p = \mu x \text{ zu setzen ist:}$$

$$\mu = \frac{3\,WE}{G\,l^3}\,g.$$

Die Proportionalität zwischen $p$ und $x$ gestattet die Anwendung der Formel in §. 2 (Anhang), weshalb nun die Schwingungszeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,l^2}{3\,WE}}$$

folgt.

Für eine an beiden Enden frei aufliegende und in der Mitte $C$ mit einem Gewichte $G$ belastete Stange $HO$, Fig. 880, ist nach §. 217:

Fig. 880.

$$a = \frac{P\,l^3}{48\,WE},$$

daher die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,l^3}{48\,WE}}.$$

Bei Berücksichtigung des Stangengewichtes $G_1$ hat man im ersten Falle, Fig. 879, statt $G$, $G + {}^1/_4\,G_1$, und im zweiten Falle, Fig. 880, statt, $G$, $G + {}^1/_2\,G_1$ einzusetzen.

Aus der beobachteten Schwingungszeit $t$, läßt sich nun der Elasticitätsmodul berechnen, und zwar für den ersten Fall, mittels der Formel

$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \left(\frac{G + {}^1/_4\,G_1}{3\,g\,W}\right) l^3,$$

oder, wenn $n = \frac{1}{t}$ die Anzahl der Doppelschwingungen pro Secunde bezeichnet,

Digitized by Google

$$E = (\pi n)^2 \left(\frac{G + {}^1/_4\, G_1}{3\, g\, W}\right) l^3.$$

Beispiel. Ein Fichtenholzstab von 1 Centimeter Breite und Höhe wurde in zwei von einander 100 Centimeter abstehenden Punkten unterstützt, und in der Mitte von dem Gewichte $G = 1{,}37$ Kilogramm, um $a = 3{,}2$ Centimeter niedergezogen. Deshalb ist hiernach der Elasticitätsmodul des Fichtenholzes:

$$E = \frac{Pl^3}{48\, Wa} = \frac{1{,}37 \,.\, 1000000}{48 \,.\, {}^1/_{12} \,.\, 3{,}2} = 107031 \text{ Kilogramm},$$

während in der Tabelle auf Seite 370, $E = 110000$ Kilogramm angegeben wird.

Ferner wurde dieser Stab an einem Ende eingeklemmt, am anderen Ende mit dem Gewichte $G = 0{,}31$ belastet und in Schwingungen versetzt, wobei die Anzahl der Schwingungen in 35 Secunden, $= 100$ ausfiel. Das Gewicht des Stabes war $G_1 = 0{,}044$ Kilogramm, folglich ist $G + {}^1/_4 G_1 = 0{,}321$ Kilogramm, und

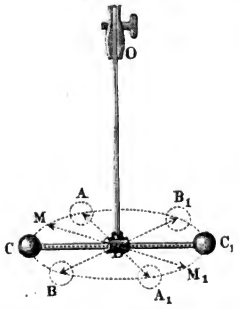
$$E = \left(\frac{n}{t}\right)^2 \cdot \left(\frac{G + {}^1/_4\, G_1}{3\, g\, W}\right) l^3 = \left(\frac{3{,}141}{0{,}35}\right)^2 \cdot \frac{321000}{981 \,.\, {}^3/_{12}}$$

$$= 80{,}57 \cdot \frac{1281000}{981} = 105260 \text{ Kilogramm},$$

also nahe gleich dem durch die Biegungsversuche gefundenen Werthe von $E$.

§. 6 **Torsionsschwingungen.** Die Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ findet endlich auch bei dem Torsionspendel (franz. balance de torsion; engl. torsion-rod), d. i. bei einem Faden oder einer Stange $DO$, Fig. 881, statt, welche vermöge ihrer Torsion um ihre eigene Axe schwingt. In der Regel versieht man dieses Pendel mit einem belasteten Querarme $CC_1$, mittels dessen die anfängliche Drehung des Fadens hervorgebracht wird, indem man diesen Arm aus der Ruhelage $CC_1$ in die Lage $AA_1$ bringt. Die Torsion dreht dann den Arm nach $CC_1$ zurück, und vermöge der Trägheit geht derselbe auch noch weiter bis $BB_1$, von wo aus er nach $CC_1$ und $AA_1$ u. s. w. zurückkehrt. Wir haben oben (§. 262) das Torsionsmoment eines prismatischen Körpers

Fig. 881.




$$Pa = \frac{\alpha\, WC}{l}$$

gefunden; und wissen hiernach, daß dasselbe umgekehrt wie die Länge $OD = l$ des Stabes und direct wie der Torsionswinkel $MDC = \alpha$ wächst; ist nun $Gk^2$ das Trägheitsmoment des Armes $CDC_1$, folglich $\frac{k^2}{a^2}\frac{G}{g}$ die auf die Armenden $C$ und $C_1$ reducirte träge Masse $M$ desselben, so folgt die Acceleration dieser Punkte:

Digitized by Google

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\alpha WC}{la} : \frac{r^2 G}{a^2 g} = \frac{\alpha a WCg}{Gk^2 l}.$$

Bezeichnen wir noch den Bogen $CM = \alpha a$, welcher der Armlänge $DA = DC = a$ und dem veränderlichen Elongationswinkel $CDM = \alpha$ entspricht, durch $x$, so erhalten wir den Ausdruck:

$$p = \frac{WCg}{Gk^2 l}\, x, \text{ und können wieder } p = \mu x \text{ setzen, also:}$$

$$\mu = \frac{WCg}{Gk^2 l} \text{ annehmen.}$$

Es ist folglich auch die Schwingungsdauer, der Schwingungsbogen $ACB = A_1 C_1 B_1$ mag groß oder klein sein:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gk^2 l}{WC}}.$$

Umgekehrt folgt

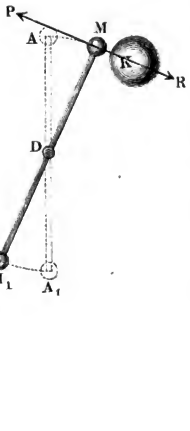
$$WC = \frac{\pi^2}{gt^2}\, Gk^2 l,$$

und daher das Torsionsmoment

$$Pa = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \alpha\, Gk^2.$$

Anmerkung. Vorstehende Formeln für die Schwingungen, welche durch die Elasticität fester Körper hervorgebracht werden, gelten natürlich nur so lange, als mit den Schwingungselongationen die Elasticitätsgrenze nicht erreicht wird. Bei allen Maschinentheilen sind die Schwingungen möglichst zu vermeiden, weil das Arbeitsquantum, welches auf dieselben verwendet wird, für die Maschinen verloren geht; deshalb sind diese Theile höchst sorgfältig mit einander zu verbinden, und es ist zumal ein sogenannter tauber Gang zu vermeiden, der zu Stößen und Schwingungen Veranlassung giebt.

Fig. 882.




**Dichtigkeit der Erde.** Die Theorie des Torsionspendels findet ihre unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der mittleren Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes $\varepsilon$ unserer Erde. Nähert man dem einen Gewichte $G$ am Armende $ADA_1$, Fig. 882, eines Torsionspendels eine schwere Kugel $K$, so rückt dasselbe in Folge der Anziehung um einen Weg $AM = x$ näher; es setzt sich in diesem neuen Orte $M$ von $G$ die Anziehungskraft $R$ von $K$ mit der Torsionskraft $P$ ins Gleichgewicht, und es läßt sich daher auch die eine durch die andere bestimmen. Lassen wir nun nach Entfernung der Kugel $K$ das Torsionspendel schwingen, so §. 7

können wir die Schwingungsdauer desselben ermitteln und hieraus die Torsionskraft berechnen. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},\ \mu = \frac{p}{x} \text{ und } p = \frac{\text{Torsionskraft}}{\text{Masse des Pendels}} = \frac{P a^2}{G k^2}\, g,$$

wenn $G k^2$ das Trägheitsmoment und $a$ die Armlänge des Pendels bezeichnen; daher hat man umgekehrt, die Torsions- oder Anziehungskraft:

$$P = \frac{G k^2 p}{g a^2} = \frac{\mu G k^2 x}{g a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 x}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 \alpha}{a},$$

und das dem Drehungswinkel $\alpha$ entsprechende Torsionsmoment:

$$P a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \alpha\, G k^2.$$

Wenn nun die Anziehungskräfte der Körper wie die Massen derselben und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen wachsen (s. §. 302, Beispiel 3), so können wir die von $K$ hervorgebrachte Anziehungskraft $P$ mit dem der Anziehungskraft der Erde entsprechenden Gewichte $Q$ des kleinen Körpers an der Torsionswage wie folgt vergleichen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K : s^2}{E : r^2},$$

wobei $s$ die Entfernung $MK$ der Mittelpunkte $r$ beider Massen $G$ und $K$ von einander, $r$ den Halbmesser der Erde und $E$ das Gewicht derselben bezeichnen. Wir erhalten nun das letztere:

$$E = \frac{K Q r^2}{P s^2},$$

und wenn wir statt $E = {}^4/_3\, \pi\, r^3 . \varepsilon \gamma$ setzen, die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$\gamma_1 = \varepsilon \gamma = \frac{3 E}{4 \pi r^3} = \frac{3 K Q r^2}{4 \pi P r^3 s^2} = \frac{3 K Q}{4 \pi P r s^2} = \frac{3 K Q}{4 \pi r s^2} \cdot \frac{g t^2 a^2}{\pi^2 G k^2 x},$$

oder, wenn wir statt $\frac{g}{\pi^2}$ die Länge $l$ des Secundenpendels (s. §. 323) einführen:

$$\gamma_1 = \varepsilon \gamma = \frac{3 K l t^2}{4 \pi r x s^2} \cdot \frac{Q a^2}{G k^2},$$

und daher das mittlere specifische Gewicht der Erde:

$$\varepsilon = \frac{3 K l t^2}{4 \pi r x s^2} \cdot \frac{Q a^2}{G k^2 \gamma}.$$

Setzt man annähernd $G k^2 = Q a^2$, so erhält man einfacher:

$$\varepsilon = {}^3/_4\, \frac{K l t^2}{\pi r x s^2 \gamma}.$$

Mittels des einfachen Torsionspendels oder der sogenannten Coulomb'schen Drehwage fand zuerst Cavendish: $\varepsilon = 5{,}48$;
oder nach Hutton's Revision: $\varepsilon = 5{,}32$;

Digitized by Google

später bei Zuhülfenahme des Gauß-Poggendorff'schen Spiegelapparates, Reich: $\varepsilon = 5{,}43$,
dagegen Baily, durch Versuche in größerem Maßstabe: $\varepsilon = 5{,}675$.

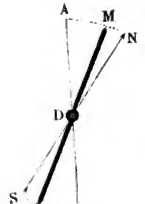
Bei Wiederholung der Versuche wurde von Reich: $\varepsilon = 5{,}583$ gefunden. (S. „Neue Versuche mit der Drehwage, Leipzig 1852.") Es ist hiernach die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes.

Anmerkung. Ueber die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde ist nachzusehen: Gehler's physikal. Wörterbuch, Bd. III.; ferner die Abhandlung von Reich „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, Freiberg 1838," und die von Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth, London 1843.

**Magnetnadel.** Die Torsionswage wird auch angewandt, um die Directionskraft oder das Drehungsmoment eines Magneten oder einer Magnetnadel (franz. aiguille aimantée; engl. magnetic-needle) zu finden. Ersetzen wir den Querarm einer solchen Wage durch eine Magnetnadel oder einen Magnetstab $MDM_1$, Fig. 883, so stellt sich derselbe so, daß seine Directionskraft von der Torsionskraft aufgehoben wird. Weicht der unmagnetische Arm in der Ruhelage $AA_1$ um den Winkel $ADN = \alpha$ vom magnetischen Meridiane $NS$ ab, und stellt sich der Magnetstab $MM_1$ so, daß seine Axe um den Winkel $MDN = \delta$ von dem Meridiane $NS$ absteht, so haben wir denjenigen Componenten $R_1$ der parallel $NS$ wirkenden Directionskraft $R$, welcher die Umdrehung der Nadel bewirkt und von der Torsionskraft aufgehoben wird: $R_1 = R\sin.\delta$.

§. 8

Fig. 883.




Die Torsionskraft $P$ ist hingegen dem Torsionswinkel $MDA = \alpha - \delta$ proportional, läßt sich daher

$$P = P_1 (\alpha - \delta)$$

setzen; man hat daher: $R\sin.\delta = P_1 (\alpha - \delta)$, und folglich:

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\sin.\delta}\right) P_1 = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1,$$

wenn die Declination oder der Ablenkungswinkel $\delta$ klein ist.

Nun läßt sich nach dem vorigen Paragraphen die Torsionskraft $P$ mittels der Formel

$$P = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Gk^2x}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Gk^2a\,(\alpha - \delta)}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Gk^2\,(\alpha - \delta)}{a}$$

ausdrücken, daher kann man aus der Schwingungsdauer $t$ u. s. w. des unmagnetischen Torsionspendels auch die Directionskraft des Magnetstabes durch die Formel

Digitized by Google

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1 = \frac{P}{\delta} = \frac{\alpha - \delta}{\delta} \cdot \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2}{a}$$

berechnen.

Das Moment dieser Kraft ist bei der Declination $MDN = \delta$ der Nadel, wenn wir annehmen, daß dieselbe ihren Sitz in dem Abstande $DM = a$ von der Drehungsaxe habe:

$$R_1 a = R a \sin. \delta \text{ annähernd, bei kleiner Declination}$$

$$= R a \delta = (\alpha - \delta) \cdot \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2.$$

Dieses Moment ($R a \sin. \delta$) ist für $\sin. \delta = 1$, d. h. wenn die Magnetnadel rechtwinkelig gegen die Magnetrichtung steht, am größten, und zwar $= R a$, und dagegen für $\delta = 0$, d. h. wenn die Axe der Magnetnadel in den magnetischen Meridian fällt, am kleinsten, nämlich $=$ Null.

§. 9 **Magnetismus.** Da die Directionskraft $R$ der Magnetnadel keinen Druck auf die Drehaxe verursacht, also die Nadel kein Bestreben zum Fortschreiten, sondern nur ein Bestreben zur Drehung hat, wenn sie außerhalb des magnetischen Meridians steht, so folgt, daß die ganze Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Magnet aus einem Kräftepaare $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ mit dem größten Momente $R a$ bestehen müsse. Da sich ferner jedes Kräftepaar $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ durch unendlich viele andere Paare $\left(\frac{R_1}{2}, -\frac{R_1}{2}\right), \left(\frac{R_2}{2}, -\frac{R_2}{2}\right)$ u. s. w ersetzen läßt, deren Momente $R a$, $R_1 a_1$, $R_2 a_2$ u. s. w. alle einander gleich sind, so folgt, daß weder $R$ noch $a$, also weder die Directionskraft noch ihr Angriffspunkt, sondern nur ihr Moment $R a$ bestimmt ist. Dieses Drehungsmoment $R a$ ist überdies noch von zwei Factoren $\mu_1$ und $S$, wovon $\mu_1$ dem Erd- und $S$ dem Stab- oder Nadelmagnetismus entspricht, abhängig, weshalb wir

$$R = \mu_1 S \text{ und } R a = \mu_1 S a$$

setzen können. Was endlich noch das Maß $\mu_1$ des Erdmagnetismus anlangt, so ist dieses bei einer horizontalschwingenden Nadel, wie wir seither angenommen haben, nur der horizontale Component der Intensität $\mu$ des ganzen Erdmagnetismus, denn der verticale Component $\mu_2$ wird durch die Unterstützung oder Aufhängung der Nadel aufgehoben. Ist $\iota$ die Inclination oder die Abweichung der magnetischen Erdaxe von dem Horizonte, so haben wir den horizontalen Componenten:

$$\mu_1 = \mu \cos. \iota,$$

dagegen den verticalen:

$$\mu_2 = \mu \sin. \iota,$$

Digitized by Google

und endlich das Drehungsmoment einer Magnetnadel:

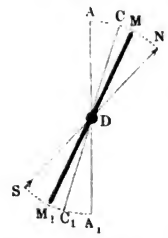
$$R\,a\,\sin.\,\delta = \mu\,\cos.\,\iota\,.\,S\,a\,\sin.\,\delta,$$

also den größten Werth desselben:

$$R\,a = \mu\,S\,a\,\cos.\,\iota.$$

**Schwingungen einer Magnetnadel.** Man kann auch das Dre- §. 10
hungsmoment einer Magnetnadel aus der Schwingungszeit derselben selbst berechnen. Bringt man die aufgehängte Magnetnadel $MDM_1$, Fig. 884, aus ihrer durch das Gleichgewicht zwischen der Torsions- und der Magnetkraft bedingten Ruhelage, so daß sie von dieser um den kleinen Winkel $MDC = \varphi$ abweicht, so nimmt entweder die magnetische Directionskraft $R$ um $R\varphi$ zu und die Torsionskraft um $P_1\varphi$ ab, oder es tritt das Umgekehrte ein, in jedem Falle erwächst also aus beiden eine Kraft:

Fig. 884.




$$(R + P_1)\,\varphi,$$

oder ein Moment:

$$(R + P_1)\,\varphi\,a = (R + P_1)\,x,$$

welches den Magneten nach der Ruhelage zurücktreibt. Ist nun $G\,k^2$ das Trägheismoment der Nadel, so haben wir folglich die Beschleunigung, welche dieser Kraft entspricht:

$$p = \frac{(R + P_1)\,a\,x}{G\,k^2}\,g,$$

und setzen wir dieselbe $= \mu\,x$, so erhalten wir:

$$\mu = \left(\frac{R + P_1}{G\,k^2}\right) a\,g,$$

sowie die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{G\,k^2}{(R + P_1)\,a\,g}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,k^2}{(R + P_1)\,a}},$$

oder, wenn $\nu$ das Verhältniß $\frac{P_1}{R} = \frac{\delta}{\alpha - \delta}$ der Torsionskraft zur magnetischen Kraft bezeichnet:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,k^2}{(1 + \nu)\,R\,a}}.$$

Hat man $t$ durch Beobachtungen gefunden, so kann man hiernach umgekehrt, das magnetische Umdrehungsmoment finden, es ist nämlich·

Digitized by Google

$$Ra = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Gk^2}{1+v}.$$

Ist die Torsionskraft klein, fällt namentlich die Ruhelage $MM_1$ nahe in den magnetischen Meridian, so kann man $v$ vernachlässigen und

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gk^2}{Ra}}, \text{ sowie}$$

$$Ra = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot Gk^2 \text{ setzen.}$$

Noch können wir statt $Ra$ den oben angegebenen Werth einführen und daher das Drehungsmoment durch die Formel

$$\mu S a \cos. \iota = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot Gk^2 \text{ ausdrücken.}$$

Für eine im magnetischen Meridiane schwingende Inclinationsnadel ist dagegen:

$$\mu S a = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot Gk^2$$

und für eine Nadel, deren Umdrehungsaxe in dem magnetischen Meridiane liegt, die sich daher selbst vertical zu stellen sucht:

$$\mu S a \sin. \iota = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot Gk^2.$$

Die Formel $\mu S a \cos. \iota = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot Gk^2$ giebt uns in $\mu S a \cos. \iota$ ein Product von vier Factoren; da sich aber die Inclination $\iota$ durch Beobachtungen an einer Magnetnadel bestimmen und sich $Sa$ auf eine bestimmte Weise nicht in seine Factoren zerlegen läßt, so bleibt nur eine Zerlegung des bekannten Productes $\mu Sa$ in die Factoren $\mu$ und $Sa$ zu vollziehen übrig. Wie sich diese Zerlegung mittels Declinationsbeobachtungen ermöglichen läßt, wird aus Folgendem hervorgehen.

§. 11 **Magnetische Anziehungsgesetze.** Die Kräfte, mit welchen sich die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen und die gleichnamigen Pole derselben abstoßen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen zu einander. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten durch die Beobachtungen an einer kleinen Magnetnadel, welche man in der Nähe eines größeren Magnetstabes schwingen läßt. Zu diesem Zwecke legt man den Magnetstab horizontal und parallel dem magnetischen Meridiane, so daß sein Nordpol gegen Nord, also sein Südpol gegen Süd gekehrt ist, und bringt eine kleine Declinationsnadel in die Verlängerung der Axe des Magnetstabes. Ist der Abstand $s$ des Stiftes dieser Nadel von dem einen Pole des

Digitized by Google

Magnetstabes viel kleiner als der Abstand von dem anderen, so kann man die Wirkung des letzteren auf die Nadel Null setzen, und annehmen, daß durch die Wirkung des näheren Poles der Coefficient $\mu_1$ der erdmagnetischen Kraft noch um einen gewissen Werth $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ vergrößert werde. Ist nun die Schwingungszeit der Nadel, $= t$, wenn der Magnetstab sich gar nicht in der Nähe derselben befindet, dagegen $= t_1$, wenn der nähere Pol dieses Stabes um $s_1$ von dem Stifte der Nadel absteht, und $= t_2$, wenn dieser Pol um $s_2$ von dem Nadelstifte absteht, so haben wir:

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot G k^2, \; (\mu_1 + \varkappa_1)\, Sa = \frac{\pi^2}{g\,t_1^2} G k^2 \text{ und } (\mu_1 + \varkappa_2) Sa = \frac{\pi^2}{g\,t_2^2} \cdot G\,k^2$$

daher folgt durch Division:

$$\frac{\mu_1 + \varkappa_1}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \text{ und } \frac{\mu_1 + \varkappa_2}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_2^2}, \text{ folglich:}$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2}\right) \mu_1 \text{ und } \varkappa_2 = \left(\frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2}\right) \mu_1, \text{ endlich:}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2} : \frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2},$$

oder, wenn statt $t$, $t_1$ und $t_2$ die Schwingungszahlen

$$n = \frac{60''}{t}, \; n_1 = \frac{60''}{t_1} \text{ und } n_2 = \frac{60''}{t_2}$$

eingeführt werden,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_1^2 - n^2 : n_2^2 - n^2.$$

Wenn nun die Wirkung des Magnetstabes auf die Nadel dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional ist, so muß auch

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = s_2^2 : s_1^2, \text{ und folglich auch}$$

$$\frac{n_1^2 - n^2}{n_2^2 - n_1} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

sein, welches durch die Beobachtungen bestätigt wird.

Die Wirkungen eines Magnetstabes $NS$ auf eine Magnetnadel $n\,s$ fallen §. 12
am einfachsten aus, wenn der Magnetstab rechtwinkelig gegen den magnetischen Meridian gelegt wird, und zwar entweder so, daß sich der Stift $d$ der Nadel $n\,s$, Fig. 885 (a. f. S.), in der Verlängerung von $NS$, oder so, daß er sich in dem durch die Mitte $C$ gehenden Perpendikel von $NS$, Fig. 886 (a. f. S.), befindet. Setzen wir vor der Hand die Kraft, welche ein Pol von $NS$ auf einen Pol von $n\,s$ in der Entfernung Eins ausübt, $= K$, so haben wir für den ersten Fall, Fig. 885, wenn $a$ die Länge $NS$ und $e$ die Entfernung $C\,d$ der Mittelpunkte $C$ und $d$ der Körper $NS$ und $n\,s$ von einander bezeichnen, die Kraft, mit welcher der Nordpol $n$ von $S$ angezogen wird,

Digitized by Google

$$P = \frac{K}{\overline{Ns}^2}, \text{ annähernd } = \frac{K}{(e - {}^1/_2\, a)^2},$$

und die Kraft, mit welcher $n$ von $N$ abgestoßen wird,

Fig. 885.

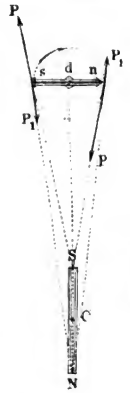
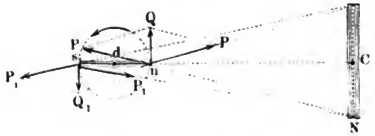



Fig. 886.




$$P_1 = \frac{K}{\overline{Ss}^2} = \frac{K}{(e + {}^1/_2\, a)^2},$$

daher die Mittelkraft aus $P$ und $P_1$:

$$Q = P - P_1 = K\left(\frac{1}{(e - {}^1/_2\, a)^2} - \frac{1}{(e + {}^1/_2\, a)^2}\right)$$

$$= \frac{(e + {}^1/_2\, a)^2 - (e - {}^1/_2\, a)^2}{(e + {}^1/_2\, a)^2\,(e - {}^1/_2\, a)^2}\, K$$

$$= \frac{2\,a\,e\,K}{(e + {}^1/_2\, a)^2\,(e - {}^1/_2\, a)^2},$$

oder, wenn $^1/_2\, a$ gegen $e$ klein ist,

$$Q = \frac{2\,a\,e\,K}{e^4} = \frac{2\,a\,K}{e^3}.$$

Ebenso ist die Mittelkraft aus der Anziehungs- und Abstoßungskraft des Südpoles $s$:

$$Q = -\frac{2\,a\,K}{e^3},$$

und daher das Moment des von diesen Mittelkräften gebildeten Kräftepaares, wenn $l$ die Entfernung der Pole der Nadel von einander bezeichnet,

$$Q\,l = \frac{2\,a\,l\,K}{e^3}.$$

Für den zweiten Fall (Fig. 886) sind hingegen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte in $s$:

$$P = \frac{K}{\overline{Ns}^2} = \frac{K}{\overline{Ss}^2}, \text{ und die in } n:$$

$$P_1 = \frac{K}{\overline{Sn}^2} = \frac{K}{\overline{Nn}^2},$$

folglich die resultirenden Mittelkräfte:

Digitized by Google

$$Q = 2 \cdot \frac{CN}{Ns} \cdot P = \frac{aP}{Ns} = \frac{aK}{\overline{Ns}^3} \text{ und } Q_1 = \frac{aK}{\overline{Nn}^3}.$$

Wenn nun $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}l$ ansehnlich kleiner sind als $e$, so können wir statt $\overline{Ns} = \overline{Ss}$ und $\overline{Nn} = \overline{Sn}$ den Mittelwerth $\overline{Nd} = \overline{Sd}$ und dafür den Näherungswerth $\overline{Cd} = e$ einführen, erhalten demnach:

$$Q = Q_1 = \frac{aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von $Q$ und $Q_1$ gebildeten Kräftepaares:

$$Ql = \frac{alK}{e^3},$$

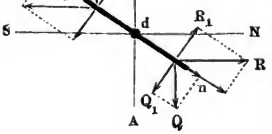
d. i. halb so groß als im vorigen Falle, was auch durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt wird.

Uebrigens ist aber die Kraft $K$ selbst noch ein Product von der Intensität $\varkappa$ des Magnetismus in $ns$ und von der Intensität $S$ in $\overline{NS}$, also $K = \varkappa S$ zu setzen, weshalb nun für den ersten Fall

$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}, \text{ und für den zweiten: } Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3} \text{ resultirt.}$$

**Bestimmung des Erdmagnetismus.** Ueberlassen wir in beiden der §. 13
vorher betrachteten Fälle die Magnetnadel $ns$ der Einwirkung des größeren Magneten, so nimmt dieselbe eine neue Stellung $ns$, Fig. 887, ein, wobei sich die Kraft $Q$, mit welcher der Magnetstab auf die Nadel einwirkt, mit der Kraft $R$, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt, ins Gleichgewicht setzt. Ist nun $\delta$ der Ablenkungswinkel $Ndn = Sds$ der Nadel von dem magnetischen Meridian, so haben wir die sich das Gleichgewicht haltenden Seitenkräfte von $Q$ und $R$:

Fig. 887.




$$Q_1 = Q \cos.\, \delta$$

und $R_1 = R \sin.\, \delta$,

folglich ist $Q \cos.\, \delta = R \sin.\, \delta$, und sonach

$$tang.\, \delta = \frac{Q}{R},$$

oder, wenn wir nach dem vorigen Paragraphen entweder

$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3} \text{ oder } Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3},$$

und nach §. 9 Anhang, $R = \mu_1 \varkappa$ setzen,



Digitized by Google

entweder $tang.\ \delta = \frac{2 \varkappa S a}{\mu_1 \varkappa e^3} = \frac{2 S a}{\mu_1 e^3}$ oder $tang.\ \delta = \frac{S a}{\mu_1 e^3}$.

Hiernach läßt sich nun umgekehrt, das Verhältniß des magnetischen Momentes des Stabes zu der Intensität des Erdmagnetismus finden, denn es ist in dem einen Falle

$\frac{S a}{\mu_1} = {}^1/_2 e^3 tang.\ \delta$ und im anderen Falle $\frac{S a}{\mu_1} = e^3 tang.\ \delta$.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetstabes giebt uns aber (nach §. 10) das Product:

$$\mu_1 S a = \frac{\pi^2}{g t^2} G k^2;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen mit einander das magnetische Moment des Stabes

entweder $S a = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{{}^1/_2\ G k^2 e^3 tang.\ \delta}$

oder $S a = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{G k^2 e^3 tang.\ \delta},$

und das Maß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus:

entweder $\mu_1 = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\frac{2 G k^2 cotang.\ \delta}{e^3}}$ oder $= \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2 cotang.\ \delta}{e^3}}$,

je nachdem man $\delta$ auf die eine oder die andere Weise beobachtet hat.

Durch Division mit dem Cosinus der Inclination ($\iota$) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus:

$$\mu = \frac{\mu_1}{cos.\ \iota}.$$

Um sich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maße $\mu$ des Erdmagnetismus zu verschaffen, muß man in der Formel

$$R a = \mu S a \text{ und } Q l = \frac{\varkappa S l a}{e^3},\ a = l = e = 1,$$

sowie auch $\varkappa = S = 1$ setzen; dann erhält man $R a = \mu$ und $Q l = 1$; es ist hiernach:

1) das Maß $\mu$ der Intensität des Erdmagnetismus dasjenige Moment, mit welchem durch den Erdmagnetismus eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetisches Moment = Eins ist; und es ist
2) das magnetische Moment einer Magnetnadel = Eins, wenn diese Nadel einer anderen ihr gleichen und mit ihr gleich starken Magnetnadel bei der zweiten, in Fig. 886 abgebildeten Stellung, in der Entfernung Eins ein Moment Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Digitized by Google

Nach Weber's Angaben ist, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $\mu = 1{,}774$ Millimetermilligramm,
in München $\mu = 1{,}905$ „ „
in Mailand $\mu = 2{,}018$ „ „

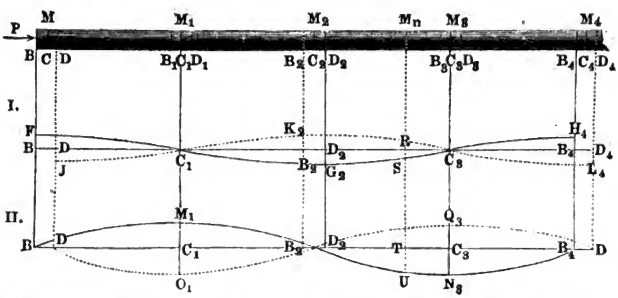
für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa sind aber diese Werthe $\sqrt{9810} = 99$mal so klein.

Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus sind außer Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen. Ferner: die Experimentalphysik von Quintus Icilius, sowie die Physik auf Grundlage der Erfahrung, von Mousson u. s. w.

**Wellen.** Wir haben bei den Längen- und Querschwingungen prismatischer Körper im Obigen (§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Masse dieser Körper Rücksicht genommen, sondern nur die Masse des den Körper spannenden Gewichtes in Betracht gezogen. Im Folgenden wollen wir hingegen von einem spannenden Gewichte ganz absehen, und voraussetzen, daß der Körper durch einen momentanen Impuls, oder durch eine nur eine kurze Zeit lang wirkende Kraft in eine schwingende Bewegung gesetzt worden sei, und daher den schwingenden Körper allein als träge Masse behandeln. Den einfachsten Fall bieten auch hier die Längenschwingungen dar; betrachten wir daher auch diese zunächst. §. 14

Wir wissen aus dem Obigen, daß sämmtliche Theile einer prismatischen Stange $BM_4$, Fig. 888, in Schwingungen versetzt werden, wenn man diese

Fig. 888.




Stange durch eine in ihrer Axenrichtung wirkende Kraft $P$ ausgedehnt oder comprimirt hat. Nicht allein das Endelement $M$, sondern auch jedes andere



Digitized by Google

Element $M_1$, $M_2$ ... der Stange schwingt dann innerhalb eines gewissen Raumes $BD$, $B_1D_1$, $B_2D_2$ ... hin und her, den man die Schwingungsamplitude nennt; auch läßt sich, wenn die Stange sehr lang ist, annehmen, daß dieser Raum bei allen Elementen einer und derselbe sei. Wenn nun auch die Zeit, innerhalb welcher ein Stangenelement eine Schwingung vollendet, an allen Stellen der Stange eine und dieselbe ist, so können wir doch nicht voraussetzen, daß sich alle diese Elemente $M$, $M_1$, $M_2$ u. s. w. gleichzeitig in derselben Bewegungsphase, z. B. gleichzeitig in der Mitte ihrer Schwingung befinden, sondern wir müssen vielmehr annehmen, daß die Mittheilung der von $M$ ausgehenden Bewegung Zeit erfordere und derselbe Bewegungszustand eines Elementes um so später eintrete, je entfernter dieses Element von der Bewegungsquelle $P$ entfernt ist. Es ist hiernach möglich, daß in dem Augenblicke, wenn $M$ einen Schwung $BD$ hin und zurück gemacht hat, das Element $M_1$ noch auf dem Rückwege begriffen, z. B. erst in $C_1$ sei, daß ferner das Element $M_2$ erst einen einfachen Schwung gemacht habe, also den Ort $D_2$ einnehme, daß das Element $M_3$ erst die Hälfte des Hinweges zurückgelegt habe, daher in $C_3$ stehe, daß endlich ein Element $M_4$ erst eine Schwingung beginne, also mit $M$ gleichzeitig schwinge. Die Geschwindigkeit, mit welcher eine und dieselbe Bewegungsphase von $M$ aus nach und nach in dem Körper fortschreitet, heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (franz. vitesse de propagation; engl. velocity of propagation) der Schwingungen des Körpers. Ferner bezeichnet man den Inbegriff aller derjenigen Elemente von $M$ bis $M_4$ des Körpers, welche sich in den sämmtlichen Bewegungsphasen einer Schwingung befinden, also zwischen zwei Elementen $M$ und $M_4$ von gleichem Bewegungszustande enthalten sind, mit dem Namen einer Welle (franz. ondulation; engl. undulation, waving) des schwingenden Körpers, und nennt den Abstand $MM_4$ selbst die Länge der Welle. Eine Welle besteht aus einem Hintertheile $BD_2$, innerhalb dessen sich die rückkehrenden Elemente, wie $M_1$, $M_2$ ... befinden, und aus einem Vordertheile $D_2B_4$, welcher die noch vorwärtsgehenden Elemente $M_3$, $M_4$ ... einschließt; man nennt auch wohl $BD_2$ den verdünnten und $D_2B_4$ den verdichteten Theil der Welle, weil alle rückkehrenden Elemente innerhalb $BD_2$ in Ausdehnung, und alle hingehenden Elemente $D_2B_4$ noch im Zusammendrücken begriffen sind.

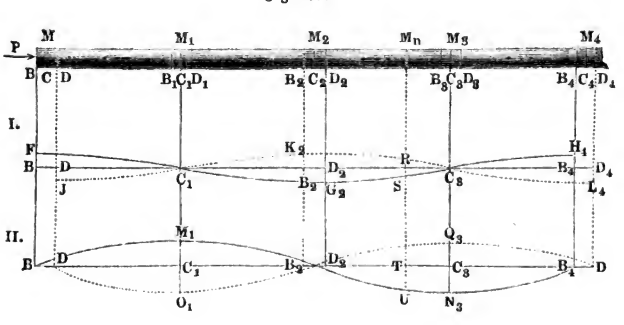
§. 15 Die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen innerhalb einer Welle lassen sich recht gut durch die Ordinaten von Schlangenlinien (I. und II.) wie $FC_1G_2C_3H_4$ und $BM_1D_2N_3B_4$ darstellen. In dem Augenblicke, wenn $M$ in $B$ eine neue Schwingung beginnt, und die größte Elongation und Null Geschwindigkeit hat, befindet sich $M_1$ in der Ruhelage, hat also die Elongation Null und die größte Geschwindigkeit; beides wird auch durch

Digitized by Google

die genannten Curven angezeigt, denn die erste oder Elongationscurve (I.) geht in $B$ um die Amplitude $BF = CB$ über die Axe $BD_4$ hin und durchschneidet in $C_1$ diese Axe, wogegen die zweite oder Geschwindigkeitscurve (II.) in $B$ durch die Axe hindurchgeht und in $C_1$ um die Maximalgeschwindigkeit $C_1M_1$ über der Axe hinläuft. In demselben Augenblicke befindet sich ferner das Element $M_2$ auf der anderen Seite im größten Abstande von seiner Ruhelage $C_2$ und es ist seine Geschwindigkeit wie bei $M$ gleich Null; auch dies ist aus beiden Curven zu ersehen, denn die eine läuft in $D_2$ um die Amplitude $D_2G_2$ unterhalb der Axe hin, und die andere schneidet die Axe daselbst, hat also die der Geschwindigkeit entsprechende Ordinate Null. Ebenso werden durch diese Curven die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen der Elemente $M_3$, $M_4$ u. s. w. angegeben. Da z. B. die erste Curve die Axe in $C_3$ schneidet und die zweite daselbst um den Maximalwerth $C_3N_3$ unter der Axe hinläuft, so wird dadurch angezeigt, daß in diesem Augenblicke das Element $M_3$ durch seine Ruhelage mit der Maximalgeschwindigkeit in positiver Richtung hindurch gehe. Will man die Bewegungsphase irgend eines anderen Elementes $M_n$ zwischen $M$, $M_2$, $M_4$ u. s. w. im Augenblicke kennen lernen, wo das erste Element $M$ eine neue Schwingung beginnt, so darf man nur von demselben ein Perpendikel auf die besprochenen Curven herablassen. Das Stück $RS$ dieses Perpendikels zwischen der ersten Curve und ihrer Axe entspricht der Elongation dieses Elementes, und das Stück $TU$ zwischen der zweiten Curve und ihrer Axe giebt die Geschwindigkeit desselben an. Da beide Ordinaten abwärts gerichtet sind, so deuten sie auch an, daß sowohl die Elongation als auch die Geschwindigkeit positiv sei, d. i. die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe.

Befände sich das Element $M$ in $D$, träte es also eine rückgängige Bewegung an, so würden sich die verschiedenen Elongationen der übrigen Elemente einer Welle durch die Ordinaten der punktirten Curve $JC_1K_2C_3L_4$,

Fig 889.



und die Geschwindigkeiten derselben durch die Ordinaten der punktirten Curve $D\,O_1\,B_2\,Q_3\,D_4$ repräsentiren lassen. Die doppelte Schwingungsdauer eines Elementes, d. i. die Zeit $t$, innerhalb welcher dasselbe den Weg $BD + DB$ zurücklegt, ist auch gleich der Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsbewegung um die ganze Länge $MM_4 = l$ einer Welle fortgepflanzt wird; ist daher $c$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so hat man die ganze Länge der Welle:

$$BB_4 = l = c.2t = 2ct.$$

Die Länge des Hintertheils der Welle ist aber

$$BD_2 = l_1 = BB_2 + B_2D_2 = ct + \lambda,$$

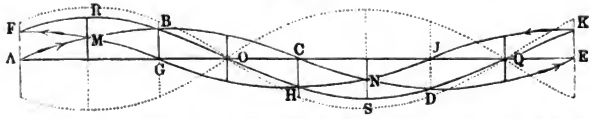
und die des Vordertheiles:

$$D_2B_4 = l_2 = D_2D_4 - B_4D_4 = ct - \lambda,$$

wo $\lambda$ die ganze Schwingungsamplitude eines Elementes bezeichnet.

Anmerkung. Mit Hülfe der Schwingungscurven lassen sich auch die Erscheinungen vor Augen führen, welche mit der Interferenz der Wellen begleitet sind. Ziehen wir nur zwei gleiche und entgegengesetzt laufende Wellenzüge in Betracht, und hiervon wieder in $\overset{\frown}{ABCDE}$ und $FGHIK$, Fig. 890, nur diejenigen

Fig. 890.




Curven, deren Ordinaten die Schwingungselongationen abschneiden. Aus den Schwingungselongationen eines zwei Wellen angehörenden Elementes entspringt eine mittlere Elongation, welche genau so gefunden wird, wie jede mittlere Bewegung aus zwei Seitenbewegungen (s. §. 28), und zwar hier durch die algebraische Addition der einfachen Elongationen. Hiernach werden in den Punkten $M$ und $N$, wo sich beide Wellencurven begegnen, die Ordinaten verdoppelt, und dagegen in den Punkten $O$ und $Q$, wo beide Curven auf entgegengesetzten Seiten von der Axe $AE$ gleichviel abstehen, die Ordinaten vernullt, und es resultirt aus beiden Wellencurven eine dritte $FRBOHSDQK$, deren Ordinaten die Elongationen aller Elemente in der Axe $AE$ angeben. Während die Wellenzüge $ABC$ und $FGH$ einander entgegenrücken, ändert sich natürlich auch die resultirende Wellencurve $FRBO$ u. s. w.; es ist indessen leicht zu ermessen, daß hierbei die Ruhepunkte $O$ und $Q$ ihren Ort nicht ändern, da hier die Ordinaten der einfachen Wellenzüge auch während der fortgesetzten Bewegung derselben gleich groß und entgegengesetzt bleiben. Diese Punkte sind die sogenannten Schwingungsknoten.

(§. 16) **Fortpflanzungsgeschwindigkeit.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen läßt sich auf folgende Weise ausmitteln. Denken wir uns den schwingenden Körper $BO$, Fig. 891, aus unendlichen Elementen, jedes vom Querschnitte $A$ und von der Länge $BC = CD = \partial x$ bestehend,

Digitized by Google

und nehmen wir an, daß der Bewegungszustand des einen Elementes $BC = A\partial x$ in einem Zeitelemente $\partial t$ vollkommen auf das folgende Element $CD = A\partial x$ übergehe, daß also die Bewegungsphasen in der Axenrichtung des Körpers mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\partial x}{\partial t}$ fortschreiten. Setzen wir voraus, daß die Elemente $BC$ und $CD$ in der Zeit $t$ von $C$ nach $N$ schwingen und dadurch in die Lagen $MN = \partial x_1$ und $NO = \partial x_2$ kommen, und bezeichnen wir die entsprechende Elongation $CN$ durch $y$. War nun die Trennungsfläche zwischen beiden Elementen vor $\partial t$ Secunden in $N_1$ und gelangt diese $\partial t$ Secunden später nach $N_2$, so haben wir die entsprechenden Wege der Elemente:

Fig. 891.

$$NN_1 = \partial y_1 \text{ und } NN_2 = \partial y_2,$$

ferner die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{\partial y_1}{\partial t} \text{ und } v_2 = \frac{\partial y_2}{\partial t},$$

und daher die Retardation:

$$p = \frac{v_1 - v_2}{\partial t} = \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2}.$$

Da $\partial t$ Secunden vor dem Zeitpunkte, wo die Elemente $BC$ und $CD$ die Stellen $MN$ und $NO$ einnahmen, $N_1$ genau in derselben Phase war wie jetzt $O$, so hat man auch $CN_1 = DO$; und da $\partial t$ Secunden nach diesem Zeitpunkte $N_2$ mit $M$ in einerlei Phase ist, so folgt auch $CN_2 = BM$. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich nun:

$N_1O = DO - DN_1 = DO - (CN_1 - CD) = CD$ und:
$MN_2 = CN_2 - CM = CN_2 - (BM - BC) = BC$, und daher:
$NN_1 = \partial y_1 = N_1O - NO = CD - NO = \partial x - \partial x_2$, sowie:
$NN_2 = \partial y_2 = MN_2 - MN = BC - MN = \partial x - \partial x_1$.

Es ist also das Wegelement $\partial y_1$ zugleich die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_2$ des Elementes $NO$, und das Wegelement $\partial y_2$ die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_1$ des Elementes $MN$. Bezeichnet nun noch $E$ den Elasticitätsmodul des schwingenden Stabes, so hat man die aus diesen Zusammendrückungen hervorgehenden Spannungen der Elemente $MN$ und $NO$:

$$S_1 = \left(\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial x}\right) AE = \frac{\partial y_2}{\partial x} \cdot AE \text{ und}$$

$$S_2 = \left(\frac{\partial x - \partial x_2}{\partial x}\right) AE = \frac{\partial y_1}{\partial x} \cdot AE.$$

Digitized by Google

Durch Subtraction dieſer beiden Spannungen von einander erhält man nun die verzögernde Kraft:

$$P = S_2 - S_1 = \left(\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x}\right) A E,$$

und iſt nun noch $\gamma$ die Dichtigkeit der Stangenelemente $BC$, $CD$, alſo $A\partial x . \gamma$ das Gewicht und $\frac{A\partial x . \gamma}{g}$ die Maſſe $M$ eines Stangenelementes, ſo hat man die Beſchleunigung deſſelben in $N_1$ auch

$$p = \frac{P}{M} = \left(\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x}\right) A E . \frac{g}{A\partial x \gamma} = \frac{g E}{\gamma} . \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2}.$$

Durch Gleichſetzen beider Werthe für $p$ erhält man nun die Gleichung

$$\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2} = \frac{g E}{\gamma} . \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2},$$

woraus

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{g E}{\gamma}, \text{ oder } c^2 = \frac{g E}{\gamma},$$

alſo die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit der Wellen (Schallgeſchwindigkeit),

$$c = \sqrt{\frac{g E}{\gamma}} = \sqrt{g L},$$

wo $L$ den Elaſticitätsmodul nach Länge bezeichnet, folgt.

Beiſpiel. Nimmt man den Elaſticitätsmodul des Tannenholzes $E = 1'800000$ Pfund und das Gewicht eines Cubikfußes deſſelben, $= 30$ Pfund an, ſo erhält man die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit deſſelben

$$c = \sqrt{\frac{144 . 1'800000}{30} . g} = \sqrt{144 . 60000 . g} = 16432 \text{ Fuß},$$

d. i. ungefähr 15 mal ſo groß als die der Luft.

Anmerkung. Dieſe Formel für die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit gilt auch für eine geſpannte Saite, und ſogar für das Waſſer und für die Luft. Iſt $p$ der Druck der Luft auf die Flächeneinheit, ſo hat man die den Verdichtungsverhältniſſen $\frac{\partial y_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial x}$ entſprechenden Spannungen nach dem Mariotte'ſchen Geſetze:

$$S_2 = \frac{p\partial x}{\partial x_2} = \frac{p\partial x}{\partial x, - \partial y_1} \text{ und } S_1 = \frac{p\partial x}{\partial x_1} = \frac{p\partial x}{\partial x - \partial y_2},$$

und daher die bewegende Kraft auf ein Element vom Querſchnitte $A$:

$$P = A(S_2 - S_1) = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2) A p \partial x}{(\partial x - \partial y_1)(\partial x - \partial y_2)},$$

oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur ein kleiner Bruch iſt, alſo $(\partial x - \partial y_1)(\partial x - \partial y_2) = \partial x^2$ geſetzt werden kann,

$$P = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2) A p}{\partial x}.$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen, wenn man statt $p$, $E$ einsetzt, vollkommen überein, es ist folglich die Schallgeschwindigkeit in der Luft:

$$c = \sqrt{g \cdot \frac{p}{\gamma}}.$$

Bei der Lehre von der Wärme wird im zweiten Bande gezeigt, daß wegen der Wärmeveränderung, welche mit der Dichtigkeitsveränderung der Luft nothwendig verbunden ist, an dieser Formel noch ein Coefficient anzubringen ist. Da die Dichtigkeit $\gamma$ der Luft ihrer Spannung $p$ proportional ist, so fällt auch $p$ aus der Formel heraus, und es bleibt nur noch die Temperatur $\tau$ in derselben zurück. Gewöhnlich nimmt man für Luft

$$c = 333\sqrt{1 + 0{,}00367 \cdot \tau} \text{ Meter} = 1061\sqrt{1 + 0{,}00367 \cdot \tau} \text{ Fuß an.}$$

Beispiel. Wenn nach der Anmerkung des §. 351, eine Wassersäule durch 14 Pfund Kraft um 0,000050 ihres Volumens zusammengedrückt wird, und hiernach der Elasticitätsmodul dieser Flüssigkeit

$$E = \frac{14}{0{,}00005} = 280000 \text{ Pfund}$$

zu setzen ist, so hat man hiernach die Schallgeschwindigkeit im Wasser:

$$c = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{280000 \cdot 144}{66}} = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{6720000}{11}} = 4369 \text{ Fuß,}$$

also ungefähr 4,3mal so groß als die Schallgeschwindigkeit in der Luft setzen.

**Schwingungszeit.** Wir können nun auch die Zeit einer Schwingung finden, indem wir zunächst die Gleichung suchen, welche die Abhängigkeit der Schwingungselongation von der Zeit und von der die Ruhelage des schwingenden Elementes bestimmenden Abscisse $x$ ausdrückt. Sicherlich ist $y$ sowohl eine Function von $t$ als auch eine solche von $x$, es läßt sich folglich $y = \varphi(t)$ und auch $y = \psi(x)$ setzen. (§. 17)

Aus der ersten dieser beiden Functionen folgt durch Differenziiren die variable Schwingungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t),$$

und ebenso die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t),$$

wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ andere Functionen von $t$ ausdrücken (vergl. §. 19).

Die zweite Function giebt das Spannungsverhältniß

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1(x), \text{ also die Spannung}$$

$$S = AE \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = A\,E.\,\psi_1(x),$$

daher die bewegende Kraft des Massenelementes $\partial M = A\,\partial x \cdot \frac{\gamma}{g}$,

Digitized by Google

$$dS = AE \cdot \frac{\partial\,[\psi_1(x)]}{\partial x} = \frac{AE\psi_2(x)}{\partial x},$$

und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{gE}{\gamma}\,\psi_2(x);$$

wobei natürlich $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ andere Functionen von $x$ anzeigen.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für $p$ einander gleich, so erhalten wir folgende Endgleichung:

$$\varphi_2(t) = \frac{gE}{\gamma} \cdot \psi_2(x), \text{ oder, da } \frac{gE}{\gamma} = c^2 \text{ ist,}$$

$$\varphi_2(t) = c^2 \cdot \psi_2(x).$$

Dieser Differenzialgleichung wird durch folgende Integralgleichung:

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x),$$

wo $F$ und $f$ unbestimmte Functionen von den in den Parentheses enthaltenen Größen bezeichnen, entsprochen, denn es ist

$$\varphi_1(t) = \frac{\partial\,[\varphi(t)]}{\partial t} = cF_1(ct + x) + cf_1(ct - x),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\partial\,[\varphi_1(t)]}{\partial t} = c^2F_2(ct + x) + c^2f_2(ct - x)$$

$$= c^2\,[F_2(ct + x) + f_2(ct - x)],$$

ferner:

$$\psi_1(x) = \frac{\partial\,[\psi(x)]}{\partial x} = F_1(ct + x) - f_1(ct - x) \text{ und}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\partial\,[\psi_1(x)]}{\partial x} = F_2(ct + x) + f_2(ct - x),$$

also wirklich:

$\varphi_2(t) = c^2 \cdot \psi_2(x)$.

Obgleich die Function

$$y = F(ct + x) + f(ct - x)$$

eine unbestimmte ist, so läßt sie sich doch, wenn man noch nähere Bestimmungen des schwingenden Körpers giebt, dazu benutzen, um die Schwingungszeit des schwingenden Körpers zu finden. Wie dies in einigen Fällen möglich ist, wird aus Folgendem erhellen.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln $\partial y = v\,\partial t$ und $\partial x = c\,\partial t$, $\partial t$ eliminirt, so erhält man den Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{c}$, oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Verdichtung $\sigma$ des schwingenden Elementes ausdrückt, $\sigma = \frac{v}{c}$; es ist also die Verdichtung an

Digitized by Google

jeder Stelle des schwingenden Stabes in einem und demselben Augenblicke der Schwingungsgeschwindigkeit dieser Stelle proportional.

**Bestimmung der Elasticitätsmodul.** Nehmen wir zunächst an (§. 18) der schwingende Körper habe die Länge $l$ und sei an beiden Enden festgeklemmt. In diesem Falle ist sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$, $y = 0$, folglich:

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F(ct + l) + f(ct - l) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $f = -F$, und bringen wir diese Beziehung in der zweiten Gleichung an, so erhält man:

$f(ct + l) - f(ct - l) = 0$, d. i. $f(ct + l) = f(ct - l)$,

oder, wenn man $ct - l = ct_1$ setzt,

$$f(ct_1 + 2l) = f(ct_1).$$

Es nimmt also die Function $f$ stets denselben Werth wieder an, wenn $ct_1$ um $2l$, also die Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ größer wird, und es ist folglich auch

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

die Zeit eines Doppelschwunges.

Setzen wir zweitens voraus, daß der schwingende Körper an beiden Enden frei sei, so haben wir für $x = 0$ und $x = l$, $S$, und also auch $\psi_1(x)$, $= 0$, daher:

$$F_1(ct) - f_1(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0.$$

Hiernach ist:

$f_1 = F_1$ und $f_1(ct + l) = f_1(ct - l)$, oder $f_1(ct_1 + 2l) = f_1(ct_1)$, und folglich wieder die Schwingungsdauer:

$$t_1 = \frac{2l}{c}.$$

Ist ferner der Körper an einem Ende frei und an dem anderen fest, so hat man für $x = 0$, $y = 0$, und für $x = l$, $S = 0$, daher:

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0,$$

es folgt nun $f = -F$, sowie auch $f_1 = -F_1$, und daher:

$f_1(ct + l) + f_1(ct - l) = 0$, oder $f_1(ct_1) + 2l = -f_1(ct_1)$.

Hiernach nimmt also der Körper nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ stets den umgekehrten Bewegungszustand an, und es ist folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine Schwingung vollendet. Man hat also hier die Schwingungsdauer:

Digitized by Google

$$t_2 = \frac{4\,l}{c} = 4\,l\sqrt{\frac{\gamma}{g\,E}},$$

also doppelt so groß als in den beiden ersten Fällen.

Mittels der gefundenen Formeln kann man aus der beobachteten Schwingungszeit $t$, oder vielmehr aus der Anzahl $n$ der Längenschwingungen, welche ein prismatischer Körper in einer gewissen Zeit macht, den Elasticitätsmodul $E = \left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 \cdot \frac{\gamma}{g}$, und die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in demselben, $c = \frac{2\,l}{t}$ berechnen.

Beispiel. Ein ganz an beiden Enden eingeklemmter Eisendraht von 60 Zoll Länge wurde durch Reibung nach seiner Arenrichtung in Longitudinalschwingungen versetzt, deren 1589 auf eine Secunde gingen. Wie groß ist hiernach der Elasticitätsmodul und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Drahteisens? Nach einer der obigen Formeln hat man den Elasticitätsmodul nach Länge oder Höhe

$$L = \frac{1}{g}\left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 = \frac{1}{g}\,(2\,n\,l)^2 = \frac{(1589\,.\,120)^2}{31{,}25\,.\,12} = 96'950000 \text{ Zoll},$$

und wenn nun ein Cubikzoll dieses Eisens 0,2733 Pfund wiegt, der Elasticitätsmodul nach Gewicht:

$E = 96'950000\,.\,0{,}2733 = 26'500000$ Pfund (vergl. Tabelle §. 212).

Die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit ist:

$$c = \sqrt{g\,L} = \sqrt{31{,}25\,.\,96950000\,.\,{}^1/_{12}} = \sqrt{31{,}25\,.\,8'080000} = 15890 \text{ Fuß},$$

oder, die Schallgeschwindigkeit $c_1 = 1060$ Fuß der Luft als Einheit angenommen:

$$c = \frac{15890}{1060} = 15.$$

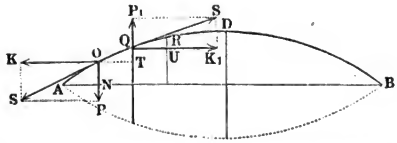
Anmerkung. Sind die schwingenden Säulen sehr lang, so hängt die Schwingungszeit von der Wellenlänge oder, nach Befinden, von dem Abstand $l$ zwischen zwei Schwingungsknoten ab; es ist dann aber stets $t_1 = \frac{2\,l}{c}$. Diese Zeit bestimmt auch die Höhe des mit den Schwingungen verbundenen Tones; je größer oder kleiner $t_1$ ist, desto tiefer oder höher fällt auch der Ton aus. Die Stärke des Schalles hingegen wächst und nimmt ab mit den Schwingungselongationen. Bei den sphärischen Wellen, in welchen sich der Schall in der Luft und im Wasser ausbreitet, bleibt $c$ und $t$ unverändert, und es nimmt nur die Schwingungselongation, also die Stärke des Schalles allmälig ab.

(§. 19) **Querschwingungen einer Saite.** Die Querschwingungen der Saiten und elastischen Stäbe lassen sich auf ähnliche Weise ausmitteln, wie die Longitudinalschwingungen. Die gespannten Saiten (franz. cordes; engl. strings) bieten den einfacheren Fall dar, daher sei auch von diesen zunächst die Rede. Es sei $ADB$, Fig. 892, irgend eine Position der schwingenden Saite, $A$ der eine, $B$ der andere Festpunkt, $l = AB$ ihre Länge, $G$ ihr Gewicht und $S$ ihre als constant anzusehende Spannung. Fassen wir einen den Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ entsprechenden

Digitized by Google

Punkt $O$ der Saite ins Auge, zerlegen wir dessen Spannkraft $S$ parallel zu $AB$ und rechtwinkelig gegen $AB$ in die Seitenkräfte $K$ und $P$, so können

Fig. 892.




wir die letztere als die bewegende Kraft an einem Ende $O$ des Elementes $OQ$ ansehen. Läßt man den Bogen $AO = s$ um das Element $OQ = \partial s$, und eben dadurch auch die Ordinate $y$ um ein Element $QT = \partial y$ wachsen, so erhalten wir in $P$, $S$, $\partial y$ und $\partial s$ die gleichliegenden Seitenpaare von zwei ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken $OPS$ und $QTO$, und es ist:

$$\frac{P}{S} = \frac{QT}{OQ} = \frac{\partial y}{\partial s}; \text{ also } P = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot S.$$

Auf dasselbe Element $OQ$ wirkt aber auch noch eine aus der Zerlegung der Gegenspannung hervorgehende Kraft $P_1 = \frac{RU}{QR} \cdot S = \frac{\partial y_1}{\partial s} S$ in entgegengesetzter Richtung, daher bleibt die bewegende, das Element $OQ$ nach der Axe $AB$ zurückführende Kraft:

$$P - P_1 = \left(\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s}\right) S$$

übrig.

Die Masse $M$ des Elementes ist zwar der Länge $OQ = \partial s$ desselben proportional, setzen wir indessen nur kleine Schwingungselongationen $y$ voraus, so können wir auch dieselbe dem Elemente $OT = QU = \partial x$ der Abscisse proportional wachsend annehmen, also $M = \frac{\partial x}{l} \cdot \frac{G}{g}$ setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun die Acceleration, mit welcher das Element $OQ$ sich der Ruhelage in $AB$ nähert:

$$p = \frac{P - P_1}{M} = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s . \partial x} \cdot \frac{g\,Sl}{G},$$

oder $\partial s = \partial x$ gesetzt,

$$p = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{g\,Sl}{G}.$$

Nun ist $y$ irgend eine Function von $x$, z. B. $\psi(x)$, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine andere Function $\psi_1(x)$ und $\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \frac{\partial [\psi_1(x)]}{\partial x}$ eine dritte Function $\psi_2(x)$ von dieser Größe, sowie

Digitized by Google

$$p = \psi_2(x) \cdot \frac{g\,Sl}{G}.$$

Da aber auch $y$ eine Function der Zeit $t$, also etwa $y = \varphi(t)$ ist, so hat man ebenso die Geschwindigkeit, mit welcher $OQ$ zur Ruhelage zurückkehrt:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t), \text{ und die entsprechende Acceleration:}$$

$$p = \frac{\partial\,\varphi_1(t)}{\partial t} = \varphi_2(t).$$

Wenn man nun beide Ausdrücke für $p$ einander gleich setzt, so erhält man ganz wie im Anhang §. 17, die Differenzialgleichung:

$$\varphi_2(t) = \psi_2(x) \cdot \frac{g\,Sl}{G} = c^2\,\psi_2(x),$$

und es läßt sich daher auch wie dort

$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x)$ sowie
$v = c\,[F_1(ct + x) + f_1(ct - x)]$ setzen.

Da auch hier für $x = 0$ und $x = l$, $y$ und $v = 0$ sind, so haben wir wieder $f_1 = -F_1$ und $f_1(ct+l) = f(ct-l)$, oder $f(ct_1 + 2l) = f(ct_1)$; es ist daher die Zeit einer ganzen Schwingung:

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{G}{g\,Sl}}, \text{ oder, wenn man } G = Al\gamma \text{ setzt,}$$

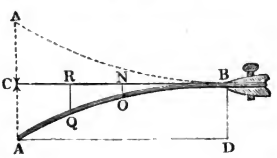
$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{A\gamma}{g\,S}}.$$

Es wächst also die Schwingungsdauer einer Saite direct wie die Länge $l$, wie die Quadratwurzel aus dem Gewichte $A\gamma$ der Längeneinheit und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung $S$ der Saite.

Beispiel. Da der halben Schwingungszeit der nächste Octaventon entspricht, so wird nach dieser Regel eine Saite die Octave zu dem anfänglichen Grundton geben, wenn man sie bis zur Hälfte abkürzt, oder in ihrer Mitte unterstützt, oder wenn man sie viermal so stark spannt, oder wenn man sie bei gleicher Spannung durch eine Saite ersetzt, von der die laufende Längeneinheit viermal so leicht ist als bei der ersten Saite.

(§. 20) **Querschwingungen eines Stabes.** Die Bestimmung der Schwingungsdauer eines elastischen Stabes $AB$ (franz. lame; engl. spring), Fig. 893, welcher an einem Ende $B$ festgehalten wird, läßt sich auf folgendem, allerdings etwas umständlichem Wege finden. Nach §. 216 ist, wenn $r$ den Krümmungshalbmesser des Stabes an einer durch die Coordi-

Fig. 893.




Digitized by Google

naten $CN = x_1$ und $NO = y_1$ bestimmten Stelle $O$ bezeichnet, das Biegungsmoment des Bogens $AO = s_1$:

$$M = \frac{WE}{r}.$$

Setzen wir nun die Kraft, mit welcher sich ein den Coordinaten $CR = x$ und $RQ = y$ entsprechendes Element $Q$ der Axe oder Ruhelage $CB$ nähert, $= P\partial x$, also dessen Moment:

$$= \overline{NR}.P\partial x = (x_1 - x)\,P\partial x, \text{ so haben wir:}$$

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1}(x_1 - x)\,P\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{x_1}(x_1 - x)\,P\partial x = \int_0^{x_1} P x_1 \partial x - \int_0^{x_1} Px\partial x$$

$$= x_1\int_0^{x_1} P\partial x - \int_0^{x_1} Px\partial x,$$

oder wenn man $\int_0^{x_1} P\partial x = P_1$ und hiernach

$$\int_0^{x_1} Px\partial x = \int_0^{x_1} P\partial x.x = P_1x_1 - \int_0^{x_1} P_1\partial x \text{ setzt,}$$

$$\int_0^{x_1}(x_1 - x)\,P\partial x = \int_0^{x_1} P_1\partial x, \text{ daher hat man auch}$$

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} P_1\partial x.$$

Ferner ist $r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\partial(tang.\,\alpha)}$ (s. Art. 33 der analytischen Hülfslehren), oder, da bei einer kleinen Biegung $\partial s = \partial x$ gesetzt werden kann,

$$r = -\frac{\partial x}{\partial(tang.\,\alpha)}; \text{ daher folgt:}$$

$$-WE\frac{\partial(tang.\,\alpha)}{\partial x} = \int_0^{x_1} P_1\partial x,$$

und durch Differenziiren:

$$-WE.\partial\left(\frac{\partial(tang.\,\alpha)}{\partial x}\right) = P_1\partial x.$$

Setzt man nun $y = \psi(x)$, ferner

$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1(x)$, $\frac{\partial(tang.\,\alpha)}{\partial x} = \psi_2(x)$ und $\partial\left(\frac{\partial(tang.\,\alpha)}{\partial x^2}\right) = \psi_3(x)$,

so erhält man die einfache Gleichung:

$$P_1 = -WE.\psi_3(x),$$

woraus durch nochmaliges Differenziiren

$\partial P_1 = -WE\partial\psi_3(x)$, d. i. $P\partial x = -WE\partial\psi_3(x)$ oder

$$P = -WE\frac{\partial\psi_3(x)}{\partial x} = -WE\psi_4(x) \text{ folgt.}$$

Digitized by Google

Damit der Stab symmetrisch schwinge, können wir nun noch annehmen, daß $P$ proportional mit $y$ wachse, also $P = -Ky$ sei; und hiernach erhalten wir:

$$WE\psi_4(x) = Ky, \text{ oder } \psi_4(x) = \frac{K}{WE} \cdot y = k^4 y,$$

wenn wir $\frac{K}{WE}$ mit $k^4$ bezeichnen.

Dieser Differenzialgleichung $\psi_4(x) = k^4 y$ entspricht die Gleichung:

$$y = \psi(x) = A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx},$$

denn wenn man diese successiv differenziirt, so erhält man:

$$\psi_1(x) = k\,[-A\sin.(kx) + B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}],$$
$$\psi_2(x) = k^2[-A\cos.(kx) - B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}],$$
$$\psi_3(x) = k^3[A\sin.(kx) - B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}] \text{ und}$$
$$\psi_4(x) = k^4\,[A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{kx}],$$

also wirklich:

$$\psi_4(x) = k^4 y.$$

(§. 21) Die Schwingungszeit $t$ des elastischen Stabes finden wir wieder wie oben, wenn wir $p = \varphi_2(t) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ setzen. Nun ist aber die Kraft eines Elementes:

$$= P\partial x = -Ky\partial x = -WEk^4 y\,\partial x,$$

und bei dem Querschnitt $F$ und der Dichtigkeit $\gamma$ die Masse desselben:

$$= F\partial x\,\frac{\gamma}{g}, \text{ daher folgt die Gleichung:}$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{gWEk^4}{F\gamma} \cdot y = -\mu^2 y,$$

wenn wir den Ausdruck

$$\frac{gWEk^4}{F\gamma} \text{ durch } \mu^2 \text{ bezeichnen.}$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht schon die einfache Formel

$$y = \varphi(t) = \sin.(\mu t + \tau),$$

wo $\tau$ eine beliebige Anfangszeit ausdrückt, denn es ist

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t) = \mu\,.\cos.(\mu t + \tau) \text{ und}$$

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t) = -\mu^2 \sin.(\mu t + \tau), \text{ d. i.}$$

$$\varphi_2(t) = -\mu^2 y.$$

Nehmen wir nun in der Gleichung $y = \sin.(\mu t + \tau)$, $\tau = 0$, so bekommen wir $y = \sin.(\mu t)$, daher für $\mu t = 0, \pi, 2\pi$ u. s. w., $y = 0$; und es ist folglich

Digitized by Google

$$t_1 = \frac{\pi}{\mu} \text{ die halbe, und}$$

$$t = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{k^2}\sqrt{\frac{F\gamma}{gWE}} \text{ die ganze Schwingungsdauer.}$$

Um hiernach die Zeit einer Schwingung berechnen zu können, muß nicht allein die Größe $k$, sondern auch das Verhältniß $\frac{F}{W}$ bekannt sein.

Ist der Stab cylindrisch und der Halbmesser desselben, $= r$, so hat man

$$\frac{F}{W} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi r^4} = \frac{4}{r^2} \text{ (s. §. 231),}$$

und ist er parallelepipedisch, seine Breite $b$ und Höhe $h$, so fällt

$$\frac{F}{W} = \frac{bh}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{12}{h^2} \text{ aus (s. §. 226).}$$

Hiernach folgt für die erste Stabform:

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}.$$

und für den Stab von der zweiten Form:

$$t = \frac{4\pi}{hk^2}\sqrt{\frac{3\gamma}{gE}}.$$

Die Größe $k$ wird aus der Gleichung:

$$y = A\,cos.(kx) + B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}$$

auf folgende Weise gefunden.

Setzen wir in diese Formel die zusammengehörigen Werthe $x = l$ und $y = 0$, so erhalten wir:

1) $0 = A\,cos.(kl) + B\,sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl}$.

Thun wir ferner dasselbe auch in der Gleichung

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial s} = \psi_1(x), \text{ so erhalten wir:}$$

2) $0 = -A\,sin.(kl) + B\,cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl}$.

Da ferner das Biegungsmoment am Ende $A$ des Stabes $=$ Null, und folglich der Krümmungshalbmesser $r = \infty$, also $\psi_2(x) = 0$ und ebenso $\psi_3(x) = 0$ ist, so folgt:

$0 = -A\,cos.0 - B\,sin.0 + Ce^0 + De^{-0}$, d. i. $-A + C + D = 0$,

und

$0 = A\,sin.0 - B\,cos.0 + Ce^0 - De^{-0}$, d. i. $-B + C - D = 0$,

daher

3) $A = C + D$ und

4) $B = C - D$.

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen, $A$ und $B$, so erhält man:

$$(C + D)\,cos.(kl) + (C - D)\,sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl} = 0,$$

und



Digitized by Google

$-(C+D)\,sin.(kl) + (C-D)\,cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl} = 0;$
hieraus folgt durch Addition:

$$C\,cos.(kl) - D\,sin.(kl) + Ce^{kl} = 0,$$

und durch Subtraction:

$$D\,cos.(kl) + C\,sin.(kl) + De^{-kl} - 0, \text{ oder:}$$
$$C\,[cos.(kl) + e^{kl}] = D\,sin.(kl) \text{ und}$$
$$D\,[cos.(kl) + e^{-kl}] = -C\,sin.(kl);$$

daher durch Division:

$$-\frac{cos.(kl) + e^{kl}}{sin.(kl)} = \frac{sin.(kl)}{cos.(kl) + e^{-kl}}, \text{ endlich}$$
$$2 + cos.(kl)\,(e^{kl} + e^{-kl}) = 0, \text{ oder}$$
$$cos.(kl) = -\frac{2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Von den verschiedenen Werthen, entsprechend den verschiedenen Tönen, welche der Stab je nach der Anzahl seiner Schwingungsknoten geben kann, ist der kleinste $kl = 1{,}87501$, wogegen die größeren nahe

$$k = \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2} \text{ u. s. w.}$$

ausfallen. Kommt es darauf an, aus der beobachteten Schwingungsdauer $t$ den Elasticitätsmodul $E$ zu finden, so hat man in der Regel nur den kleinsten Werth in Betracht zu ziehen, es ist daher

$$l = \frac{1{,}8751}{l} \text{ und } k^2 = \frac{3{,}516}{l^2},$$

folglich für einen cylindrischen Stab:

$$E = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{rk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\,rt}\right)^2 = 12{,}774\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{l^4}{r^2t^2},$$

und für einen parallelepipedischen:

$$E = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi}{hk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\,ht}\right)^2 = 4{,}2579\cdot\frac{\gamma}{g}\,\frac{l^4}{h^2t^2}.$$

Anmerkung 1. Vergleicht man die Formeln

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \text{ und } t_1 = 2l_1\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

für die Quer- und Längenschwingungen eines und desselben Stabes mit einander, so erhält man die Proportion:

$$t : t_1 = \frac{l^2}{r} : \frac{3{,}516}{2\pi}l_1, \text{ d. i. } t : t_1 = \frac{l^2}{r} : 0{,}5596\,l_1.$$

Wertheim hat für Gußstahl und Messing dieses Verhältniß durch Versuche bestätigt gefunden.

Anmerkung 2. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe handelt ausführlich Seebeck in einer Abhandlung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1849, sowie in dem Programme der technischen Bildungsanstalt in Dresden vom Jahre 1846. Wertheim's Untersuchungen über die Elasticität der Metalle und des Holzes mittels Längen- und Querschwingungen werden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1845, ziemlich ausführlich abgehandelt.

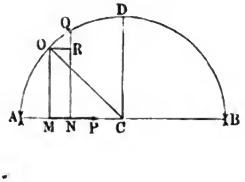
Digitized by Google

Anmerkung 3. Die Schwingungsdauer, oder vielmehr die Anzahl der Schwingungen eines Stabes in einer gewissen Zeit läßt sich wegen ihrer Kürze in der Regel nicht unmittelbar beobachten, sondern man muß sich hierbei besonderer Hülfsmittel bedienen. Man benutzt hierzu, entweder nach Chladni, Savart u. s. w., die Höhe des von den Schwingungen erzeugten Tones, oder man wendet das zuerst von Duhamel angegebene Verfahren an, welches darin besteht, daß man von dem schwingenden Stab mittels eines feinen Häkchens auf eine ganz gleichförmig umlaufende und mit Kienruß überzogene Glastafel eine Wellenlinie aufreißen läßt. Zur Erzielung einer möglichst gleichförmigen Umdrehungsbewegung kann man sich eines chronometrischen Apparates bedienen, welcher mit einem Windfange, ähnlich wie ein Bratenwender oder das Schlagwerk einer Thurmuhr, ausgerüstet ist, und von Morin in der Abhandlung „Description des appareils dynamometriques etc., Paris 1838“ sowie in dessen Notions fondamentales de mécanique beschrieben wird. Wertheim fand die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit dadurch, daß er mit dem zu untersuchenden Stabe noch einen anderen Körper, z. B. eine Stimmgabel, schwingen ließ, dessen Schwingungszahl bekannt war. Wenn man nun von beiden Körpern Wellencurven in die Rußschicht der rotirenden Glastafel einkratzen läßt und die Wellen derselben zählt, welche einem und demselben Centriwinkel entsprechen, so erhält man in dem Verhältnisse dieser Zahlen auch das Verhältniß der Schwingungszahlen. Was die Longitudinalschwingungen anlangt, so sind diese in der Regel auch mit kleinen Querschwingungen verbunden, weshalb hier die Stäbe zweifache Wellenlinien beschreiben, und die Anzahl der Längenschwingungen mit der der Querschwingungen leicht verglichen werden kann, wenn man die kleinen Wellen innerhalb einer Welle der großen Wellencurve auszählt.

**Schwingungshindernisse.** Zu den Kräften, welche die Schwingungen eines Körpers erzeugen, gesellen sich noch gewisse Bewegungshindernisse, deren Einfluß wir nun noch kennen lernen müssen. Ist ein solches Hinderniß constant, wie z. B. die Reibung an der Drehaxe eines Pendels oder an dem Stifte einer Magnetnadel, so hat dasselbe auf die Schwingungsdauer gar keinen Einfluß, sondern es wird nur durch dasselbe die Schwingungsweite bei jedem Ausschlag um eine gewisse Größe kleiner. Wir haben oben in §. 1 (Anhang) in dem Falle, wenn die bewegende Kraft der Entfernung $x$ vom Ruhe- oder Mittelpunkte $C$ der Bewegung $AB$, Fig. 894, proportional ist, §. 22

$$p = \mu x = \mu(a - x_1),$$

Fig. 894.




wo $x_1$ den durchlaufenen Weg $AM$ bezeichnet, gesetzt. Bei Berücksichtigung der Verminderung $k$ des Weges durch die Reibung haben wir dagegen für das Durchlaufen der ersten Weghälfte $AC$:

$$p = \mu(a - k - x_1),$$

und für das der zweiten Weghälfte $CB$:



Digitized by Google

$$p = -\mu[x_1 - (a + k)]$$

zu schreiben; es besteht also der Einfluß der Reibung $k$ nur darin, daß durch sie bei der einen Weghälfte, $a$ in $a - k$ und bei der andern, $a$ in $a + k$, also der ganze Schwingungsweg $2a$, in $2a - 2k$ umgeändert, d. i. die Schwingungsweite bei jedem Ausschlage um eine constante Größe $2k$ abgekürzt wird. Da endlich in der Formel

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$$

die Schwingungsweite gar nicht vorkommt, so kann folglich auch $k$ keinen Einfluß auf dieselbe ausüben.

Anders ist es dagegen mit dem Widerstande der Luft. Dieser wächst bei kleinen Geschwindigkeiten, wie sie bei Pendelbewegungen vorkommen, mehr nach der einfachen Geschwindigkeit als nach dem Quadrate derselben, wie besonders aus Bessel's Untersuchungen (über die Länge des einfachen Pendels, Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin, 1826) hervorgeht, und sich auch dadurch erklären läßt, daß dieses Hinderniß vorzüglich aus der mit der Geschwindigkeit $v$ des schwingenden Körpers wachsenden Verdichtung und Verdünnung der Luft vor und hinter demselben (s. §. 510, sowie den Anhang §. 17, Anmerkung) erwächst. Dies vorausgesetzt, können wir die Acceleration des schwingenden Körpers, wenn wir denselben im Auswärtsschwingen begriffen annehmen, und seinen Weg vom Ruhepunkte aus messen,

$p = -(\mu x + \nu v)$ oder $p + \nu v + \mu x = 0$ annehmen.

Setzen wir nun

$$x = f(t), \quad v = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(t) \text{ und } p = \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(t),$$

so können wir auch $f_2(t) + \nu f_1(t) + \mu f(t) = 0$ schreiben, und diesem Ausdruck durch die Integralgleichung

$$x = \left[b \cos.(\psi t \sqrt{\mu}) + b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu})\right] e^{-\frac{\nu t}{2}},$$

wo $b$ und $b_1$ noch zu bestimmende Constanten sind und $\psi = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}$ ist, entsprechen. Nun ist aber für $t = 0$, auch $x = 0$, daher $b = 0$ und einfacher

$$x = b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu}) e^{-\frac{\nu t}{2}}.$$

Da dieser Werth für $\psi t \sqrt{\mu} = \pi$ wieder Null wird, so ist folglich die Zeit einer einfachen Schwingung

$$t = \frac{\pi}{\psi \sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu + \frac{\nu^2}{4}}}, \text{ d. i. } \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}}$$

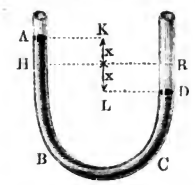
mal so groß, als wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre.

Digitized by Google

Anmerkung. Es ist leicht zu erklären, weshalb die in Schwingungen versetzten Körper nach und nach immer kleinere und kleinere Schwingungen machen und zuletzt in Ruhe übergehen. Die Ursache dieser Erscheinung ist zwar zunächst der Widerstand der Luft, dann aber auch noch die Unvollkommenheit der Elasticität der schwingenden Körper, vermöge welcher sich die Körper, namentlich innerhalb kurzer Zeiten den auf sie wirkenden Kräften nicht vollkommen proportional ausdehnen und zusammendrücken.

**Schwingungen des Wassers.** Den einfachsten Fall der Wellenbewegung des Wassers bieten die Schwingungen desselben in zwei communicirenden Röhren $ABCD$, Fig. 895, dar. Nehmen wir zunächst an, daß dieselben von gleichem Querschnitte $A$ seien, und denken wir uns das Wasser in dem einen Schenkel um $HA = x$ über dem der Ruhelage entsprechenden Niveau $HR$ gehoben, und im anderen um $RD = x$ gesunken. Wir haben dann die bewegende Kraft §. 23

Fig. 895.




$$P = A.2x\gamma,$$

ferner, wenn $l$ die ganze Länge $ABCD = HBCR$ der Wassermasse bezeichnet, die bewegte Masse $M = \frac{Al\gamma}{g}$, und daher die Beschleunigung, mit welcher der eine Wasserspiegel sinkt und der andere steigt:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{2Ax\gamma}{Al\gamma}\, g = \frac{2gx}{l}.$$

Da diese Formel ganz dem im Anhange §. 1 und 2 abgehandelten Schwingungsgesetze $p = \mu x$ entspricht, so haben wir auch hier die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Da ferner beim einfachen Kreispendel von der Länge $\frac{l}{2}$, ebenfalls

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

ist, so schwingt also das Wasser in den communicirenden Röhren von gleicher Weite mit diesem Pendel isochron.

Sind die beiden Schenkel der Röhre $ABCD$, Fig. 896 (a. f. S.), gegen den Horizont geneigt, bildet z. B. die Axe des einen den Winkel $\alpha$, und die des anderen den Winkel $\beta$ mit dem Horizonte, so entspricht dem Wege $AH = DR = x$, welchen der Wasserspiegel in dem einen Schenkel auf- und in dem anderen abwärts gemacht hat, der Niveauabstand:

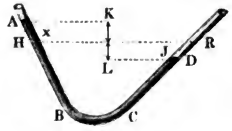
Digitized by Google

$$z = x \sin.\alpha + x \sin.\beta = x\,(\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

daher ist die Kraft:

$$P = A\gamma x\,(\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

Fig. 896.




ferner die Acceleration:

$$p = \frac{g\,(\sin.\alpha + \sin.\beta)\,.\,x}{l},$$

und die Schwingungsdauer:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g\,(\sin.\alpha + \sin.\beta)}}.$$

Sind endlich die Röhren von ungleicher Weite, so fällt die Bestimmung der Schwingungsdauer bedeutend complicirter aus. Es sei $A$ der Querschnitt und $l$ die Länge der Mittelröhre, ferner $\alpha_1$, $A_1$ und $l_1$ Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der einen, sowie $\alpha_2$, $A_2$ und $l_2$ Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der anderen Seitenröhre; denken wir uns endlich das Wasser in der Axe des einen Schenkels um $x_1$ gestiegen und im anderen um $x_2$ gesunken. Wir haben zunächst

$$A_1 x_1 = A_2 x_2, \text{ daher } x_2 = \frac{A_1}{A_2}\, x_1,$$

und die bewegende Kraft, auf $A_1$ reducirt:

$$P = A_1\,(x_1 \sin.\alpha_1 + x_2 \sin.\alpha_2)\,\gamma = \frac{A_1\gamma}{A_2}\,(A_2 \sin.\alpha_1 + A_1 \sin.\alpha_2)\,x_1.$$

Die Wassermasse in der Zwischenröhre ist constant, und zwar $= \frac{A\,l\,\gamma}{g}$, und da ihre Geschwindigkeit in dem Verhältnisse $\frac{A_1}{A}$ zu der der Kraft steht, dieselbe auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 . A\,l\,\gamma.$$

Die Wassermasse im ersten Schenkel ist:

$$= \frac{A_1\,(l_1 + x_1)\,\gamma}{g}, \text{ und die im zweiten}$$

$$= \frac{A_2\,(l_2 - x_2)\,\gamma}{g},$$

oder auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{A_2\,(l_2 - x_2)\,\gamma}{g}.$$

Endlich folgt die von $l'$ zu bewegende Masse:

Digitized by Google

$$M = A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + x_1}{A_1} + \frac{l_2 - x_2}{A_2}\right)$$
$$= A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{x_1}{A_1} - \frac{A_1 x_1}{A_2^2}\right)$$
$$= \frac{A_1^2 \gamma}{g}\left[\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1\right],$$

und die Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\left(\frac{sin.\alpha_1}{A_1} + \frac{sin.\alpha_2}{A_2}\right) g x_1}{\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1}.$$

Wären die beiden Seitenröhren von gleichem Querschnitte, so hätte man $A_1 = A_2$, daher:

$$p = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + l_2}{A_1}\right) A_1} = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\frac{A_1 l}{A} + l_1 + l_2},$$

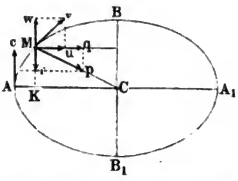
und die Schwingungszeit:

$$t = \pi \sqrt{\frac{A_1 l + A (l_1 + l_2)}{g A (sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2)}}.$$

Anmerkung. Durch die Reibung und durch den Krümmungswiderstand erleiden natürlich diese Formeln noch einige Modificationen (vergl. Anhang, §. 22).

**Elliptische Schwingungen.** Wenn der Körper $M$, welcher durch eine Kraft $P$ nach einem festen Punkte $C$, Fig. 897, mit einer Acceleration $p = \mu z = \mu . \overline{CM}$ hingetrieben wird, eine Anfangsgeschwindigkeit $c$ hat, deren Richtung von der Kraftrichtung abweicht, so erfolgen seine Schwingungen nicht mehr in der geraden Linie, sondern in einer Ellipse, wie aus Folgendem hervorgehen wird. Es sei in dem Anfangspunkte $A$ der Bewegung die Bewegungsrichtung rechtwinkelig auf dem Abstande $CA = a$ und die entsprechende Geschwindigkeit $= c$. Legen wir die Coordinatenaxen durch $C$, und zwar die eine auf die andere rechtwinkelig gegen $CA$. Bezeichnen wir nun die Coordinaten $CK$ und $KM$ durch $x$ und $y$, so haben wir die mit den Axen parallel gehenden Componenten $q$ und $r$ von $p = \mu z$, da $\frac{q}{p} = \frac{x}{z}$ und $\frac{r}{p} = \frac{y}{z}$ ist:

Fig. 897.




$$q = \mu x \quad \text{und} \quad r = \mu y.$$

Digitized by Google

Sind nun $u$ und $v$ die ebenfalls den Axen parallel gerichteten Componenten der Geschwindigkeit $w$ des Körpers $M$, so haben wir nach §. 1, Anhang:

$$u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)};$$

zugleich

$$c^2 - v^2 = 2\int v\,\partial v = 2\mu\int y\,\partial y = \mu y^2, \text{ und daher } v = \sqrt{c^2 - \mu y^2}.$$

Wenn für $y = b$, $v = 0$ ist, so folgt:

$0 = c^2 - \mu b^2$, daher $c = b\sqrt{\mu}$ und $v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)}$.

Nun ist aber $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ und $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, daher folgt auch:

$$\frac{u}{v} = \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}}, \text{ oder } \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\partial y}{\sqrt{b^2 - b^2}}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{\partial\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

und daher (nach Art. 26, V. der analytischen Hülfslehren):

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + Con.,$$

oder, da für $x = a$, $y = 0$ ist,

$$arc.\left(sin. = \frac{a}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{0}{b}\right) + Con., \text{ oder}$$

$$arc.\,(sin. = 1) = arc.\,(sin. = 0) + Con., \text{ d. i. } \frac{\pi}{2} = Con., \text{ und}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) - arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn aber die Differenz zweier Bögen $= \frac{\pi}{2}$ beträgt, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des anderen, d. i.

$$\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \text{ oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Da dies die Gleichung einer Ellipse ist, so folgt auch, daß der Punkt, welcher mit der Acceleration $\mu x$ nach $C$ getrieben oder gezogen wird, in einer Ellipse von den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ um $C$ läuft.

Auch folgt nun:

$$\partial t = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial y}{\sqrt{\mu(b^2 - y^2)}}, \text{ daher die Zeit:}$$

Digitized by Google

$$t = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right), \text{ ferner umgekehrt:}$$

$$y = b\ sin.\ (t\sqrt{\mu}), \text{ sowie } x = a\ cos.(t\sqrt{\mu}),$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines elliptiſchen Quadranten, wenn man $y = b$ ſetzt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\ arc.\left(sin. = \frac{b}{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\ arc.(sin. = 1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

alſo die Zeit zum Durchlaufen der halben Ellipſe:

$$2t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

und die Zeit einer ganzen Umdrehung oder Schwingung:

$$4t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}};$$

alſo genau ſo groß, als wenn die Bewegung eine geradlinig wiederkehrende wäre. Noch folgt:

$$u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)} = \sqrt{\mu}\,(a^2 - a^2[cos.(t\sqrt{\mu})]^2) = \mu\, a\ sin.\ (t\sqrt{\mu})$$

und

$$v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)} = \mu\, b\ cos.(t\sqrt{\mu}),$$

und daher die Umdrehungsgeſchwindigkeit:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \mu\sqrt{(a\ sin.\ t\sqrt{\mu})^2 + (b\ cos.\ t\sqrt{\mu})^2}.$$

Endlich kann man noch

$$x = \frac{a+b}{2}\ cos.\ (t\sqrt{\mu}) + \frac{a-b}{2}\ cos.\ (t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$y = \frac{a+b}{2}\ sin.\ (t\sqrt{\mu}) - \frac{a-b}{2}\ sin.\ (t\sqrt{\mu})$$

ſetzen, und da nun die erſten Glieder

$$\frac{a+b}{2}\ cos.\ (t\sqrt{\mu}) \text{ und } \frac{a+b}{2}\ sin.\ (t\sqrt{\mu})$$

einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreiſe vom Halbmeſſer $\frac{a+b}{2}$, und die beiden anderen Glieder einer entgegengeſetzten gleichförmigen in einem Kreiſe vom Halbmeſſer $\frac{a-b}{2}$ entſprechen, ſo kann man auch annehmen, daß die elliptiſche Bewegung des Punktes aus zwei kreisförmigen Bewegungen zuſammengeſetzt ſei, daß nämlich der Punkt gleichförmig in

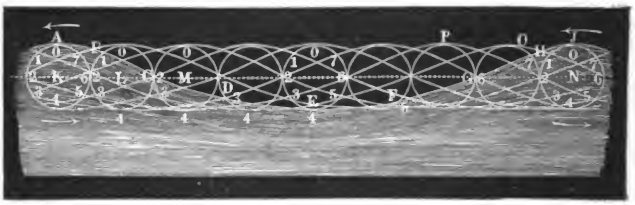
Digitized by Google

einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ umlaufe, während sich das Centrum dieses Kreises gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ fortbewegt.

Ist $b = 0$, so erfolgt zwar die Schwingung in einer geraden Linie, allein man kann sich auch denken, daß diese Schwingung aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt sei.

§. 25 **Wasserwellen.** Die elliptischen Schwingungsbewegungen finden sich den genauen Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge bei den Bewegungen der Wasserwellen (franz. ondes; engl. waves) vor. Nicht allein jedes Wassertheilchen in der Oberfläche, sondern auch jedes Wassertheilchen unter derselben beschreibt während der Wellenbewegung des Wassers eine Ellipse. Wegen des Widerstandes am Boden sind jedoch die Ellipsen unter dem Wasser kleiner als die an der Oberfläche, und nehmen überhaupt mit dem Abstande von der Oberfläche ab. Die verschiedenen Elemente im Wasserspiegel, sowie in jeder anderen Fläche parallel zu demselben, befinden sich in demselben Augenblicke in den verschiedensten Bewegungsphasen; während ein Element $A$, Fig. 898, seine Bahn in (0) beginnt, ist ein Element $B$

Fig. 898.



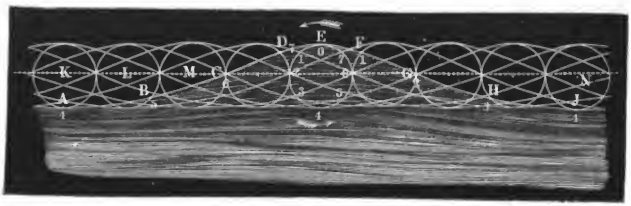

schon in (1), ein anderes $C$ in (2), ein drittes $D$ in (3), ein viertes $E$ in (4) u. s. w.; es bildet also in diesem Augenblicke der verticale Durchschnitt der Oberfläche des Wassers eine cykloiden- oder trochoidenförmige Curve $ABCDEFGHJ$. Vor dem Eintritte der Wellenbewegung waren die Elemente in den Mittelpunkten $K, L \ldots N$ ihrer Bahnen und bildeten den horizontalen Wasserspiegel $KN$, während der Wellenbewegung hingegen befinden sie sich zum Theil über, zum Theil unter dieser Ebene, und haben natürlich stets ein Bestreben, nach ihren Ruhepunkten $K, L \ldots N$ zurückzukehren. Die elliptischen Schwingungen finden jedoch nur so lange statt, als die Wellen unverändert bleiben; nimmt aber die Größe derselben allmälig ab, so wird auch die Bahn eines Elementes nach und nach eine engere und engere, und bildet daher keine Ellipse mehr, sondern eine Spirallinie. Umge-

Digitized by Google

kehrt bildet sich sicherlich bei der Entstehung und dem Wachsen der Wellen die elliptische Bahn erst allmälig aus einer Spirallinie heraus.

Nach einem Zeittheilchen ist $A$ in seiner Bahn nach (1), $B$ nach (2), $C$ nach (3) u. s. w. gerückt, und dadurch die Welle um den Horizontalabstand $KL$ zwischen je zwei Elementen fortgeschoben worden; nach Verlauf eines zweiten Zeittheilchens befindet sich ferner $A$ in (2), $B$ in (3), $C$ in (4), und es ist die Welle wieder um den Abstand $KL = LM$ fortgerückt; und so bewegt sich bei dem ferneren Umlaufe der Wasserelemente die Welle immer weiter und weiter fort, bis sie am Ende einer vollständigen Umdrehung eines Elementes in seiner Bahn ihre eigene Länge $KN$ durchlaufen hat. Nach einer halben Umdrehung eines Wasserelementes ist wie Fig. 899 zeigt,

Fig. 899.




an die Stelle eines Wellenberges ein Wellenthal und an die des letzteren ein Wellenberg gekommen. Dieses Fortschreiten der Welle besteht natürlich in keiner besonderen Bewegung des Wassers, sondern nur in einem Fortrücken einer und derselben Bewegungsphase, z. B. in dem Fortrücken des Wellengipfels $J$ (Fig. 898) nach $O$, $P$ u. s. w. Kennt man die Umlaufszeit $t$ eines Wasserelementes und die Länge $AJ = s$ einer Welle, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben durch die Formel $c = \frac{s}{t}$ berechnen.

Die Höhe einer Welle, oder die Summe von der Höhe eines Wellenberges und der Tiefe eines Wellenthales ist der verticalen Axe $2b$ der Ellipse gleich, in welcher die Wasserelemente an der Oberfläche umlaufen; die Länge $CG$ des Wellenthales übertrifft die halbe Wellenlänge um die horizontale Axe $2a$ jener Ellipse, und die des Wellenberges ist natürlich um so viel kürzer als die halbe Länge der ganzen Welle. Hiernach wäre der Querschnitt eines Wellenthales größer als der eines Wellenberges; da dies aber wegen der Unveränderlichkeit des Wasservolumens nicht möglich ist, so müssen die Mittelpunkte der elliptischen Bahnen noch etwas über dem Niveau des ruhigen Wasserspiegels stehen.

Digitized by Google

§. 26 **Weber's Versuche.** Nach Weber's Versuchen ist die Bahn, in welcher sich jedes Wasserelement an der Oberfläche einer Welle bewegt, eine wenig gedrückte Ellipse, nach Emy sollen hingegen bei den Meereswellen die Wasserelemente aufrechtstehende Ellipsen durchlaufen. Mit der Tiefe der Elemente unter der Oberfläche nehmen beide Axen ihrer elliptischen Bahnen ab, jedoch, besonders nach Weber, die verticalen Axen mehr als die horizontalen Axen. Nach der Tiefe zu scheint ein Fortschreiten der Wellen nicht statt zu finden: senkrecht unter einander befindliche Wasserelemente befinden sich, den Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge, gleichzeitig in einer und derselben Bewegungsphase, wogegen die in einer horizontalen Linie liegenden Elemente eine stetige Folge der Bewegungsphasen bilden. Aus den erwähnten Beobachtungen geht ferner noch hervor, daß die Umlaufszeit eines Elementes, oder die Zeit, innerhalb welcher eine Welle um ihre eigene Länge fortschreitet, vorzüglich von dem Verhältnisse der beiden Bahnaxen abhängt; je größer das Verhältniß der horizontalen Axe $2a$ zur verticalen Axe $2b$ der Bahn ist, desto größer ist auch die Umlaufszeit. Die tiefer liegenden Wassertheile durchlaufen ferner ihre Bahnen in kürzerer Zeit, als die in der Oberfläche, woraus wieder gefolgert werden muß, daß auch die Wellenlängen nach dem Boden zu abnehmen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ einer Welle hängt, da die Umlaufszeit $t$ mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ wächst, nicht allein von der Länge $s$, sondern auch von der Höhe $b$ ab. Wenn eine Welle zwischen parallelen Wänden, z. B. in einem Canale fortschreitet, so bleibt ihre Breite unverändert; es nimmt aber ihre Höhe $b$ allmälig ab und ihre Länge allmälig so zu, daß in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur diejenige Veränderung eintritt, welche aus der Reibung des Wassers an den Wänden resultirt. Wenn hingegen eine Welle auf keiner Seite in ihrem Fortschreiten gehindert wird, und dieselbe einen in sich selbst zurücklaufenden Wall bildet, so vergrößert sich ihre Länge und Breite zugleich, und zwar auf Unkosten ihrer Höhe, und sie wird allmälig so flach, daß sie in kurzer Zeit von dem Auge nicht mehr wahrgenommen werden kann. Ist eine solche Welle anfangs nicht kreisförmig, so nähert sie sich wenigstens der Kreisgestalt immer mehr und mehr, je weiter sie fortschreitet. Nach den Weber'schen Versuchen soll die Höhe in arithmetischer Progression abnehmen, wenn die Welle in geometrischer Progression fortschreitet. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer solchen Welle nimmt allmälig ab, je weiter dieselbe fortschreitet. Wenn umgekehrt eine Welle von außen nach innen fortschreitet, und sich dabei immer mehr und mehr zusammenzieht, so nimmt dieselbe an Höhe und Länge, sowie auch an Geschwindigkeit, allmälig zu.

Digitized by Google

Es findet hiernach ein großer Unterschied zwischen den Wasserwellen und den Schallwellen statt. Während bei diesen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt, ist dieselbe bei jenen Wellen nur eine Function der Wellenhöhe und Wellenlänge. Wenn die Wellenbewegung des Wassers durch eine fast momentan wirkende Kraft, z. B. durch Eintauchen und schnelles Herausziehen eines festen Körpers aus dem Wasser, veranlaßt wird, so beschreiben die Wasserelemente immer kleiner und kleiner werdende elliptische Bahnen, oder vielmehr im Ganzen sich immer mehr und mehr zusammenziehende Spirallinien, und es fallen hierbei auch die Umdrehungszeiten immer kleiner und kleiner aus. Diesem Bewegungsverhältnisse ist die Entstehung einer ganzen Reihe immer kleiner und kleiner ausfallender Wellen beizumessen. Bei dem weiteren Fortschreiten werden die folgenden Wellen von den vorhergehenden immer mehr und mehr verstärkt, während die vorderste Welle sich in kurzer Zeit so sehr verflacht, daß sie von dem Auge nicht mehr wahrgenommen wird. Dieses Zusammenfließen der Wellen verursacht die Entstehung kleiner Wellensysteme, welche besonders auf den Vorderflächen der Hauptwellen zahnförmig auftreten. Diese kleineren Wellen oder Zähne schreiten, nach Poisson und Cauchy, gleichförmig beschleunigt fort.

**Hagen's Versuche.** Nach den neuesten Forschungen des Herrn Geh. Ober- §. 27
baurath's Hagen (s. den Seeufer- und Hafenbau von G. Hagen, 1. Band, Berlin 1863, welcher den 3. Theil des Handbuches der Wasserbaukunst von demselben Verfasser bildet, sowie auch dessen Abhandlungen über Wellen auf Gewässern von gleichmäßiger Tiefe, Berlin 1862) beschreiben die Wassertheile bei Wellen über einem sehr tiefen Grunde, mit constanter Winkelgeschwindigkeit, Kreise, deren Durchmesser nach unten zu allmälig abnehmen, so daß sie am Boden unendlich klein ausfallen. Ein Wasserfaden, welcher in der Ruhelage senkrecht steht, wird folglich hiernach bei der Wellenbewegung, ähnlich wie ein Getreidestengel beim Winde, um diese Verticale so hin- und herschwingen, daß dabei der Fußpunkt unverändert bleibt. Die Wellenlinie, oder die Curve, welche die in gleicher Umdrehungsphase befindlichen, in der Ruhelage eine horizontale Linie bildenden Punkte verbindet, ist deshalb eine gestreckte Cycloide, deren Streckung mit der Tiefe so abnimmt, daß sie nahe über dem festen Boden eine gerade Linie bildet, während sie an der Oberfläche einer gemeinen Cycloide am nächsten kommt. Aus dem Halbmesser $r$ der gemeinen Cycloide, dessen Größe sich bei hohen Meereswellen auf 50 Fuß steigert, folgt die Wellenlänge $l = 2\pi r$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben:

$$c = \sqrt{2gr} = \sqrt{\frac{gl}{\pi}},$$

die Periode einer Welle:

Digitized by Google

$$t = \frac{l}{c} = \pi\sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}},$$

und die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Wassertheile in ihren von oben nach unten allmälig abnehmenden Kreisbahnen bewegen, $\omega = \frac{c}{r}$.

Der Mittelpunkt des Kreises, in welchem ein tieferes Wassertheilchen umläuft, bestimmt sich aus dem Halbmesser $z$ dieses Kreises durch den Abstand $y$ desselben von dem Mittelpunkt des ersten Kreises vom Halbmesser $r$, mittels der Formel

$$y = r\,Ln.\left(\frac{r}{z}\right).$$

Umgekehrt ist $z = re^{-\frac{y}{r}}$, wo $e = 2{,}71828\ldots$, die Grundzahl des natürlichen Potenzensystemes bezeichnet. Man kann hiernach leicht ermessen, daß die Schwingungskreise mit der Tiefe außerordentlich schnell abnehmen, z. B. für $r = 10$ Fuß, ist in der Tiefe $y = 50$ Fuß, $z = 10.e^{-0,2} = 3{,}50$ Fuß und in der Tiefe $y = 200$ Fuß, fällt $z = 10.e^{-0,05} = 0{,}15$ Fuß aus.

Bei Wellen von geringer constanter Tiefe sind dagegen, wie auch schon Scott Russell angegeben hat, die horizontalen Bewegungen der übereinander befindlichen Wassertheile gleich groß; es behält daher der anfangs verticale Wasserfaden bei der Wellenbewegung seine verticale Stellung, verändert dagegen hierbei seine Länge und Dicke. Die einzelnen Wassertheilchen beschreiben hier geschlossene Curven von gleichem horizontalen, und von einem veränderlichen mit der Tiefe allmälig abnehmenden verticalen Durchmesser; dieselben sind jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die Wellenhöhe gegen die Wassertiefe unendlich klein ist, Ellipsen.

Bei endlicher Tiefe des Wassers und großer Wellenhöhe sind die Gesetze der Wellenbewegung sehr complicirt.

§. 28 **Interferenz der Wasserwellen.** Wenn sich zwei Wasserwellen durchkreuzen, so treten im Allgemeinen dieselben Erscheinungen ein, wie bei den Luft- und anderen Wellen; es setzt auch hier jede Welle nach dem Zusammentreffen ihre Bewegung fort, als wenn es gar nicht stattgefunden hätte; nur findet, nach Weber's Beobachtungen, ein kleiner Zeitverlust statt, so daß eine Welle ein wenig mehr Zeit braucht, einen gewissen Weg zu durchlaufen, wenn sie durch eine andere Welle hindurchgeht, als wenn sie frei fortschreitet. Kommen zwei Wellenberge zusammen, so entsteht ein fast doppelt so hoher Berg, und ebenso geben zwei Wellenthäler bei ihrem Zusammentreffen ein fast doppelt so tiefes Thal, als bei einer einfachen Welle. Die Weber'schen Versuche führen auf das Verhältniß 1 : 1,79 zwischen den Berghöhen der einfachen und der

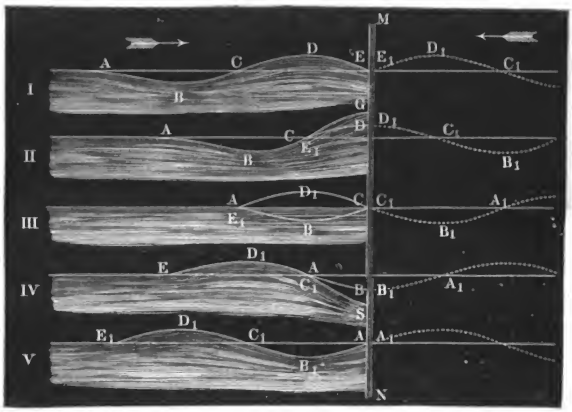
Digitized by Google

Doppelwelle. Bei der Interferenz oder dem Zusammenkommen eines Wellenberges mit einem Wellenthale heben sich beide gegenseitig auf und es bleibt die betreffende Stelle im Niveau des ruhigen Wasserspiegels. Was die Bahnen der einzelnen Wasserelemente anlangt, so gehen diese bei dem Zusammentreffen von zwei gleichen Wellen in gerade Linien über, die im Berggipfel senkrecht, entfernt von demselben, aber schief, jedoch so stehen, daß sie sich oben gegen den Gipfel neigen.

Wenn ferner eine Wasserwelle gegen eine feste Wand anstößt, so wird sie von derselben so zurückgeworfen, als wenn sie von einem Orte herkäme, der eben so weit hinter der Wand absteht, als der Ausgangspunkt der Welle vor derselben, und es geht die zurückgeworfene Welle ebenso durch die ankommende hindurch wie zwei sich kreuzende Wellen überhaupt.

In Fig. 900, I., II. bis V. sind die Erscheinungen, welche sich beim

Fig. 900.

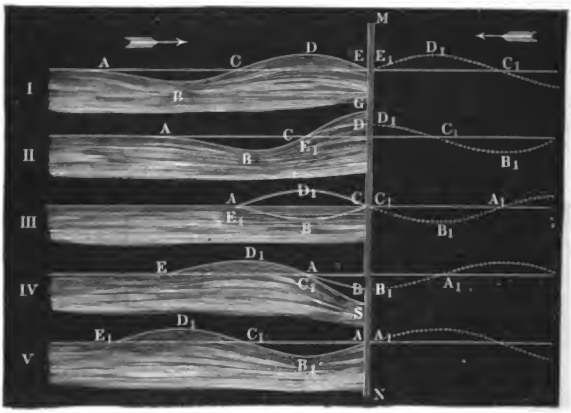



Zurückwerfen einer Welle $A\,B\,C\,D\,E$ durch eine feste Wand $M\,N$ darbieten, vor Augen geführt. In I. kommt eben der Wellenberg $C\,D\,E$ an der Wand $M\,N$ an, und es beginnt das Reflectiren in Form einer umgekehrt laufenden Welle $C_1\,D_1\,E_1$; in II. ist der Gipfel $D$ des Wellenberges an der Wand angekommen, und es hat sich mit demselben die Hälfte $D_1\,E_1$ des zurückgeworfenen Wellenberges vereinigt, folglich entsteht ein halber Wellenberg $C\,G$ von fast doppelter Höhe. In III. erreicht eben erst das Wellenthal $A\,B\,C$ die feste Wand, während der zurückgeworfene Wellenberg $C_1\,D_1\,E_1$ über denselben hinweggeht; es tritt daher eine Interferenz ein, wobei die Welle einen Augenblick lang ganz verschwindet. In IV. trifft die Thalsohle

Digitized by Google

$B$ der ankommenden Welle mit der Thalsohle $B_1$ der zurückgeworfenen Welle an der Wand zusammen, es bildet sich folglich ein halbes Thal $A\,S$ von der doppelten Tiefe. In V. ist endlich die ankommende Welle $A\,B\,C\,D\,E$ vollständig durch die Wand $M\,N$ zurückgeworfen, und dadurch in die umgekehrt laufende Welle $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ verwandelt worden.

Fig. 901.



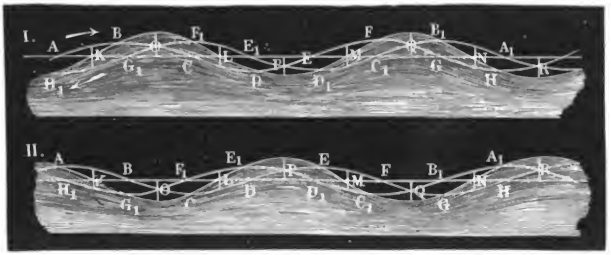

Die Bahnen der Wasserelemente erleiden durch den Anstoß an die feste Wand dieselben Veränderungen, wie bei dem Durchkreuzen zweier Wellen; es wird auch hier in der Nähe der Wand der horizontale Theil dieser Bewegung immer mehr und mehr aufgehoben, und dagegen der verticale Component mehr und mehr verstärkt, so daß nahe an der Wand diese Bahn in eine verticale, und entfernter davon in eine schiefe Linie übergeht. Stößt die Welle schief gegen eine feste Wand, so wird sie, wie jeder elastische Körper, unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter welchem sie auftrifft. Trifft die Welle nur theilweise gegen ein Hinderniß, so treten die Erscheinungen der sogenannten Inflexion ein, wobei sich neue Wellen um die äußersten Enden dieser Hindernisse herum bilden.

Endlich entstehen die stehenden Wellen des Wassers wie die einer Saite oder eines anderen festen Körpers, wenn sich zwei gleich lange Wellen kreuzen, deren Ausgangspunkte um das $1, 3, 5, 7 \ldots$ fache des Viertels einer Wellenlänge von einander abstehen. Es sei $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H$, Fig. 902 I. und II., die eine, und $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1\,F_1\,G_1\,H_1$ die andere Welle. In den Punkten $K$, $L$, $M$, $N$, wo beide Wellenzüge von der Mittellinie gleich weit abstehen, sich also die Bewegungen aufheben, bilden sich feste Inter-

Digitized by Google

ferenzpunkte, dagegen über und unter den Punkten $O$, $P$, $Q$, $R$, wo sich beide Wellenlinien schneiden und daher die Wege verdoppeln, entstehen abwechselnd Berggipfel und Thalsohlen.

Fig. 902.




Anmerkung. Den vollständigsten Unterricht über die Wellenbewegung ertheilt folgendes Werk: Wellenlehre auf Experimente gegründet, u. s. w., von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825. Einen guten Auszug hiervon findet man in dem Lehrbuche der mechanischen Naturlehre von August. Auch ist hierüber nachzulesen: Müller's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, Bd. I. Die Abhandlungen über die Wellen von Laplace, Lagrange, Flaugergues, Gerstner und Poisson findet man in dem Weber'schen Werke sehr vollständig mitgetheilt und kritisirt. Ueber Cauchy's „Wellen-Theorie" und Bidone's „Versuche" findet man Ausführlicheres in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Art. Wellen. Emy's „Wellentheorie" ist unter dem Titel „Ueber die Bewegung der Wellen und über den Bau am Meere und im Meere" von Wiesenfeld übersetzt, und 1839 in Wien erschienen. Die Schriften von Hagen sind oben §. 27 citirt worden. Auch handelt Airy von der Theorie der Wasserwellen im Artikel „Tides and Waves" der Encyclopädia metropolitana Vol. V.



Digitized by Google

# Alphabetisches Sachregister.

Die angegebenen Ziffern geben die Seitenzahl an.

## A.


Abbrechen, 418.
Abdrücken, Abscheeren (Widerstand desselben), 339. 372.
Aberration des Sternenlichtes, 120.
Abhängigvariable, 1.
Abhang, 921.
Abscissen, 2.
Abscissenacceleration, 114.
Abscissengeschwindigkeit, 113.
Acceleration, 76. 81. 92.
Adhäsionskraft, 131. 728.
Adhäsionsplatten, 729.
Aërodynamik, Aërostatik, 133.
Aichen, Aichmaß, 942.
Aggregatzustände, 130.
Anfangsgeschwindigkeit, 76. 608 1047.
Angriffspunkt, 131. 159.
Ansatzgerinne, kurze (Ausfluß durch) 814. 816.
Ansatzröhren, conisch convergente, 827.
Ansatzröhren, conisch divergente, 828.
Ansatzröhren, kurze (Ausfluß durch) 818. 820.
Ansatzröhren, kurze conische, 827. 857.
Ansatzröhren, kurze cylindrische, 819, 854.
Ansatzröhren, kurze innere, 821.
Ansatzröhren, kurze schiefe, 823.
Ansatzröhren, lange, 829.
Anschwellungen der Flüsse, 939.
Antifrictionszapfen, 316.
Anziehungsgesetze, magnetische, 1022.
Aräometer, Senkwagen, 724.
Arbeit der Centrifugalkraft, 546.
Arbeit der comprimirten Luft, 749. 902.
Arbeit der Reibung, 280. 302.
Arbeit der Trägheit, 139. 543.
Arbeit der Wärme, 902.
Arbeit einer Kraft, mechanische Arbeit, 136. 154. 176.
Arbeitseinheit, 137.
Arbeitsmodul der Elasticität und Festigkeit, 349. 419.
Arbeitsverlust beim Stoß, 640. 849.
Archimedes' Princip, 723.
Asymptote, 17. 19. 20.
Atmosphäre, Atmosphärendruck, 743.
Atwood'sche Fallmaschine, 566.
Aufhängepunkt, 216, 630.
Auftrieb, 708, 763.
Ausdehnung der Luft, 747.
Ausdehnung durch Wärme, 759.
Ausdehnung, elastische und permanente, 341. 360.
Ausdehnungscoefficient, 759.
Ausdehnungskräfte, 340.
Ausdehnungsversuche, 359.
Ausfluß aus bewegten Gefäßen, 783.
Ausflußcoefficient des Wassers, 790.
Ausflußcoefficienten der Luft, 910.
Ausfluß der Luft aus Gefäßen, 898. 900. 905. 907.
Ausfluß des bewegten Wassers, 808.
Ausfluß des Wassers aus Gefäßen, 766.


Digitized by Google

Ausflußgeschwindigkeit, 766.
Ausflußmenge, Ausflußquantum, 766. 899.
Ausflußmündung, Ausflußöffnung, 766.
Ausfluß unter veränderlichem Drucke, 876. 918.
Ausfluß unter Wasser, 772.
Ausfluß verschiedener Flüssigkeiten, 771. 896.
Ausfluß, voller, 819.
Ausschlag, Ausschlagswinkel, 615.
Axe eines Kräftepaares, 172.
Axe, freie, 590.
Axe, Umdrehungsaxe, 172. 214. 539.
Axendruck, 217.
Axenschicht, neutrale, 376.

## B

Balken, 384. 388. 393. 396.
Balken, gespannte, 525.
Balken, hohle, 403. 443.
Ballistik, 103. 1004.
Ballistisches Pendel, 659.
Barometer, 742.
Barometrisches Höhenmessen, 754.
Barycentrische Methode, 208.
Becher, hydrometrischer, 952.
Beharrungsvermögen, Trägheit, 125.
Beharrungszustand des fließenden Wassers, 923.
Belastung, excentrische, 446.
Berührungslinie, 7.
Beschleunigung, 76.
Beschleunigung der Schwere, 81. 127.
Bette, Flußbette, 921.
Bewegung, absolut, relativ, 73. 117.
Bewegung, beschleunigt, verzögert, 74.
Bewegung der Luft in Röhren, 916.
Bewegung des Wassers in Flußbetten u. s. w., 921. 935.
Bewegung des Wassers in Röhren, 835.
Bewegung, einfache und zusammengesetzte, 94.
Bewegung, geradlinige und krummlinige, 73.
Bewegung, gleichförmige und ungleichförmige, 74.
Bewegung in widerstehenden Mitteln, 1001.
Bewegungsarten, 539.
Bewegungshindernisse, 1043.
Bewegungsmoment, 636.
Bewegungsphasen, 1028.
Biegung, 375.
Biegungsfestigkeit, 339. 416.
Biegungsmoment, 378. 380. 398. 402.
Binomialfunction, 25.
Binomische Reihe, 25.
Bodendruck, 687.
Böschung, 235. 698. 927.
Bogenlänge, 53.
Brachystochronismus, 625.
Brechungsebene, Brechungsquerschnitt, 461.
Bricolwinkel, 861.
Brunnenzoll, 949.

## C.

Calotte, 559.
Capillarität, 728.
Cataracte, 842.
Centralstoß, 633. 635.
Centrifugalkraft, 574.
Centrifugalkraft des Wassers, 685. 686.
Centripetalkraft, 574.
Cinematik, 122.
Cohäsion, 337, 728.
Cohäsionskraft, 131.
Communicirende Röhren, 689. 727.
Componenten, 97. 142. 1045.
Concavität, 7. 23.
Conische Röhren, 838.
Constante Factoren, 9. 29.
Constante Glieder, 9. 29.
Constante Größen, 1. 9.
Constante Kraft, 134.
Contraction, Contractionscoefficient, 788. 910.
Contraction, vollkommene und unvollkommene, 806. 824. 853.
Contraction, vollständige und unvollständige (partielle), 803.
Contractionsscala, 802.
Contrahirte Wasserstrahlen, 787. 789.
Convexität, 7. 23.
Coordinaten, 2.
Cosinus- und Cotangensfunction, 39.

Digitized by Google

Curven, convexe, concave, 7. 12. 22.
Cycloide, Cycloidenpendel, 621. 622.
Cylinder, hohler, 409.

D.

Dampf, Dichtigkeit deſſelben, 761.
Dampf, Expanſivkraft deſſelben, 3.
Daniel Bernoulli, 770.
Dichtigkeit der Körper, 128.
Dichtigkeit (mittlere) der Erde, 1017.
Dichtigkeit der Luft, 761.
Dichtigkeit des Waſſerdampfes, 761.
Dichtigkeit des Waſſers, 128.
Differenzial, 6.
Differenzialverhältniß, Differenzialquotient, 7.
Directionskraft der Magnetnadel, 1019.
Drehklappe, 867. 869.
Drehpunkt, 222.
Drehung, 177. 178. 538.
Drehungselaſticität, 339. 489.
Drehungsfeſtigkeit, Torſionsfeſtigkeit, 494.
Drehungshalbmeſſer, 547. 575.
Drehungsmoment, 490. 543. 1020.
Drehwage, 1016.
Droſſelventil, 867.
Druck der Luft, 742. 753.
Druckfeſtigkeit, 338. 339.
Druckhöhe, 688. 767. 775.
Druck, hydrauliſcher, hydrodynamiſcher, 774.
Druck, hydroſtatiſcher, 679. 689. 690.
Druck im Waſſer, 681.
Druck und Zug, 124. 338.
Druck-, Vertical-, Horizontal-, 698.
Durchbiegung, Einbiegung, 384. 435.
Dynamik, 123. 133.

E.

Ebene, ſchiefe oder geneigte, 239. 241. 605.
Eigenthümliches Gewicht, 129.
Einfallsloth, Einfallswinkel, 650.
Einheit der mechaniſchen Arbeit, 137.
Einrammen, 664.
Elaſticität, 131. 337. 742. 1011.
Elaſticitätsgrenze, 337. 342.
Elaſticitätsmodul, 344. 373. 1015.
Elaſtiſche Linien, 380. 488.
Elaſtiſch-flüſſige Körper, 678.
Elemente, 6.
Elevationswinkel, 104.
Ellipſe, 18. 251.
Ellipſoid, 560.
Elliptiſche Bewegung, 1047.
Elongation, 615.
Emporſteigen, ſenkrechtes, 84.
Endgeſchwindigkeit, 76.
Erdmagnetismus, 1020. 1025.
Evolute, 56.
Excentriſcher Druck und Zug, 517.
Excentriſcher Stoß, 633. 661.
Expanſivkraft der Luft, 742. 759.
Expanſivkraft des Waſſerdampfes, 3.
Exponentialfunction, 31.

F.

Fall oder Fallen der Körper, 3. 81. 605. 625.
Fallmaſchine von Atwood, 566.
Fallwinkel, Neigungswinkel, 281. 605.
Federn, Federdynamometer, 472.
Federkraft, 131.
Feſtigkeit, 338.
Feſtigkeitsmodul, 347. 418.
Fläche, krumme, 8.
Fliehkraft, 574.
Fließende Waſſer, 921.
Flügelrad, hydrometriſcher Flügel, 958.
Flüſſigkeiten, flüſſige Körper, 130. 678.
Flußbetten, 921.
Fortpflanzungsgeſchwindigkeit, 1028. 1051.
Fortrollen, 571.
Fortſchreitende Bewegung, 539.
Friction, 276.
Frictionsräder, 303. 565.
Füllen und Leeren der Schleuſen, 890.
Functionen, 1.

G.

Gay-Luſſac'ſches Geſetz, 759.
Gaſe, Luftarten, 742.
Gasmeſſer, Gasuhr, 989.
Gefälle, 921.

Digitized by Google

Gefäßbarometer, 742.
Gefäßmanometer, 745.
Geostatik, Geodynamik, Geomechanik, 133.
Geschmeidig, 338.
Geschwindigkeit, 74.
Geschwindigkeit des fließenden Wassers, 922.
Geschwindigkeit des Schalles, 1032.
Geschwindigkeit, mittlere, 89, 92. 922.
Geschwindigkeit, virtuelle, 155.
Geschwindigkeitscoefficient, 786. 910.
Geschwindigkeitshöhe, 83. 775.
Geschwindigkeitsveränderung, plötzliche, 851.
Gesetz von Mariotte, 746.
Gesetz von Gay-Lussac, 759.
Gewicht, absolutes, 124. 127. 129.
Gewicht, specifisches oder eigenthümliches, 129. 721.
Gewichtseinheit, 125.
Gleichförmige Bewegung, 74.
Gleichförmig beschleunigte, gleichförmig verzögerte Bewegung, 75. 77. 80.
Gleichförmig veränderte Bewegung, 75.
Gleichgewicht, 123. 124.
Gleichgewichtsarten, 216. 217. 231.
Gleichheit der Kräfte, 124.
Gramm, Kilogramm, 125.
Gleiten, 277. 605.
Graphische Darstellung, 2. 90.
Größen, constante und variable, 1.
Grundbette, 921.
Guldinische Regel, 208.

## H.

Haarröhrchen, 738.
Hähne, 866. 869.
Härte, 338. 643.
Halszapfen, 314.
Hauptaxen, 590.
Hebel, Hebelarten, 222. 223. 310.
Hebelarm, 161.
Hebermanometer, 744.
Herabgleiten, 609.
Herabrollen, 612.
Horizontal- und Verticaldruck, 698. 702. 708.
Hoyer, Rammbär, 664.
Hydrodynamik, Hydrostatik, 133. 766.
Hydraulik, 133.
Hydrometer, Hydrometrie, 942. 955.
Hydrometrisches Flügelrad, 958.
Hydrometrisches Pendel, 966.
Hyperbel, 19. 48.
Hyperbolische Logarithmen, 32. 48.
Hydrostatische Wage, 722.

## I.

Insterion der Wellen, 1056.
Insterions- oder Wendepunkt, 22.
Interferenz der Wellen, 1030. 1055.
Integral, Integralrechnung, 28.
Integralformeln, 41.
Intensität einer Kraft, 132.
Intensität des Erdmagnetismus, 1026.
Interpolation, 66.
Isochronismus, 606, 624. 625.

## K.

Kegelventile, 871.
Keil, 244. 296. 462.
Kettenbrücke, 259.
Kettenlinie, 260, gemeine Kettenlinie, 266.
Kettenreibung, 325. 328.
Klappenventile, 866. 871.
Klostergewölbe, 210.
Kniehebel, 224.
Knieröhren, 860.
Knoten, 248.
Körnerspitzen, 316.
Körper, materielle oder physische, 122.
Körper, starre, biegsame und elastische, 247.
Körper von gleichem Widerstande, 356. 464. 470. 505.
Kolbenstange, 504. 539.
Kraft, Kräfte, 122. 123. 131. 174.
Kraft, lebendige, 141.
Kräftepaar, 167. 378.
Kräftemaß, 126.
Kraftmoment, 162. 380.
Kraftrichtung, 131.
Kreis, 2.
Kreisbogen, Schwerpunkt desselben, 183.
Kreisfunctionen, 38.
Kreisel, 576.
Kreispendel, 614.
Kropfröhren, gekrümmte Röhren, 862.
Krümmungshalbmesser, Krümmungskreis, 55. 110. 379.

Digitized by Google

Krummlinige Bewegung, 109. 113. 156.
Kugel, 194. 203. 554. 571. 612. 713. 884.
Kurbel, 89. 539.
Kurbelstange, 503. 539.

L.

Labiles Gleichgewicht, 217. 233.
Länge einer Welle, 1024. 1051.
Längenschwingungen, 1011. 1027.
Last, 223. 271.
Lebendige Kraft, Princip derselben, 139. 141.
Leeren der Ausflußgefäße, 876.
Lesbros' Versuche, 812.
Leistung, Arbeit einer Kraft, 136.
Leistung der Centrifugalkraft, 576.
Leistungsvermögen des fließenden Wassers, 767.
Linie, elastische, 380. 383.
Linie, gerade, 17.
Logarithmen, 32.
Luft, Ausfluß derselben, 898. 900. 905.
Luftballon, 764.
Luft, Dichtigkeit derselben, 761.
Luft, Luftdruck, 743.
Luftmanometer, 762.
Luftpumpe, 756.
Luftschichten, 753.

M.

Mac Laurin's Reihe, 25.
Magnetismus, 1020.
Magnetische Kraft, 131. 1022.
Magnetnadel, 1019.
Manometer, 742. 744.
Mariotte'sches Gesetz, 5. 746.
Masse, 127.
Massenmoment, 543.
Materie, 124.
Materieller Punkt, 133.
Materielles Pendel, 614.
Maximal- und Minimal-Contraction, 800.
Maximal- und Minimal-Spannungen, 481.
Maximum und Minimum, 21.
Mechanik, 122.
Mechanische Arbeit, 136. 176.
Metacentrum, 717.
Metallfedern, 472.
Methode der kleinsten Quadrate, 63.
Mittel, arithmetisches, 65.
Mittelkraft, 145.
Mittelpunkt der Masse, 180. 540.
Mittelpunkt des Schwunges, 627.
Mittelpunkt des Stoßes, 603. 658.
Mittelpunkt des Wasserdruckes, 691.
Mittelpunkt paralleler Kräfte, 174.
Modul der Elasticität und Festigkeit, 344. 346.
Modul der Logarithmen, 33.
Molecularwirkungen, 728.
Molecule, Molecularkraft, 131. 728.
Moment eines Kräftepaares, 167. 168.
Moment, magnetisches, 1020. 1026.
Moment paralleler Kräfte, 174.
Moment, statisches oder Kraftmoment, 162.
Moment, Trägheitsmoment, 543.
Mundstücke, Ein- und Ausmündungsstück, 841. 846.
Mündung in der dünnen Wand, 787. 896. 910.
Mündungen, rectanguläre, 778. 794. 808. 812.
Muskelkraft, animalische Kraft, 131.

N.

Naturgesetze, 3.
Natürliche Logarithmen. 32. 48.
Naturlehre, 122.
Neil'sche Parabel, 53.
Nicholson'sche Senkwage, 725.
Normale, 55.
Normalacceleration, 111. 573.
Normalkraft, 156. 573.

O.

Obelisk, Ausfluß aus demselben, 885.
Obelisk, Schwerpunkt desselben, 201.
Oberfläche des Wassers, 685.
Observatorium, hydraulisches, 961.
Obturatoren, 866.
Oel, Ausfluß desselben, 896.
Ordinaten, 2.
Ordinatenacceleration, 114.
Ordinatengeschwindigkeit, 113.
Ort, 73. 118.
Oscillation, 614. 1008.

Digitized by Google

## P.

Parabel, 3. 55. 101. 258. 269.
Parabolische Bewegung, 102. 109.
Paraboloid, 556. 686.
Parallelepiped der Geschwindigkeiten, 100.
Parallelkräfte, 166.
Parallelogramm der Acceleration, 100.
Parallelogramm der Bewegungen, 95.
Parallelogramm der Geschwindigkeiten, 96.
Parallelogramm der Kräfte, 145.
Paralleltafeln, 736.
Parameter, 17.
Pendel, ballistisches, 659.
Pendel, einfaches mathematisches und materielles, 614. 627.
Pendel, hydrometrisches, 966.
Pendellinse, 557.
Pendelschlag, 615.
Periode, periodische Bewegung, 74. 89.
Pfähle, Einrammen derselben, 664.
Pfund, Zollpfund, Neupfund, 125.
Phoronomie, 122.
Phoronometrische Formeln, 87.
Piezometer, 745. 847.
Pitot'sche Röhre, 964.
Pneumatik, 133.
Polyeder, Schwerpunkt derselben, 198.
Poncelet'sche Ausflußmündungen, 794.
Poncelet's Theorem, 308.
Potenzfunction ($x^n$), 12.
Potenzreihe, natürliche, 32.
Princip des gleichen Druckes, 679.
Profil, Längen- und Querprofil, 921.
Progressive Bewegung, 139.
Prony's Wassermeßmethode, 948.
Prosaphie und Synaphie, 729.

## Q.

Quadratur der Curven, 46.
Quecksilber, Ausfluß desselben, 896.
Querprofil der fließenden Wasser, 921. 925.
Querschwingungen, 1014. 1036.
Querschnitt, 342. 642. 767. 921.
Querschnitt, schwacher, gefährlicher, 461.
Querschnittsveränderungen, plötzliche, 849.
Quotient $\frac{0}{0}$, 61.
Quotient, Differenzial desselben, 11.

## R.

Radwelle, 272. 533. 561.
Rammbär, Rammklotz, 664.
Reaction des ausfließenden Wassers, 968.
Reactionsrad, 981.
Rectification der Curven, 53.
Reduction der Biegungsmomente, 398.
Reduction der Massen, 545.
Reduction der Trägheitsmomente, 546.
Reduction einer Kraft, 222.
Reductionsformel 44.
Reflexionswinkel, Austrittswinkel, 650.
Reibung, Reibungswiderstand, 276.
Reibung auf der schiefen Ebene, 290.
Reibungsarten, 277.
Reibungscoefficient, 280.
Reibungscoefficient der Luft in Röhren, 915.
Reibungscoefficient des Wassers in Flüssen, 931.
Reibungscoefficient des Wassers in Röhren, 830.
Reibungsgesetze, 279.
Reibungskegel, 282.
Reibungswage, 284.
Reibungswiderstandshöhe, 830.
Reibungs- oder Ruhewinkel, 281.
Relativer Ort, relative Bewegung, 118.
Resultirende Kraft, Mittelkraft, 142. 145. 161.
Reversionspendel, 631.
Rheometer, 967.
Rippen, 444. 445.
Röhren- und Kesselstärken, 704.
Röhrenleitungen, 840.
Rösche, 921.
Rollen, feste und lose, Kraft- und Leitrolle, 270. 271. 335. 567.
Rollen der Körper, 571. 612.
Rotationsflächen und Rotationskörper, 205. 208. 209. 559. 592.
Ruhe, absolute, relative, 74.
Ruhepunkt, Stützpunkt, 222.

## S.

Saiten, Schwingungen gespannter, 1036.
Säulen, Tragkraft derselben, 498.

Digitized by Google

Schallgeschwindigkeit, 1032.
Schaukeln oder Wiegen, 631.
Scheer- und Schubfestigkeit, 339. 372.
Schieber, Schubventile, 866. 869.
Schiefe Ebene, 239. 290.
Schiefwinkelige Coordinaten, 47.
Schleusen, 890.
Schmieren, 277.
Schneiden und Spitzen, 319.
Schubfestigkeit, 372.
Schubkraft, 378. 476.
Schwerebene, Schwerlinie, 180.
Schwerkraft, 81. 122. 131.
Schwerpunkt, 180.
Schwerpunktsbestimmungen, 181.
Schwimmen, Schwimmtiefe, 711. 712. 715. 720.
Schwimmer, Schwimmkugel, 955.
Schwimmstab, 956.
Schwingung, schwingende Bewegung, 614. 1008.
Schwingungen elastischer Stäbe, 1038.
Schwingungen der Magnetnadel, 1021.
Schwingungen der Saiten, 1036.
Schwingungen des Wassers, 1045.
Schwingungsamplitude, 1009.
Schwingungsbogen, Schwingungsweite, 542. 615.
Schwingungspunkt, 627.
Schwingungszeit, Schwingungsdauer, 615. 1009. 1033.
Schwungkraft, 574.
Seilmaschine, 247.
Seilpolygon, 252.
Seilreibung, 323.
Seitengeschwindigkeiten, 97.
Seitenkräfte, 145.
Sicherheitsmodul, 346.
Sinusfunction, 38.
Sinusoide, 39.
Sohle, 921.
Sondirstange, Sondirkette, 957.
Spannkraft, 742.
Spannung, 248. 731.
Spannung, Horizontal- und Vertical-, 253.
Specifisches (eigenthümliches) Gewicht, 129. 721.
Sphäroid, 204. 554.
Spitzzapfen, 314.
Springende Wasserstrahlen, 842.
Spröde, 338.
Stab, Schwingungen eines Stabes, 1038.
Stabilität, Standfähigkeit, 216. 230. 236.
Stabilität schwimmender Körper, 716.
Stahl, gehärtet und angelassen, 368.
Stahlfedern, 472.
Statik, 123. 133.
Steifigkeit der Seile und Ketten, 328. 330.
Steifigkeitswiderstand der Hanf- und Drahtseile, 331. 332.
Steighöhe, Fallhöhe, 84. 844.
Stereometer, 754.
Stift, Reibung desselben, 314.
Stoß, verschiedene Arten des Stoßes, 633. 634.
Stoß, elastischer, 634.
Stoß, gerader, 633.
Stoß, unvollkommen elastischer, 634. 646.
Stoß, schiefer, 634. 648.
Stoß des Wassers, 972 977. 994.
Stoß der Luft, 996.
Stoßfestigkeit, 668. 671.
Stoßlinie, 633.
Stoßpunkt, 658.
Stoßreibung, 651.
Stoßzeit, 634.
Stromgeschwindigkeitsscala, 923.
Stromquadrant, 966.
Stromstrich, Stromrinne, 922.
Stützpunkt, 222.
Subnormale, 55.
Subtangente, 8. 34. 259.
Symmetrieebene, Symmetrieare, 183.
Symmetrische Körper, 182.
Sympson'sche Regel, 50. 138.

## T.

Tachometer, 967.
Tangente, Tangentenwinkel, 7. 15. 114.
Tangentialacceleration, 112.
Tangentialebene, 8.
Tangensfunction, Tangentoide, 39.
Tangentialgeschwindigkeit, 114.
Tangentialkraft, 156.
Taucherglocke, 749.
Tautochronismus, 625.
Teichdämme, 698.
Teichgerinne, 824. 888.

Digitized by Google

Temperatur, 759.
Torsion, 338. 489.
Torsionsfestigkeit, 494. 673.
Torsionsmoment, 490.
Torsionspendel, Torsionsschwingungen, 1016.
Torsionswinkel, 490.
Tractorie, Zuglinie, 317.
Träger, 430.
Trägheit, 125.
Trägheitshalbmesser, 547.
Trägheitskraft, 125. 131. 540.
Trägheitsmoment, 543.
Tragkraft, Tragvermögen, 345. 417.
Tragmodul, 346. 423. 495.
Tragmoment, 417. 438.
Triogonometrische Functionen, 38.
Trigonometrische Linien, 40.

## U.

Ueberfall, Wandeinschnitt, 777. 799. 810. 815. 880.
Umdrehungsaxe, 172. 214. 539. 595.
Umdrehungsebene, 215.
Umdrehungskräftepaar, 530.
Umdrehungszeit, 575.
Ungleichförmige Bewegung, 74. 85.
Ungleichförmige Bewegung des fließenden Wassers, 935.
Umhüllungscurve, 107.
Urvariable, 1.

## V.

Variable, veränderliche Größen, 1.
Ventile, 742. 745. 870.
Verschiebungswinkel, 496.
Versuchsapparat, hydraulischer, 892.
Virtuelle Geschwindigkeit, 155. 176. 179. 242.
Vollkommen flüssige Körper, 678.
Volumen, 125.
Volumenometer, 755.

## W.

Wage, hydrostatische, 722.
Wälzendes Pendel, 631.
Wälzende Reibung, 320.
Wärme, 759.
Wärmekraft, 131.
Wagenfedern, 473.
Wandeinschnitt, Ueberfall, 777. 880.
Wasser, Ausfluß desselben, 766.
Wasser, Dichtigkeit desselben, 128.
Wasserdämpfe, 3. 761.
Wasserdruck, hydrostatischer, 688.
Wasserdruck, hydraulischer, 774.
Wassermenge, Wasserquantum, 766.
Wassermeßapparat, 942.
Wassermesser, Wasseruhr, 986.
Wasserspiegel, Oberfläche des Wassers, 684. 731. 733.
Wasserstand in communicirenden Röhren, 689. 727.
Wasserstrahl, 767. 787.
Wasserstrahlen, springende, 106.
Wasserwellen, 1050.
Wasserzoll, 949.
Weich, 338.
Wellen, 1028.
Wellenberg, Wellenthal, 1051.
Wellenhöhe, Wellenlänge, 1051.
Wendepunkt, 22. 390.
Widerstand des Wassers, 994.
Widerstände, 123. 276.
Widerstandscoefficient, 822. 850.
Widerstandshöhe, 822.
Winkelacceleration, 542.
Winkelgeschwindigkeit, 542.
Winkelhebel, 223.
Wirkung einer Kraft, 124. 126.
Wirkung und Gegenwirkung, 132. 228. 633.
Woltmann'scher Flügel, Flügelrad, 958.
Wurfbewegung im luftleeren Raume, 104.
Wurfbewegung in der Luft, 1004.
Wurfhöhe, Wurfweite, 105.
Wurflinie, 1004.

## X.

Ximenes, Reibungsversuche, 285.
Ximenes, Wasserfahne, 967.

## Z.

Zahlenreihe, natürliche, 27.
Zapfen, 272. 278. 312.
Zapfenreibung, 278. 283.

Digitized by Google

Zerdrückungsfestigkeit, 342. 358.
Zerknickungsfestigkeit, 501.
Zerlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und Accelerationen, 99. 100.
Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte, 142. 146. 147. 162. 174.
Zerlegung und Zusammensetzung der Kräftepaare, 169.
Zug, 124. 338.
Zusammendrückung, elastische und permanente, 342.
Zusammengesetzte Ausflußgefäße, 873.
Zusammengesetzte Bewegungen 94.
Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit, 339. 513.
Zusammengesetzte Kräfte, 142.

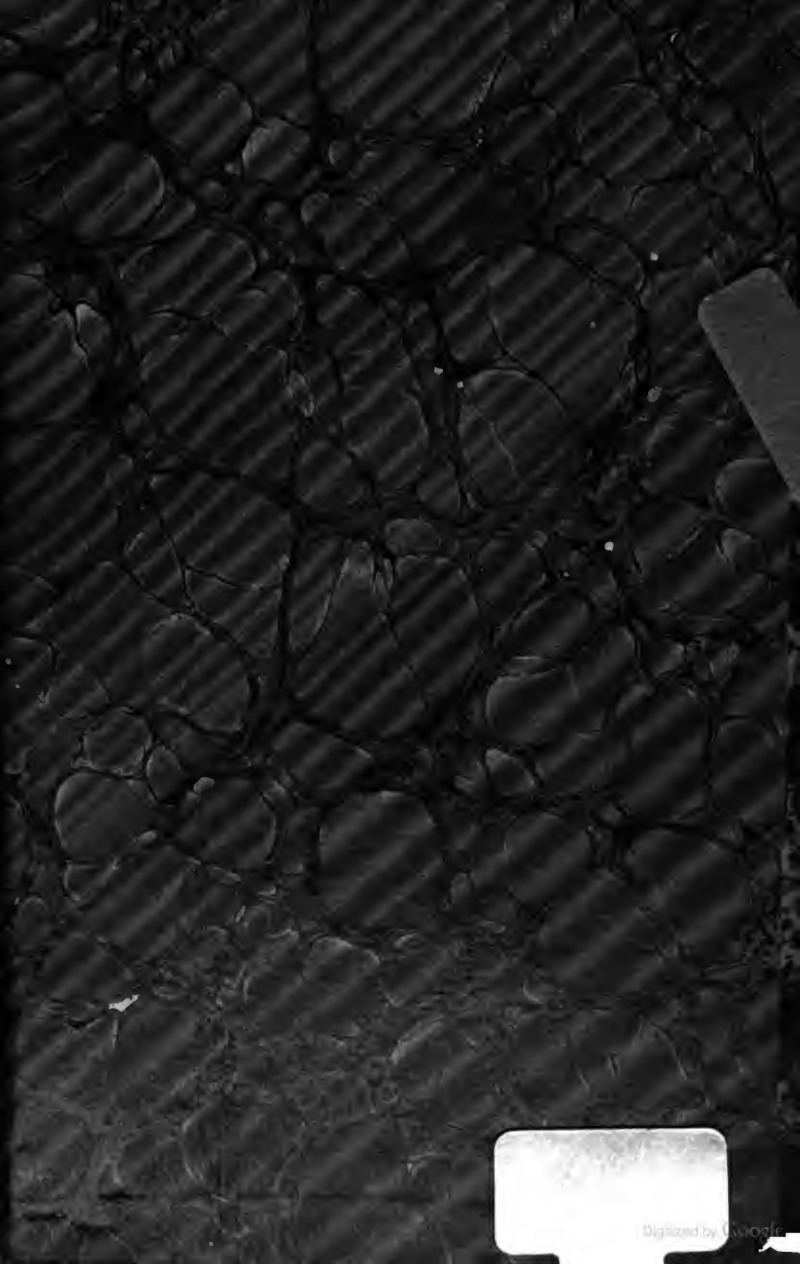
## Berichtigungen.

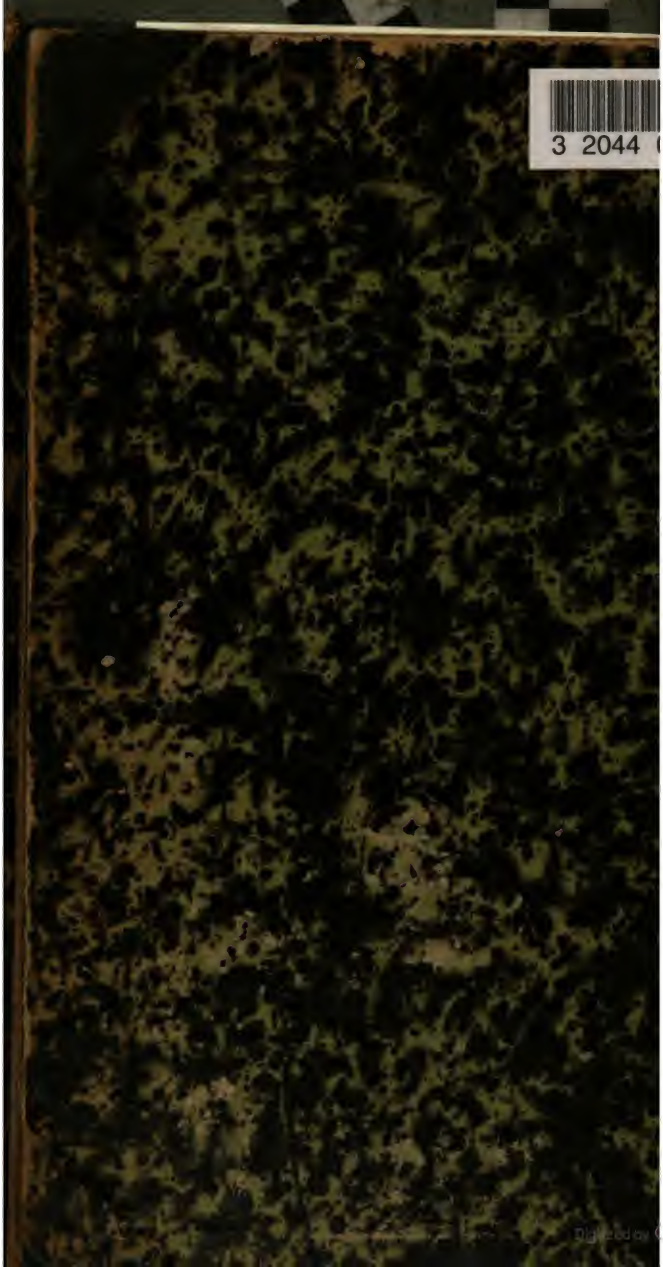
Seite 21 Zeile 15 von unten: $y =$ statt $x =$
„ 34, oben: Art. 21 statt Art. 12.
„ 83 Zeile 12 von unten: due à la statt de la.
„ 83 „ 17 „ „ 0,0510 statt 0,1019.
„ 86 „ 10 „ „ $\varkappa$, $\times$ statt $k$, $k$.
„ 138 „ 7 von oben: §. 73 statt §. 7.
„ 248 „ 3 „ „ vierten Abschnitt statt sechsten Capitel.
„ 369, 370, 371, oben: §. 212 statt §. 211.
„ 370 Zeile 17 von unten: 180 statt 1800.
„ 371 „ 5 von oben: Zerdrückens statt Zerreißens.
„ 403 „ 11 von unten: fehlt am Rand §. 228.
„ 488 „ 5 von oben: $C$ statt $c$.
„ 496 „ 5 von unten: $\frac{Wl}{2e^2}$ statt $\frac{WC}{2e}$.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google


3 2044
Digitized by Google